重力

アインシュタインの一般相対性理論入門



ジェームズ・B・ハートル 著

牧野 伸義 訳

ピアソン・エデュケーション

重　　力

アインシュタインの一般相対性理論入門

ジェームズ・B・ハートル 著
牧野 伸義 訳

ピアソン・エデュケーション

Tokyo・San Francisco・Boston・New York
Capetown・Hong Kong・London・Madrid・Mexico City
Montreal・Munich・Paris・Singapore・Sydney・Toronto

To Mary Jo

目　次

ボックス

初めに

アインシュタインによる重力の相対性理論 —— 一般相対性理論 —— は，定式化されてからもうすぐ 1 世紀になる．その中心には現代科学における最も美しく革命的な概念 ——重力は曲がった 4 次元時空の幾何学であるというアイディア —— がある．一般相対性理論は量子理論とともに 21 世紀物理学における 2 つの最も深遠な発展のうちの 1 つである．

一般相対性理論は太陽系で正確な検証が行われてきた．最も遠いスケールの宇宙の理解の土台となり，重力崩壊やブラックホール，X 線源，中性子星，活動銀河核，重力波，ビッグバンのような最先端の宇宙物理現象を説明するのに中心的な役割を担っている．一般相対性理論は現在の素粒子物理学の多くのアイディアの起源となり，弦理論のようなすべての力を統一する理論を理解するうえで必要不可欠となっている．

このテーマへの第一歩は，非常に基本的ですでに確立されており，いくつかの物理分野の核心でもあるし，また物理が専門でない人々にとってもたいへん面白いものなので，物理を専攻する大学生なら当然学ぶべきものである．しかし，学部レベルの学生に一般相対性理論を教えようとすると，必ずぶつかる基本的な問題がある．この教科を教えるにあたって妥当な順番（他の分野でも同じだが）は，必要な数学的知識を集め，基礎方程式を動機付け，それを解き，解を物理的に興味ある状況に当てはめることである．微分幾何学の知識を身に付け，アインシュタイン方程式を導入し，解くことはエレガントで満足のいく物語である．しかし，長い道のりでもある．実際，それを行い，学部の初期課程としてふさわしい時間内に多くの現代的応用に進むのはあまりに長い道のりである．

本書『**重力** *Gravity*』では一般相対性理論をこれまでとは別の順序で導入する．本書が基づいている原理は付録 D で長く議論するが，本質的な部分を選べば方針は以下のとおりである：最も単純な物理的なアインシュタイン方程式の解を導出なしで**まず最初**に示す．その解は，観測可能な結果がテスト粒子や光の運動を調べることによって理解される時空である．この方法によって学生は可能なかぎり早く物理現象に接することができる．それは古典力学に直接つながる部分であり，必要とされる新しい数学的アイディアが最小限に抑えられる．後でアインシュタイン方程式を導入して解き，これらの幾何学がどのように考え出されたのかを示す．

この方針に基づいた物理学科学部後半の課程と本書の初めの 2 部が，25 年にわたりカルフォルニア大学サンタバーバラ校の学部生のカリキュラムの一部を構成しており，良い結果が出ている．

謝辞

重力物理学における私の仲間たちが本書で何か新しいものを見つけたとすれば残念なことである．そう言うの理由は，本書が頼りきっている Landau and Lifshitz (1962)，Misner，Thorne and Wheeler (1970)，Taylor and Wheeler (1963)，Wald (1984)，そして Weinberg (1972)，これら古典となっているテキストを読み込んでいなかったことになるからだ．私はこれらの著作から受けた恩恵をその都度感謝を示すことはしなかったので，ここでまとめて礼を述べておきたい．

特に以下の人々に感謝する．Roger Blandford, Ted Jacobson, Channon Price, Kip Thorne, Bob Wald. 彼らは初稿に目を通し，数値の訂正に加え，全体的な構造にありがたいアドバイスをくれた．

数年に渡り初期段階から授業をしている私の同僚たちのコメントや批判から恩恵を被っている．Vernon Barger, Omer Blaes, Doug Eardley, Jerome Gauntlett, Gary Horowitz, Clifford Johnson, Shawn Kolitch, Rob Myers, Thomas Moore, Stan Peale, Channon Price, Kristin Schleich にはこの点について感謝している．多くの同僚が，個々の章に建設的なコメントを寄せてくれた．Lars Bildsten, Omer Blaes, Peter D'Eath, Doug Eardley, Wendy Freedman, Daniel Holz, Gary Horowitz, Scott Hughes, Robert Kirshner, Lee Lindblom, Richard Price, Peter Saulson, Bernard Schutz, David Spergel, Joseph Taylor, Michael Turner, Bill Unruh, Clifford Will には助けてもらったので，特に感謝したい．Eric Adelberger, Neil Ashby, Matt Colless, Francis Everitt, Andrea Ghez, John Hall, Jim Moran, Michael Perryman, Wolfgang Schleich, Tuck Stebbins, Max Tegmark, Dave Tytler, Jim Williams にはボックスや図に援助してもらい感謝している．Dave Arnett, Peter Bender, Dieter Brill, J. Richard Gott, Jeanne Dickey, Andrew Fabian, Jeremy Gray, Gary Gibbons, Wick Haxton, Gordon Kane, Angela Olinto, Roger Penrose との教育に関する情報交換は有益だった．この長いリストの中で誰かを見落としたかもしれない．その人たちに謝らなければならないし，次の刷では入れようと思う．

多くの図を提供してくれた人たちには図のキャプションで感謝している．

誤りや書き間違い，それに明確さを欠く議論を指摘してくれた学生は数多くいる．そして Joe Alibrandi, Maria Cranor, Ian Eisenman, Bill Paxton, Taro Sato には特別な貢献をしてくれたことに感謝する．

Esther Singer と Reta Benhardt は講義ノートをタイプしてくれたが，それを本書はもとにしている．2 人には感謝している．しかし Thea Howard には特に感謝している．いろんな段階で電子的に原稿を入力しイラストのほとんどの電子原稿をつくってくれた．

Leonard Parker は，本書のウェブサイトにある曲率計算用ための *Mathematica* プログラムを書いてくれ，Lee Lindblom は第 24 章の星のモデルを計算してくれた．Matt Hansen は後半の段階で全ての原稿に目を通し，間違いを訂正し，価値あるコメントをくれた．彼らには特別に感謝を述べたい．

私の謝辞は，次の方々のことを忘れると完結しない．Adam Black を始めとする Addison-Wesley のスタッフ，Leslie Galen のもとでの Integre Technical Publishing, George Morris とともに Scientific Illustrators，これらのみなさんの協力と柔軟な対応，助言，忍耐に感謝を述べて締

めくくりたい．

ありとあらゆる面で惜しみなく支えてくれ，締切だと言えば自らを省みず融通を利かせ，原稿の完成時期についてのあまりに甘い予測にも，限りなく寛容でいてくれた妻メアリー・ジョーに本書を捧げる．

ジェームズ・ハートル

2002 年 6 月

図の出展

本書で使った図の出展を次に示す.

図 1.1, Adapted from a figure prepared by Clifford Will for Hartle et al. 1999.

図 1.3, Courtesy of Paul Scowen and Jeff Hester (Arizona State University), and the Mt. Palomar Observatories.

図 1.4, Simulation and image courtesy of Rob Hynes.

図 1.5, Courtesy of NASA Jet Propulsion Laboratory.

図 1.6, Courtesy of the Boomerang Collaboration.

ボックス 2.1, Courtesy of Randall Rickleffs, McDonald Observatory.

ボックス 2.1, Courtesy of James Williams and the Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.

ボックス 2.1, Courtesy of James Williams and the Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.

ボックス 2.2, Courtesy of the Boomerang Collaboration.

ボックス 4.1, Courtesy of John Hall, from Brillet and Hall 1979.

ボックス 4.2, The author learned of these diagrams from G.W. Gibbons. The example shown is taken from Marey 1885.

ボックス 4.3, Courtesy of John Biretta, Space Telescope Science Institute. Data from Biretta, Moore and Cohen 1996.

図 6.2, Courtesy of Eric Adelberger, University of Washington.

図 6.3, NASA.

ボックス 6.2, Courtesy of the US Naval Observatory.

ボックス 7.2, Drawing of Kip Thorne by Matthew Zimet, reproduced from Thorne 1994 with the permission of W.W. Norton, Inc.

図 10.1, Adapted from Vessot and Levine 1979.

図 10.3, From Campbell and Trumpler 1923.

図 10.5, Courtesy of E. Fomalont and the National Radio Astronomy Observatory.

図 10.6, Courtesy of E. Fomalont, National Radio Astronomy Observatory.

図 10.7, From Shapiro et al. 1977, courtesy of Irwin Shapiro.

図 11.4, Courtesy of Tony Tyson, Bell Laboratories, Lucent Technologies and NASA from W. Colley, J.A. Tyson, and E. Turner 1996.

図 11.6, Courtesy of Kim Griest and the MACHO collaboration.

図 11.8, Courtesy of Chris Reynolds from data in Y. Tanaka et al., 1995.

図 11.9, Courtesy of the NAIC-Arecibo Observatory, a facility of the NSF, and David Parker.

図 11.10, Courtesy of J.H. Taylor, Princeton University.

図 13.1, Simulation and image courtesy of Rob Hynes.

図 13.2, Courtesy of Jerome Orosz from Orosz et al. 1996.

図 13.3, Courtesy of J.M. Moran and L. J. Greenhill based on data in Miyoshi et al., 1995 and Hernstein et al., 1999.

図 13.4, Courtesy of Andrea Ghez, UCLA from data in Ghez, et al., 2002.

図 13.5, Courtesy of Chris Carilli and Rick Perley, NRAO

ボックス 14.1, Courtesy of Francis Everitt, GP-B project.

ボックス 15.1, Adapted from Thorne et al. 1986.

図 16.5, Courtesy of Caltech/LIGO.

図 17.1, Courtesy of Peter Challis, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics and AURA.

図 17.2, Space Telescope Science Institute and NASA.

図 17.3, Courtesy of NASA Goddard Space Flight Center and the COBE Science Working Group from data in Fixsen et al. 1996 and Mather et al. 1999.

図 17.4, From M. Roberts 1988 courtesy of M. Roberts based on data from Cram, Roberts, and Whitehurst 1980.

図 17.5, Courtesy of Barbara Carter, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics.

図 17.8, Courtesy of Michael Perryman from the Hipparcos Astrometric Satellite project of the European Space Agency.

図 17.9, Courtesy of Wendy Freedman, Carnegie Observatories from data in Persson et al. 2003.

図 17.10, Courtesy of Peter Challis, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Space Telescope Science Institute, and NASA.

図 17.11, Courtesy of Wendy Freedman, Carnegie Observatories from data in Freedman, et al. 2001.

図 17.12, Courtesy of NASA Goddard Space Flight Center and the COBE Science Working Group from data in Bennett et al. 1996.

図 17.13, Courtesy of Steve Maddox, Will Sutherland, George Efstathiou, and John Loveday.

図 17.14, Courtesy of John Peacock and the 2dF Galaxy Redshift Survey Team.

ボックス 19.1, Courtesy of David Tytler and Nao Suzuki, University of California, San Diego.

図 19.2, Courtesy of Adam Riess and the High-Z Supernova Search Team.

図 19.4, Courtesy of M. Tegmark from an analysis described in Wang, Tegmark and Zaldarriga 2001.

図 23.3, Courtesy of J.H. Taylor from data in J.H. Taylor and J.M. Weisberg 1989 and further unpublished updates.

図 24.4, Computation and graph courtesy of Lee Lindblom, California Institute of Technology.

図 24.5, Computation and graph courtesy of by Lee Lindblom, California Institute of Technology.

図 24.6, Prepared by Lee Lindblom, California Institute of Technology, from data in B. Harrison, K. Thorne, M. Wakano, and J.A. Wheeler 1965 and P. Glendenning 1985.

図 24.7, Computation and graph courtesy of Lee Lindblom, California Institue of Technology.

訳者前書き

書名となっている「重力」を目にすると，物理学を習い始めた人やすでに習って興味を失った人はよいイメージを持っていないと思われる．物理の授業で習った，重力加速度 9.8m/s^2 を使った自由落下や放物運動などの無味乾燥的な内容を思い出すのではないだろうか．さらに，こうした公式を授業の最初に無理矢理おぼえさせられて，それが壁となって物理が嫌いになってしまった人も多いと思う．

その一方で，物理学はわくわくするような対象を研究していることを見聞きし，期待して，物理学を学びたいと志す人は少なくない．特に宇宙に関して興味を引くものを挙げると，たとえば，ブラックホールやタイムマシーン，タイムワープ，ビッグバンなどかなり多い．また，宇宙の年齢が137 億年に決まった，すばる望遠鏡で最遠の銀河団が見つかった，ダークマターの分布が明らかになったなど，宇宙に関する話題はニュースで取り上げられる日も少なくない．

しかし，このような宇宙に関するトピックスはすべて，あの重力と大きく関係していると聞くと驚くとまではいかないが，おやっと思う人も多いのではないかと思う．

少し物理学を知っている人や物理学科の学部生なら，宇宙と重力は一般相対性理論によってつながっていることは聞いていたことはあるが，一般相対性理論を理解するには難しい数学をしなければならないことまで思いは巡るであろう．また，ここにも壁がある．

この壁を乗り越えるような道を与えてくれるのが，本書『重力（Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity)』である．書名の通り重力についてかなり包括的に書かれた大学学部生用の入門書である．著者はカリフォルニア大学サンタ・バーバラ校のハートル教授 (James B. Hartle) である．ハートル教授は学部生に 30 年近く一般相対性理論を教えてきた経験を持ち，それを凝縮させてできたのが本書である．一般相対論の教育への熱意は "Hartle,J. B. (2006). *Gerenal relativity in the undergraduate physics curriculum*, Am. J. Phys. **74**, 14" からも伺われる．

重力とは時空の幾何学に還元されるというのがアインシュタインの考えであり，その基礎理論は一般相対性理論である．当然，一般相対性理論を基礎として重力理論が述べられ，その応用がかなりの広範囲にわたり書かれている．

これまでの教科書では，まず曲がった時空を分析するための微分幾何学が立ちはだかり，この難しい数学が重力とどのようにつながるのかが明らかではない段階で，共変微分やテンソルの計算を習わなければならない．特に初学者に対しては苦痛であろう．せっかく，有名な相対性理論にアタックしてやろうという気持ちも萎えてしまう．しかし，本書では，通常の重力や一般相対性理論の教科書とは逆に，まず重力物理学が示され，その後にそれを記述する数学が導入されアインシュタイン方程式が求められる．著者が付録 D で強調しているように，物理を最初に！が本書のスローガンである．

本書は，難しい数学は計量と測地線だけに抑え，重力理論を味わってもらうことを意図してい

る．第 I 部では，重力物理学の概観と特殊相対論などの基礎的な物理を復習し，第 II 部で，計量と測地線が与えられたものとして，時空の性質を調べている．球対称星の幾何学から太陽系における相対論の検証，重力崩壊，ブラックホール重力波，さらに宇宙論まで扱っている．最小の道具だけでも，曲がった時空におけるテスト粒子や光線の運動を通じて重力物理学を幅広く探査できることを本書は証明しているのだ．最後に第 III 章でアインシュタイン方程式の導出とその応用を行っている．第 16 章で未導出のままであった重力波の方程式および相対論星の構造を扱っている．

第 24 章の「相対論星」は他の章に比べて特異であろう．この章では白色矮星や中性子星の構造を探っているのだが，物理の予備知識がかなり広範囲におよび難解である．この章で引用されている論文が著者によるものであることから，どうしても加えたかったのであろう．

本書を通じて重力理論を幅広く学んで頂けると思う．しかしながら，原書が教科書とはいえ，なにぶん 500 ページを超えるぶ厚い本なので，講義で使えたとしても十分時間がないこともあるし，興味をもって購入した読者にしてもすべてを知る必要のないこともあるだろう．その場合には付録 D の「コースの構成」にしたがって，興味のあるものに絞って読み進めていくことをお勧めする．

本書は，古典重力の教科書であるが，著者のハートルといえば，1980 年代の初めに量子宇宙論についてホーキングとの共同研究が話題になった．宇宙の「初期条件」として “無境界” 境界条件を採用し，量子的に宇宙を扱ったアイディアが突飛であったため，注目を浴びた．その研究にも触れてもらいたかったが，内容が難しく進展も遅い分野であり，量子論を予備知識としなければならないため，学部生向きの教科書では難しいであろう．今後に期待したい．

本書を刊行するにあたり，編集者の藤村行俊氏に御世話になった．お礼を申し上げたい．

訳者

ノート

本書を書くときに方針とした教育原理を付録 D に説明した．しかし，以下のノートは本書を読み進めるのに便利なものとなるだろう．

- **ボックス**
  ボックスには，本文の基本的内容を解説したり広げたりする内容がある．関連する現象やアイディアの定性的な説明であることもあるし，実験の定性的な解説であることもある．本書で仮定する基礎的な力学や特殊相対論の知識を超える物理学の知識を要求する説明となっていることもある．**本書を理解するためには，必ずしもボックスを理解する必要はない**．
- **問題**
  問題についている印には以下の意味がある．
  A= 他の問題よりも計算を多く必要とする．
  B= ボックスの考察を参照する．
  C= 他の問題よりも難問．
  E= 計算というよりもオーダーを評価する．
  N= 計算機を必要とする．
  P= 本書で期待される物理学の予備知識以上のものが必要とされる．例えば 電磁気学．
  S= 平易（著者の意見として）．
  印のない問題はふつうの問題で，本文を参照すればできる．難問ではない．
- ***Mathematica* プログラム**
  いくつかの *Mathematica* プログラムが，一般的な計量や軌道，宇宙論モデルで使われる曲率の量を計算するために使える．以下のウェブサイトからダウンロードすることができる．
- **ウェブサイト**
  本書について，最新の情報があるウェブサイトは翻訳時では

  `http://www.physics.ucsb.edu/~gravitybook/`

  にある．ここには誤植や *Mathematica* プログラムのファイル，補足的な議論（ウェブサイトの増補），カラーの絵，執筆時で有益なサイトのリンクがある．
- **記号**
  $\equiv$ 定義
  $\approx$ 近似的に等しい
  $\sim$ オーダーになっている
  $\rightarrow$ 漸近的に近づく
  $\odot$ 太陽
  $\oplus$ 地球

第 I 部

ニュートン物理学と特殊相対論における空間と時間

主な重力物理学の現象を手短に述べ，空間と時間の幾何学が物理学の問題であるという考えを紹介する．ニュートン物理学と特殊相対論の本質となる要素をレビューする．時空の幾何学を表すための道具を示す．

第1章

重力物理学

重力は4つの基本的な力のうちの1つである．重力の古典論，つまりアインシュタインの一般相対性理論（一般相対論）が本書の主題である．一般相対論はブラックホールやパルサー，クエーサー，宇宙の最終段階，ビッグバン，宇宙それ自身のような先端の宇宙物理学現象を理解するための中心的存在となっている．一般相対論は，惑星軌道がニュートンの法則からわずかにずれることにも関わっているし，ふだん使われているGPS（Global Positioning System：汎地球測位システム）の作動においても必要な要素となっている．基本的な力としての重力はすべての相互作用を統一する理論を探求するための中心的存在であり，これらの「最終理論」のアイディアの多くは一般相対論を起源としている．

したがって重力の物理学は2つ意味で先端科学である．その重要な応用が現代物理学で考えられている最も長い距離と最も短い距離の両方にまたがっている．大きなスケールでは重力物理学は宇宙物理学と宇宙論につながっている．小さいスケールでは量子物理学と素粒子物理学と結び付いている．2つの最先端はビッグバンで1つになる．そこでは現在において観測可能な宇宙全体が最小体積に圧縮されている．この入門書は**古典的**（非量子論的）重力理論を扱い，その直接の応用はほとんど大きなスケールに向けられるが，ここで進める考え方や方法は極端に小さい方の先端分野に別の装いをして再び現れる．この導入部で，古典的一般相対論が重要になる現象をいくつか眺めてみることにする．

一般相対論の起源は，1905年のアインシュタインの特殊相対性理論（特殊相対論）をきっかけに起きた概念的革命に遡ることができる．数世紀古いニュートンの重力法則は特殊相対論とは相容れない．ニュートンの法則にしたがうと，質量 m_1 と m_2 の2つの物体が

$$F_{\text{grav}} = \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{1.1}$$

の大きさの重力で互いに引き合う．ここで r_{12} は物体間の距離で，G は重力定数 $6.67 \times 10^{-8}\text{dyn} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$ である．ニュートン重力は瞬時に作用する．1つの質量にはたらく力は，同時刻におけるもう1つの質量の位置と関係する．しかし特殊相対論では瞬間的な相互作用を禁じている．特殊相対論ではどんな信号も光速より速く伝わることはできない．したがってニュートンの重力はより基本的な理論の近似にすぎない．

1915年のアインシュタインによる相対論的重力理論への探索は新しい力の法則や相対論的重力場の新しい理論が形成されることで決着がついたのではなく，我々のもつ空間と時間の見知に概念的革命を起こす形で結論がついた．アインシュタインは，空間と時間の4次元的統合，つまり**時空**

曲率を使うとすべての物体が重力場中で同じ加速度で落下するという実験事実が自然に説明されることを知った．質量は近くの時空を曲げ，すべての物体が落下するときにできる軌跡は，曲がった時空でまっすぐな経路になる．ニュートン理論では，太陽は地球に重力を及ぼし，地球はその力に反応して太陽の周りを運動する．一般相対論では，太陽の質量によってその周りの時空が曲がり地球は曲がった時空中をまっすぐ運動する．重力は幾何学なのだ．

この章の残りでは，一般相対論を理解するのに重要な現象のうち，宇宙に起きるものをいくつか紹介する．どんなとき重力が重要になるのかを理解するのに役立つ特徴がすでにニュートンの重力法則 (1.1) からうかがえる：

- ニュートン理論で重力はすべての質量間にはたらく普遍的な相互作用であるが，相対論的重力理論で重力は $E = mc^2$ の関係があるためにエネルギーのあらゆる形態の間にはたらく相互作用である．
- 重力は遮ることができない．正の重力源を打ち消すような負の重力源は存在しないので，遮断できない．重力は常に引力である．
- 重力は長距離相互作用である．ニュートンの法則は $1/r^2$ の形の相互作用である．核力の強い相互作用と弱い相互作用にあるような，相互作用の範囲を決める長さのスケールは重力では存在しない．
- 実験できるエネルギースケールで重力は個々の基本粒子間にはたらく 4 つの基本的な相互作用の中で最も弱い．距離 r 離れた 2 つの陽子間に作用する電磁気的反発力に対する重力の比は
$$\frac{F_{\mathrm{grav}}}{F_{\mathrm{elec}}} = \frac{Gm_p^2/r^2}{e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)} = \frac{Gm_p^2}{(e^2/4\pi\epsilon_0)} \sim 10^{-36} \tag{1.2}$$
である．ここで m_p は陽子の質量で，e はその電荷である．

これら 4 つの事実から重力が物理学で果たしている役割のうち多くを説明できる．例えば，重力は弱いけれども，なぜ重力が宇宙物理学や宇宙論における最も大きなスケールで宇宙の秩序を支配しているのか説明できる．宇宙の距離スケールは，強い相互作用と弱い相互作用がはたらく素粒子の領域をはるかに超えている．大きなスケールの物体が正味の電荷をもっていれば，電磁相互作用は長距離に及ぶであろう．しかし宇宙は電気的に中性であり，電磁気力は重力よりも強すぎるため，どんなに大きなスケールで正味の電荷が存在していても即座に中性化されてしまう．重力は大きなスケールにおいて宇宙の構造を支配している．

本書では重力が重要になる現象すべてでなく，**相対論的**重力が重要になるような現象を扱う．例えば，太陽の内部構造を理解するにはニュートン理論で十分である．相対論的重力が重要になるのは，質量 M と大きさ R の物体が光速 c とつくる特徴的な無次元量
$$\frac{GM}{Rc^2} \tag{1.3}$$
が 1 に十分近いときである．図 1.1 は宇宙の現象および M と R の特徴的な範囲を表している．$2GM = c^2R$ の直線に最も近いものは相対論的重力が最も重要になる現象である．それではもう少し詳しく述べることにしよう．

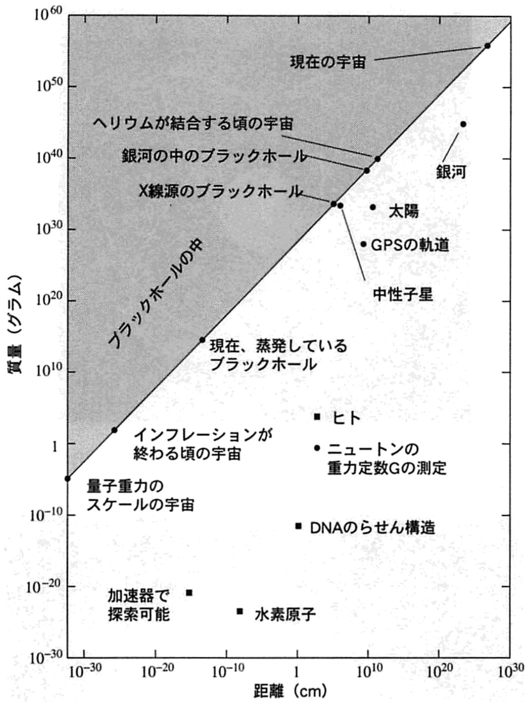


図 1.1　重力物理学は，ミクロから宇宙までの距離と質量のスケールの幅広い現象を扱う．現代物理学で考えられる最も大きなスケールを扱っている．この範囲全体にわたって重力が重要となる現象があり，それを特徴的な質量 M と特徴的な距離 R について示した．その代表的なものは●で示してある．重力があまり関係していない他の現象は■で表してある．対角に走る線より上の現象は，ブラックホールの内部で起きるため観測できない．対角線 $2GM = c^2R$ に近い現象は相対論的重力が重要になる．最も大きなスケールは宇宙物理学の最前線であり，最も小さいスケールは素粒子物理学の最前線である．最も小さいスケール（$\sim 10^{-33}$cm）はプランク長さであり，これは古典重力と量子重力の境界である．宇宙の歴史の中のいろいろな瞬間で宇宙スケールと言われるものは，光がビッグバン以来やってきている体積のスケールであり，その瞬間に宇宙の膨張率がいつも同じであったとしたときの体積に含まれる質量のスケールである．

太陽系の正確な重力

(1.3) 式によると，地球は相対論的な系ではない：$GM_\oplus/c^2R_\oplus \sim 10^{-9}$（天文学の記号では $\oplus$ で地球を表す）．しかし GPS の中心部にある時計にはそのような正確さが必要とされる（図 1.2）．一般相対論的効果が GPS の作動に考慮されなければ 30 分ほどで正しくはたらかなくなる（第 6 章）．

太陽（$\odot$）では $GM_\odot/c^2R_\odot \sim 10^{-6}$ である．したがって，惑星軌道上で一般相対論の効果は小さいが，正確な観測を行えば検出可能である．例えば，水星が太陽に最も近づいたとき軌道のずれが生じるが，ずれの正確な計算値は一般相対論の検証のために使える．一般相対論は，太陽の近く

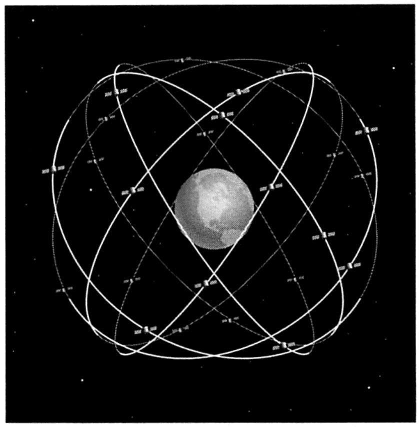


図 1.2　GPS（汎地球測位システム）の人工衛星の配置．GPS では一般相対論の小さな効果が重要となる．

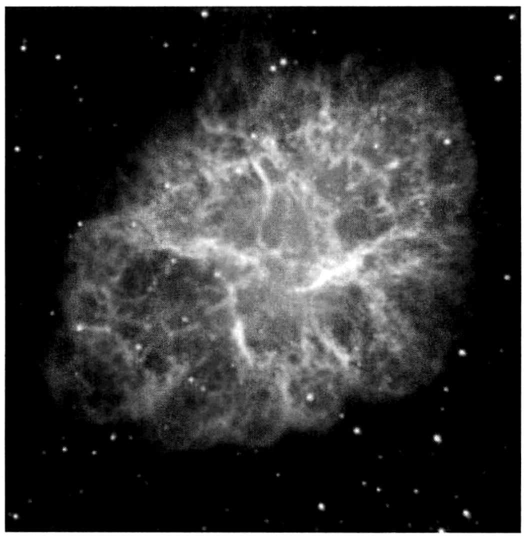


図 1.3　カニ星雲．西暦 1054 年地球に光が届いた超新星爆発の残骸．星雲は，中心で自転する相対論的中性子星からエネルギーを供給されている．

を通過するとき光の経路が曲げられること，その通過時間がニュートン理論で予測されるものよりも大きくなることを予言する．この 2 つの小さい効果は今日の正確な天文観測に常に具体的に採り入れられている（第 10 章）．

相対論星

ほとんどの星は常に存在する重力に対抗して，中心の熱核反応で生じた熱がガスの圧力を高め，自身を支えている．星の熱核反応の燃料が尽きたとき重力崩壊が起きる．崩壊中の星のコアは結局

は非熱的圧力源によって支えられることになり，非常にコンパクトな白色矮星や中性子星ができる．中性子星は 1 太陽質量のオーダーの質量と 10km のオーダーの半径をもつが，$GM/c^2R \sim 0.1$ の相対論的な物体であり，その性質は第 24 章で考察する．中性子星と白色矮星の質量には最大値があり，太陽質量の数倍となる．より重いコアが崩壊するとブラックホールが形成される．

ブラックホール

表面での重力が強過ぎてどんなものも，光ですら脱出できないほど圧縮されて小さい体積になると，ブラックホールが必ずできることを一般相対論は予言している（第 12 章，第 15 章）．ニュートン力学では，半径 R で発射された質量 m の粒子は，初期速度 V が脱出速度 V_{escape} より大きいと，質量 M の重力による引力から脱出できる．V_{escape} は運動エネルギーと負の重力エネルギーがつり合う速度のことであり

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{escape}}^2 = \frac{GmM}{R} \tag{1.4}$$

を満たす．脱出速度は

$$\frac{2GM}{c^2R} > 1 \tag{1.5}$$

のとき光速を超える．ニュートン的分析は相対論的な状況では適用できないが，(1.5) 式は球形の質量が大きさ R のブラックホールであるための正しい相対論的判断基準である．

ブラックホールを定義する表面は**事象の地平**と呼ばれる．質量や情報，観測者が落下して通り過ぎると，古典物理であるが，何ものもそこから抜け出すことができない．本来，ブラックホールはゴタゴタした重力崩壊から形成されるものだが，一般相対論では著しく単純な物体であり，たった数個の量で特徴づけられると予言される．チャンドラセカールはこう言っている「自然界にあるブラックホールは，宇宙に存在するものの中で最も完全な巨視的物体であり，その構成において基本

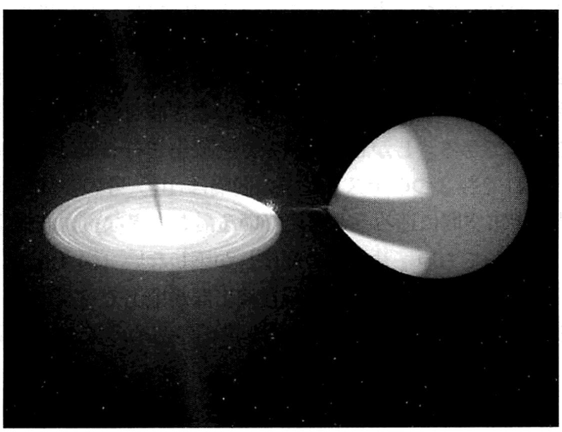


図 1.4　X 線連星 GRO J1655-40 のシミュレーションのイメージ．右の重い星が（見えない）ブラックホールの周りを回転し，質量を供給している．質量はブラックホールに向かって落下し円盤を形成し，非常に高温になり X 線を放射している．

的な要素と呼べるものは，我々のもつ空間と時間の概念である．一般相対論にはそれらを記述する解として一意的な族しかないので，ブラックホールは最も単純な物体でもある」（Chandrasekahr 1983）

太陽質量の数倍のブラックホールは，伴星を回る軌道で発見されてきた．約 10 億太陽質量までの超重量ブラックホールが銀河中心で発見されている．我々の天の川銀河の中心には，約 30 億太陽質量のブラックホールがある．実際，執筆時点で，**すべての**十分重い銀河のコアにブラックホールがあるという証拠が増えて続けている．

ブラックホールはそれ自身暗いけれども，その周りの時空は強く曲げられ，現代の宇宙物理学において最も劇的な現象が起きている舞台となっている．ブラックホールに落ちていく物体はその周りの軌道に進み，熱い円盤をつくり出し X 線源となっている（図 1.4）．磁化された物体が回転ブラックホールに流れると，クエーサーの発電所となる．ブラックホールはおそらくガンマ線バーストの原因となっているであろう．ガンマ線バーストではビッグバン以来の最も大きな爆発が起きている（ブラックホールの発見と宇宙物理学的な重要性は第 13 章のテーマである）．

重力波

一般相対論では，時空曲率のさざ波が真空中を光速で，光とは違った風に伝わることを予言している．このさざ波が**重力波**である（第 16 章）．質量が非球対称で非直線的な運動をすると，常に重力波を放出するが（第 23 章），2 つのコンパクト星の合体や重いブラックホールの合体，ビッグバンのような事象で最も多く発生する．質量は宇宙のいろいろなところで運動しており，電荷の重力的類似性によれば，重力波は遮蔽（スクリーン）されない．そのため宇宙は重力波で特別暗いわけではない．実際，衝突中の銀河中心で合体するブラックホールは宇宙の事象の中で最も強いエネルギーを重力波として放出しているであろう．物質と弱く結合すること（前記の (1.2 式)）から，重力放射は検出が難しい．しかし，この弱い結合が重力放射の検出を非常に面白くしている．一度作られればほとんど吸収されないため，重力波によって宇宙に新しい窓が開かれ，ビッグバンの初期の瞬間やブラックホールの形成の核心をかいま見せてくれることだろう．

重力放射は地上では直接受信できていないが，放射を放っている物体が軌道に及ぼす影響を調べることによって検出されている．重力波は，時空曲率のさざ波を作っている質量の相対運動を正確に測定することよって検出できる．しかし，連星系から放出される波は地球にやってくる最も明るい重力波をつくるが，それでも 2 つのテスト粒子の間隔は 10^{20} 分の 1 オーダーの割合しか変わらない．これは，執筆時，宇宙空間に造ろうと考えている最も大きな重力波検出器は 500 万 km に及ぶ長さの腕であるが，実現しても原子サイズの変化しか感じない（図 1.5）．

それと同じくらいの実験的取り組みとして，現在検出器が地上で建設中で，宇宙空間で観測することに備えた研究が続いている．それを使えば，21 世紀の初めの数十年で重力波天文学が実現可能になるであろう．

宇宙

初めに述べたように，重力は空間と時間の最も大きなスケールで，宇宙の構造と進化を支配している．それらは**宇宙論**の領域である（第 17–19 章）．

銀河の運動の観測から，我々の宇宙が膨張していることがわかっている．銀河分布のもっとも大

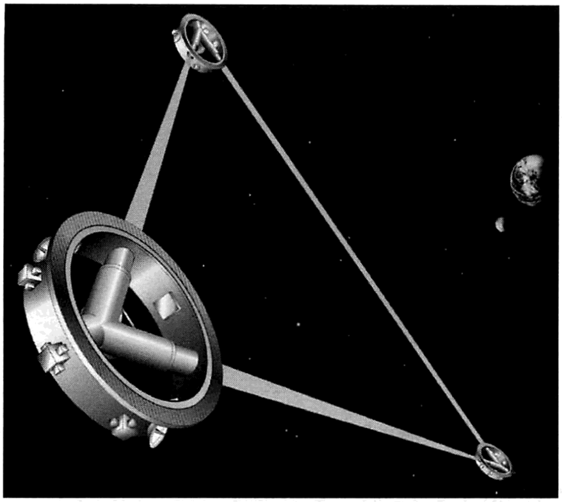


図 1.5　宇宙空間の LISA 重力波干渉計を芸術家が描いた概念図．レーザービームによって宇宙空間で 500 万キロ離れた 3 つの検出器がつながっている．検出器間に生じる小さな距離の変化を観測するにより重力波が検出できる．

きなスケールの観測から，我々の宇宙は現在では著しく規則正しいことがわかっている．つまりすべての場所，すべての方向において平均的にかなり等しい．ビッグバンで生じた宇宙背景放射の観測から，宇宙が初めからかなり規則正しいことがわかっている．一般相対論は，このような規則正しい宇宙で空間幾何学にどのような曲がり方が許されるのかを予言する．相対論は時間における宇宙の進化も支配しており，それにしたがえば宇宙の未来だけでなく起源と歴史も理解できる．

一般相対論と現在の観測から宇宙がビッグバンから始まったことが推測できる．ビッグバンは，宇宙が無限の密度と無限の圧力，無限の空間曲率になっていた特異な瞬間である．極端な量になっていたのだが，ビッグバンは極端に規則正しかった．実際，厳密な一様性からの唯一のズレは物質密度のごく小さな量子揺らぎだった．それが，のちに重力のもとで集まり，結局現在我々の見ている星や銀河となっている．宇宙の大きなスケールに表れているたくさんの性質は，宇宙初期における重力相互作用や素粒子物理学の結果から説明される．初期宇宙で，現在では大きなスケールとなっている物質分布の種を蒔くことに加え，物質に対する反物質の量，物質に対する電磁波とニュートリノ，重力放射の量，元素の原初量が固定された．

量子重力

本書は古典重力を扱っているので，重力物理学の重要な現象を探査する中で量子時空は 1 ヶ所だけ（第 13 章）で触れることになるだろう．プランク定数 $\hbar$ はすべての量子現象を特徴づける．量

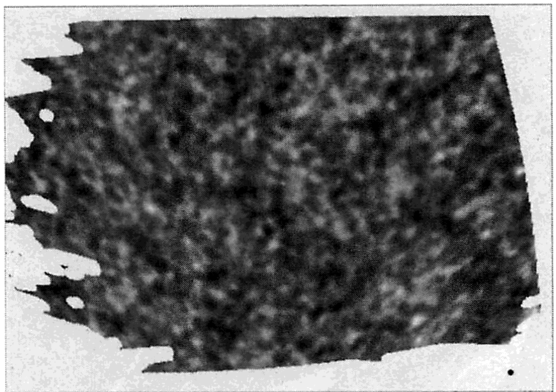


図 1.6　ビッグバン以後数十万年経った宇宙の写真．ブーメラン実験（Boomerang experiment）によるこの図は，宇宙背景放射の温度揺らぎを表しており，これは後に銀河へと成長する宇宙の不規則性に対応する．濃いところと薄いところの温度差はミリケルビンのオーダーである．

子重力現象は，$\hbar$ と G と c を組合せてつくる一意的な長さと時間，エネルギー，密度の次元の量

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{Pl}} &\equiv (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33}\mathrm{cm} \\ t_{\mathrm{Pl}} &\equiv (G\hbar/c^5)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44}\mathrm{s} \\ E_{\mathrm{Pl}} &\equiv (\hbar c^5/G)^{1/2} = 1.22 \times 10^{19}\mathrm{GeV} \\ \rho_{\mathrm{Pl}} &\equiv c^5/\hbar G^2 = 5.16 \times 10^{93}\mathrm{g/cm^3} \end{aligned} \tag{1.6}$$

によって特徴づけられる．これらはそれぞれプランク長，プランク時間，プランクエネルギー，プランク密度と呼ばれる．アインシュタインの古典重力理論はもはやこれらのスケールで特徴づけられる現象には適用できない．時空の古典幾何学中に大きな量子揺らぎ現れると予想されるからである．このような状況ではアインシュタインの理論を，一般相対論が古典的極限となる重力の量子論に置き換える必要がある．

(1.6) 式をふと目に留めただけでも，量子的空間と時間が重要となる範囲が日常生活や身近な経験からかなり離れていることがわかる．我々の知る限り，宇宙にはプランクスケールが実感できる場所が 2 つだけある．それは，宇宙の始まりであるビッグバン（第 17–19 章）とブラックホールの量子的蒸発（第 13 章）である．しかし，量子重力は現代物理学の 2 つの最前線の前に立ちはだかっている．第一は重力を含む基本的相互作用の統一理論の追究である．その理論の単純さは E_{Pl} の高いエネルギースケールで現れるであろう．第二は宇宙の量子的初期条件の追究である．初期宇宙，ビッグバンでは大小のスケールが 1 つだった．最も大きなスケールは小さなサイズに圧縮され，最も大きなエネルギーに達する．量子重力は本書では考察しないが，ここで述べられる重力の古典論は現代物理学の最前線を理解するための大前提となる．

第 2 章

物理としての幾何学

本書は空間と時間，重力について書かれている．なぜなら（第 1 章で手短に述べたように）**時空**（時間と空間の 4 次元的統合）の曲率によって重力が生じるということが一般相対性理論のアイディアの核心となっているからである．この章では重力が幾何学であるというアイディアをもう少し進め，さらに時間と空間の幾何学がどのように物理学の実験と理論の対象になるのかを述べる．

2.1　重力は幾何学だ

一様重力中ですべての物体は，その組成と無関係に同じ加速度で落下するという実験的事実がある．もしガリレオが真空中でピサの斜塔から大砲球と羽を落としていたなら，地上に向かって 980cm/s^2 で加速していったであろう．この加速度の同値性は物理学におけるもっとも正確に検証された事実の 1 つである．例えば，執筆時に地球と月が太陽に向かって落下する加速度は 1.5×10^{-13} の精度で等しいことが知られている（12 ページのボックス 2.1，さらに詳しくは第 6 章を見よ）．この実験事実は一般相対性理論の土台となっている．

図 2.1 はボールを地上からまっすぐ上へ投げたとき，高さを時間の関数として描いたグラフである．ボールはある初速度で投げられ，減速し，最高点に到達し，下方に加速し，地上に戻る．他のどんな物体も同じ位置から同じ初速度で上に投げられれば，**厳密に同じ曲線**を描くであろう．

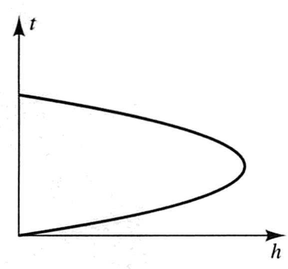
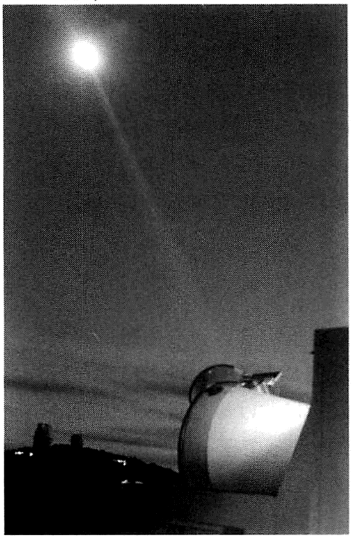


図 2.1　B 地表からある初期速度，重力加速度 $g = 980\text{cm/s}^2$ で投げ上げられたボールが最高点に達し地球に戻っている．図は，特別な初期速度に対して時間 t と高さ h で表した典型的な双曲線を示している．時間軸を縦軸にとるという，相対論で標準的な描き方を採用している．同じ初期速度で投げ上げられたどんな物体も時空曲線を描く．アインシュタインの一般相対論では物体は地球の質量によって生じた曲がった時空内を直線経路にしたがって運動する．

ボックス 2.1　重力場中の加速度の等価性の月レーザー測距

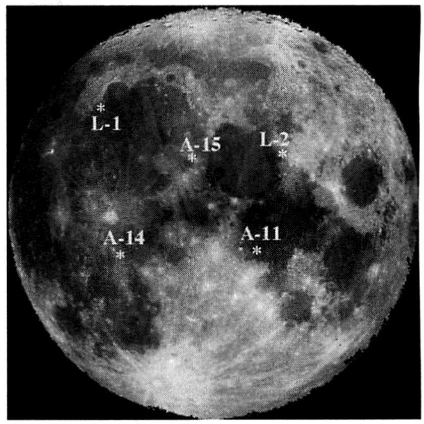
重力中ですべての物体が同じ加速度で落下するという事実を今のところ最も正確に検証しているのは，地上の実験室においてではなく，太陽の周りでともに落下している地球と月の加速度を比較することである．結果は 1.5×10^{-13} 以下の誤差の中にある（Williams et al. 1996, Anderson and Williams 2001）．



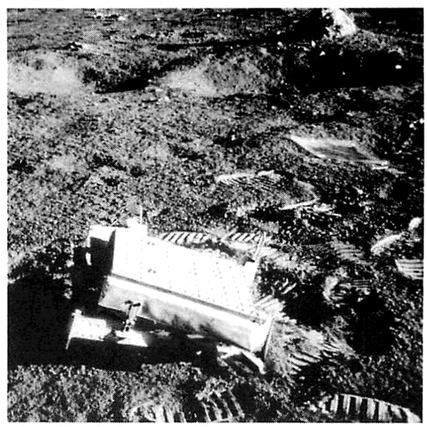
マクドナルド天文台で送られる月へのレーザーパルス

レーザーパルスを月に送り，月面上の反射鏡によって地球に戻されるまでの往復時間を測定する時間内で，地球に対する月の位置がどのように変化するかを非常に正確に調べることで検証された．これは**月レーザー測距法**（lunar laser ranging）と呼ばれる．現在，月までの距離は地球と月の平均距離 384401km のうち数センチの精度で決められている．つまり，10^{10} の 1 の精度となる．

これらの測定のカギは，コーナーキューブ逆反射鏡にある．この装置の幾何学には，どんな入射光線がどんな方向から来ようとも，来た方向に反射されるという便利な性質がある（問題 1 を見よ）．1969 年と 1971 年のアポロ 11 と 14, 15 は月面のいろいろな位置に 100 から 300 配列のコーナレフレクタを置いてきた．ロシア–フランス配列が 1973 年無人宇宙船ルノホート 2 号（Lunakhod II）によって置かれた．1969 年以来，月の軌道をこれらの機器を使って決める系統的な計画が，主にテキサス州のロック山のマクドナルド天文台とフランス，グラースのコート・ダジュール天文台で行われている．レーザーは現在 200 ピコ秒持続するパルスを 1 秒間に 10 回送っている．各パルスには 10^{18} 個の光子がある．大気中の回折や屈折やその他の効果により，ビームは月面で半径 7km に広がり，その結果送った光子のうち 10^{-9} だけが逆反射鏡に当たる．戻ってきたときには反射点は 20km に広がり，1m の望遠鏡でも反射された光子のうち 10^{-9} だけしか検出できないであろう．結局，数秒ごとに反射光子 1 個が検出される．戻ってきた光子は 1970 年以来執筆時までの 30 年以上検出され続けている．



逆反射鏡の位置



月面の逆反射鏡

空間と時間において一意的に決まる軌道上を運動するのは重力の特性である．磁場中の物体の運動はもっている電荷の種類によって違う．ある電荷をもった物体はある方向に曲げられ，それと逆符号の電荷をもつ物体は別の方向に曲げられるだろうし，電荷のない物体は全く曲げられないだろう．唯一重力中でだけ，同じ初期条件をもったすべての物体が空間と時間の中で同じ曲線にしたがう．

アインシュタインのアイディアは，この経路の一意性が**時空**と呼ばれる空間と時間の 4 次元統合体の幾何学によって説明されるというものであった．特に，地球のような質量の存在により近くの時空幾何学は曲がり，そして，他にどんな力もはたらかないとき，すべての物体はこの曲がった時空中をまっすぐ進むことをアインシュタインは提案した．力から解放された物体はニュートン力学の 3 次元ユークリッド空間をまっすぐに運動する．これはニュートンの第一法則の一部分である．アインシュタインのアイディアは，地球が太陽の周りの軌道上を運動するのは太陽によってつくり出されるわずかな時空の非ユークリッド幾何学中をできる限りまっすぐな経路にしたがっているからで，重力が作用するためではないとするものである．

2.2 幾何学の実験

1820 年代後半に偉大なる数学者ガウス（C. F. Gauss）が空間のユークリッド幾何学の標準定理の 1 つ，三角形の内角の和が 180° であるという定理を確かめるために実験を行ったという話がある．ホーヘンハーゲン（Hohenhagen）とブロッケン（Brocken），インゼルベルク（Inselsberg）の山頂を頂点として使い，光線が直線上を進むという仮定のもとで，ガウスは角度を測り，和をとって，角度が測られた精度で 180° であることを確かめたと言われている（図 2.2 を見よ）．

歴史的証拠からではガウスが本当にこの実験をしたかどうかは定かではない．だが，ガウスはそうしたかもしれないし，またそのことは，論理からだけでは角度の和が 180° であることを保証できないという重要なことを強調している．物理空間の多くの幾何学がユークリッドと違う可能性がある．そうであれば，三角形の内角の和を測定した結果が 180° と違うことが予測される．空間の幾何学は実験で確かめなければならない問題だ．これは物理学の問題であり，測定と仮説，検証が必要である．この本を読み終えるまでにガウスの実験について知るだろう．ガウスが十分な精度で実験を行えていたならば，地球の質量 $M_\oplus$ によって生じる内角の和の小さな差が，太陽と他の惑星の影響とともに

$$\left|\begin{pmatrix}\text{ラジアン単位での}\\ \text{三角形の内角の和}\end{pmatrix}\right| - \pi \sim \frac{\text{三角形の面積}}{R_\oplus^2}\left(\frac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2}\right) \tag{2.1}$$

のオーダーであることを発見していたであろう．比 GM/Rc^2 の形になっていることに注意すること．これは第 1 章で議論したように弱い相対論的効果の特徴である．山頂間の距離は 69km, 85km と 107km である．これらを使って，この計算を実行すると差が 10^{-15} ラジアンのオーダー（！）であることがわかる．これほど小さい差は現在の技術を持ってしても検出不可能であろうが，しかし現在の実験では太陽によって作られるユークリッド幾何学からのずれを検出でき，宇宙論の非常に大きなスケールにおける空間幾何学を測定することができる（ボックス 2.2 を見よ）．

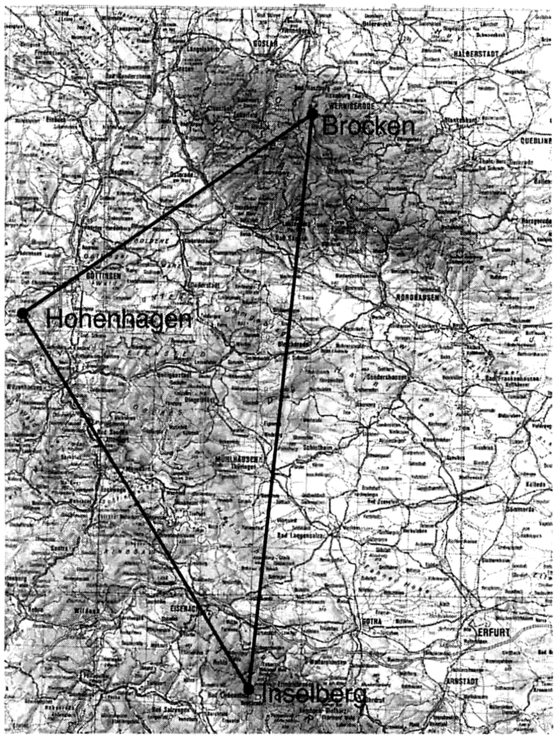


図 2.2　ホーヘンハーゲン (Hohenhagen) とブロッケン (Brocken), インゼルベルク (Inselberg) の山頂の位置を示すドイツの現代地図．山頂の位置は，ガウスが三角形の内角の和が 180° (ユークリッド幾何学では 180°) であるかどうかをチェックするために用いた三角形の頂点に対応する．

2.3　いろいろな幾何学

いろいろな幾何学のアイディアは 2 次元の場合には容易に説明できる．平面のユークリッド幾何学を学んだとき，点や直線，距離，平行，三角形，円，弦などに出会った．よく知られた理論には三角形について，ちょうど今考察されたものが含まれている:

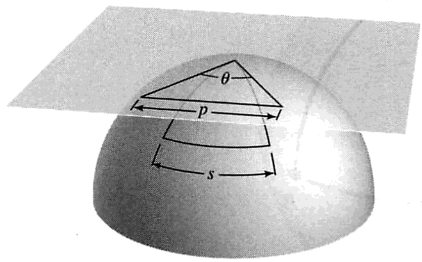
$$\sum_{\text{頂点}} (\text{内角}) = \pi \tag{2.2}$$

他にも円の半径と円周の比には関係がある:

$$\frac{(\text{円周})}{(\text{半径})} = \frac{C}{r} = 2\pi \tag{2.3}$$

球面は 2 次元幾何学の**別の**例になり，ここでは平面幾何学の結果が別の定理に置き換わる．直線は球面上で，2 点間の距離が最も短い線として定義できる．つまり，大円の一部である．三角形は

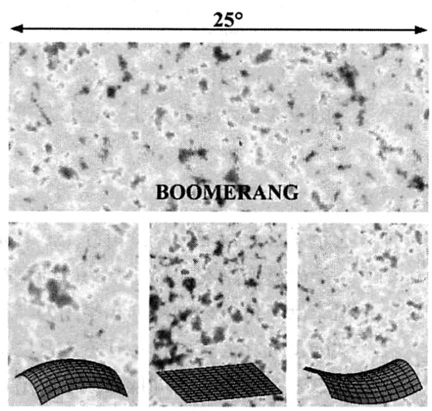
ボックス 2.2 宇宙の空間幾何学の決定法



現代の測定法はガウスが行ったとされるものとそう違わず，見える宇宙の中で遠い距離スケールにわたる空間曲率を決めることができる．第 18 章で詳しくみるように，一般相対性理論に加え，宇宙における銀河と放射の分布の観測から，時間のある瞬間では 3 次元空間の大きなスケールの幾何学にはいくつかの可能性しかないことが示唆される．平面の平坦幾何学，正に曲がった球面の幾何学，局所的にはポテトチップスの表面のように負に曲がった幾何学があり，平坦，正曲率，負曲率の場合の 3 次元空間の幾何学に対する拡張になっている．我々の宇宙の空間幾何学はどうやったら測定することができるのだろうか．

1 つの方法を少しだけ理解するために（実際の宇宙は膨張しているのだが，宇宙の幾何学と対照的に）時間を固定した空間幾何学を想像しよう．さらにサイズ p の既知の物体が既知の距離 d にいくつか存在することが判明したと想像しよう．もし幾何学が平面のように平坦だとすると，これらの物体の張る角度 θ は p/d となるであろう．しかし，このボックスの図が示しているように，幾何学が球のように正に曲がっていれば，それより小さい大きさ s の物体と同じ角度を張ることになる [a]．別の言い方をすれば，同じ大きさで離れている物体は平坦にあるときよりも，球面のような正の曲面にあるときの方が，大きな角度を張る（問題 6）．同様に，負の曲面内で張る角度は小さくなる（詳しくは問題 18.12 を見よ）．この考察は第 19 章の宇宙膨張を考慮すれば，修正しなければならないであろうが，定性的な結果は同じである．大きさと距離がわかっている物体の角度サイズを測定することは，その間に横たわる空間の幾何学が平坦か，正曲率，負曲率なのかを決める 1 つの方法である．宇宙背景放射にはこのような特質が備わっている．

宇宙背景放射（Cosmic Micro Background radiation, CMB）はホットビッグバンからの光である．宇宙が膨張し冷え，物体が放射に対して十分透明になった瞬間に放たれた光である．それはほぼ 140 億年をかけて自由に進み我々のところまで到達している．宇宙が時間的に変わらないとすると，ほぼ 140 億年をかけてやってきていることになる．放射の温度は 2.73K にまで冷え，すべての方向でほぼ同じである．まったく同じというわけではなく，10 億分の 1 度程度の小さな温度揺らぎが観測されている．これらの揺らぎの起源を説明する理論から長さのスペクトルを予言できる．それには揺らぎを特徴づける長さスケールが存在する．したがって揺らぎは遠くにある既知の大きさのスペクトルを形成する特徴的なスケールになる．よって角度サイズを観測すれば宇宙の空間幾何学を測定することができる．下の図はブーメラン実験（de Bernardis et al. 2000）によって観測された天球の幅 25° の領域における温度揺らぎのマップを示している．下の 3 つの図は，幾何学が正に曲がっている（左），平坦（真中），負に曲がっている（右）場合について，理論的に求められたもともとのサイズのスペクトルに基づいて，マップがどのように見えるかをシミュレーションしたものである．角度スペクトルを定量的に比較すると，幾何学は非常に平坦に近いことが示される（近い将来，より正確な結果が得られるだろうが，基づいている考えは同じになるだろう）．空間幾何学は測定可能で，物理の問題である．



[a] 図について考えてもよくわからないなら，球がゴムでできていて，北極に接する平面にはいつくばっていると想像せよ．北極における経線の角度は変わらないが，赤道と緯度線は引きのばされなければならない．よって球面上の経度の範囲を張る物体を見込む角度は平面でより大きな物体の張る角度と同じである．

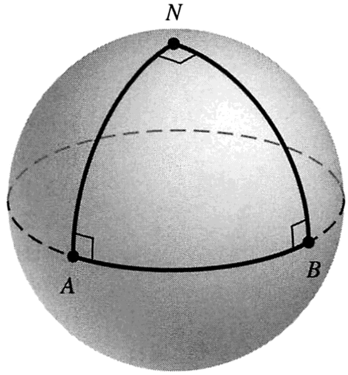


図 2.3　内角の和が 270° である球面三角形 NAB. 三角形は，北極で 90° の角度で交わる緯度線を 2 辺とし，これらがぶつかる赤道の区間からなっている．これらはすべて大円の一部であり，したがって球面幾何学では直線である．

3 つの大円が交差したものからできている．円は，(球面上で測定したとき) 中心から等距離にある点の軌跡である．こういったものがある．面積 A の球面三角形に対し

$$\sum_{\text{頂点}} (\text{内角}) = \pi + \frac{A}{a^2} \tag{2.4}$$

が成り立つ．ここで a は球面の半径である．

(2.4) 式は，球面三角形の内角の和が常に π よりも**大きい**ことを示している．例を図 2.3 に示した．三角形の大きさが曲率半径 a に比べて小さくなればなるほど，平面と曲がった球面の差を区別するのが難しくなっていく[1]．小さい面積 ($A/a^2 \ll 1$) のとき，平坦空間の結果 (2.2) は (2.4) 式のよい近似になっていく．

図 2.4 に示したちょっとした幾何学を使って，球面上の円の半径に対する円周の比を計算すると

$$\frac{(\text{円周})}{(\text{半径})} = \frac{C}{r} = 2\pi \frac{\sin(r/a)}{(r/a)} \tag{2.5}$$

を示すことができる．再び，$r \ll a$ ならば，右辺は平坦空間の結果 (2.3) に帰着する．

その幾何学を決めるために地表を離れる必要はない．地表上で作業を行う (ガウスのような) 測量士は三角形の内角の和や円の半径と円周のようなものを測定することができる．(2.4) 式や (2.5) 式のような公式に合わせることによって，原理的に表面の幾何学が球面かどうかを知り，a を決めることができる．同様に，3 次元で測量することによって，原理的にどんな余分な次元も必要とせず，空間の幾何学を決めることができる．

3 次元の曲がった幾何学を視覚化しようとしても，2 次元ほど簡単ではない．2 次元の曲がった幾何学はユークリッド 3 次元空間中の面としてよく表される．だが，ある単純な 3 次元幾何学は，

[1] (2.4) 式を (2.1) 式と混同してはいけない．(2.1) 式は，地球を取り囲む 4 次元の曲がった時空中を進む光線がつくる三角形に対して成り立つ式である．それは一般相対論にしたがっている．(2.4) 式は，2 次元球面状の大円の一区間をなす三角形についての式である．

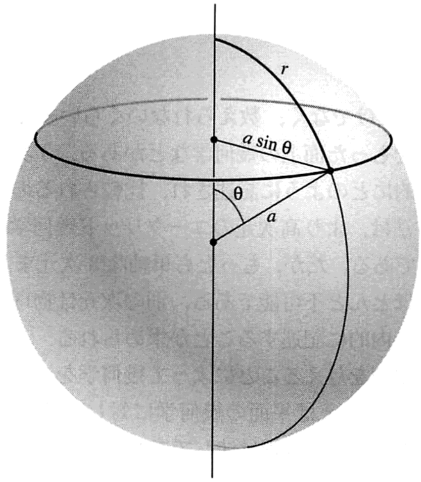


図 2.4 球面の幾何学における円の半径と円周の関係．円は（面上で測ったときの）中心から等距離にある面上の点の軌跡である．θ の値を固定すると緯度線によって円ができるが，この図で北極は円の中心に一致するように選ばれている．半径 r は北極からこの緯度までの距離であり，経度が一定の線に沿って測れば同じになる．

仮想上の 4 次元ユークリッド時空中の曲面として考えることができる．例えば，すでに考察したような 2 次元曲面の拡張として，3 次元幾何学は 4 次元中の 3 次元球面である．もし空間が 3 次元球幾何学ならば，直線上をどの方向に旅行しても，結局は出発点に戻ることになるだろう．空間の幾何学のより詳しい情報は局所的に決められる．例えば，空間幾何学のようなものの中で半径 r の 2 次元球面の体積は

$$V = 4\pi a^3 \left\{ \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r}{2a}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2} \right\} \tag{2.6a}$$

$$\approx \frac{4\pi r^3}{3}\left[1 + \left((r/a)^2 \text{ オーダーの補正}\right)\right] \qquad r/a \text{ が小さいとき} \tag{2.6b}$$

であることがわかる[2]．ここで，a は 3 次元球幾何学の曲率の典型的な半径である．(2.6b) 式で示したように，半径が a よりもずっと小さい 2 次元球では，体積と半径の関係はユークリッド平坦空間の結果に近づく．もし 3 次元空間が 3 次元球幾何学のようであれば，2 次元球の半径と体積を十分慎重に測定すれば，曲率の特徴的な半径 a は決められる．第 18 章で発見することになるが，アインシュタインの理論はこの 3 次元球を大きな距離スケールで一様宇宙の空間幾何学の 1 つの可能性として予言する．15 ページのボックス 2.2 にはこれらのスケールで空間を測量する努力を記述した．

---

[2] この結果は例 7.6 で明確に導出されるだろう．

2.4　幾何学を決める

2 次元幾何学には平面と球面だけでなく，数えられないくらい多くの幾何学がある．例えば，卵の表面の幾何学，いくつか丘をもった面上の幾何学などがある．3 次元でも同様に無限に幾何学がある．これらの幾何学は数学的にどのように記述され，比較されるのだろうか．

幾何学を比較する 1 つの方法は，より高次元のユークリッド幾何学中の面として（平面，球，卵形などとして）埋め込むことである．だが，もっとも単純な 3 次元または 4 次元面を 4 次元や 5 次元中の面として考える以外，ほとんど不可能である．別の次元は物理的に不必要だ．測定可能な物理的次元だけを使って幾何学を**内的に**記述することが求められる．

他にも，少ない数の**公理**や要請を与えることによって幾何学を決め，それらから結果を定理として求めるという考え方がある．たとえば平面の幾何学に対してはユークリッドの 5 つの公理がある．2 点から一意的に直線が決まる，平行線は決して交わらない，などである．他にも単純な幾何学は同じようにそれぞれの公理によって特徴づけることができる．たとえば，球面の幾何学では，ユークリッド幾何学の平行線の要請が，2 つの平行線は**必らず** 2 点で交わるという公理に置き換わっているように，公理の集まりとしてまとめることができる．だが，この方法にも制約がある．じゃがいもの表面上の幾何学をどんな公理で記述することができるのだろうか．我々はより局所的で詳しい記述法を必要としている．

幾何学を一般的に記述するための重要な点は，微積分を使って，すべての幾何学を互いに近い 1 組の点の間の距離に集約することである．互いに近い（無限小離れた）2 つの点を結ぶ曲線に沿って測った距離は積分によって求められる．直線とは 2 点を結ぶ最短の曲線である．半径が小さいとき，角度は半径に対する弧の長さの比である．面積や体積，その他は，それ自身が互いに近い 2 点間の距離である面積素や体積素による多重積分によって構成できる．互いに近い 2 点間の距離を決めること及び微分や積分を使うことにより，最も一般的な幾何学が決められる．数学のこの分野は**微分幾何学**と呼ばれる．次節でこの題材について少しだけ調べてみることにする．

2.5　座標と線素

平面のユークリッド幾何学

点を決める 1 つの系統だった方法は近傍の点との間の距離をあらかじめ決めておくことである．座標系は各点に一意的に番号を付けるが，それにはたくさんの方法がある．たとえば 2 次元では直交座標系 (x, y), 原点周りの極座標 (r, ϕ) などがある（図 2.5）．

互いに近い点は座標でも近い値をもつ．たとえば，(x, y) と $(x + dx, y + dy)$ は dx と dy が無限小のとき近い．同じように (r, ϕ) と $(r + dr, \phi + d\phi)$ は近い．

直交座標 (x, y) において，点 (x, y) と $(x + dx, y + dy)$ の間の距離 dS は

$$dS = \left[(dx)^2 + (dy)^2\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

である（図 2.5 を見よ）．同じ規則を極座標で表すことができる．点 (r, ϕ) と $(r + dr, \phi + d\phi)$ の

間の距離は

$$dS = \left[(dr)^2 + (rd\phi)^2\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

である．

(2.8) 式とこれと似たものは，dr と $d\phi$ が小さいときのみ正しい．だが，有限で大きな距離は積分することにより無限小の関係から作り上げていくことができる．では例として，半径 R の円において，直径に対する円周の比を計算しよう．中心を原点に選び，直交座標で円の式は

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2.9}$$

である．

円周 C は，円の周りを dS で積分したものである．(2.7) 式を使うと，これは

$$C = \oint dS = \oint \left[(dx)^2 + (dy)^2\right]^{1/2} \tag{2.10a}$$

$$= 2\int_{-R}^{+R} dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}_{x^2+y^2=R^2} \tag{2.10b}$$

$$= 2\int_{-R}^{+R} dx \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} \tag{2.10c}$$

となる．$x = R\xi$ の置き換えをすると

$$C = 2R\int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi R \tag{2.11}$$

が得られる．これは正しい答えである．この積分は π の定義と受け取ることができるだろう．数値的にこれを行えば $\pi = 3.1415926535\cdots$ を発見するだろう．

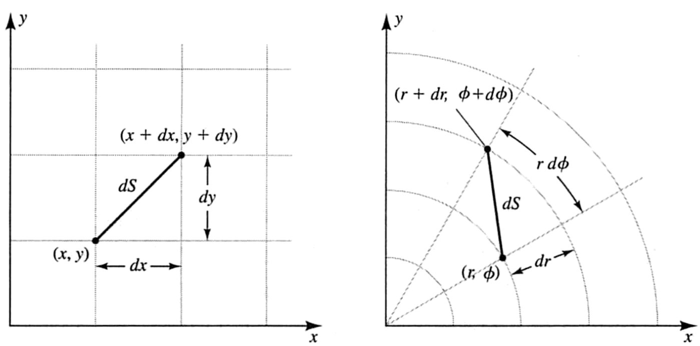


図 2.5　直交座標と極座標．直交座標と極座標は平面内で系統的に点に番号を割り振る方法であり，互いに近い点の距離はどちらを使っても表すことができる．

半径と円周の関係を求めることは極座標ではかなり容易だ．この場合，円の式は単に $r = R$ である．円上で (2.8) 式を評価し，円の上で dS について積分を実行すると

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} R d\phi = 2\pi R \tag{2.12}$$

となる．極座標を使えば，(2.12) 式にたどり着くことが容易なことから，与えられた問題に対してある座標が別の座標よりも優れていることがわかる．

この方法を進めていくことによって，ユークリッド平面幾何学の定理をすべて得ることができるだろう．たとえば 2 本の直線がなす角度は，交点を中心とする円を 2 直線が切り取る長さ ΔC を半径 R で割った比で定義できる:

$$\theta \equiv \frac{\Delta C}{R} \qquad \text{(ラジアン)} \tag{2.13}$$

この定義を使えば，三角形の内角の和が π であることが証明できるだろう．実際，(2.7) 式や (2.8) 式からユークリッド平面幾何学の**公理**を確かめることができるだろう．すべての幾何学は距離の間の関係に集約され，すべての距離は互いに近い点の間の距離の積分に集約され，すべてのユークリッド平面幾何学は (2.7) 式や (2.8) 式に含まれる．

線素

まとめると，幾何学は (2.7) 式や (2.8) 式のような**線素**によって決められ，その線素はある座標系で 2 つの互いに近い点の間の座標間隔であり，2 点間の距離を与える．逆に，線素は dS^2 の 2 次の関係式として書かれ，たとえば

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \tag{2.14}$$

となる．微分には括弧をつけていない．幾何学の線素の形は座標系から座標系に移ると変わるが [例えば (2.7) 式と (2.8) 式]，幾何学は同じである．

球の非ユークリッド幾何学

非ユークリッド幾何学の例として半径 a の 2 次元球面が挙げられる．3 次元極座標の角度 (θ, ϕ) を使って，球面上の点に番号をふることができる．点 (θ, ϕ) と $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$ の間の距離は少し手を動かして作業する（図 2.6）と

球の線素

$$dS^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.15}$$

であることがわかる．これは球面上の線素である．

球面上の円の半径に対する円周の比を求めるために線素 (2.15) を使おう．円とは，**面の中**の固定点（中心）から**表面上で**一定の距離（半径）にある**球面上**の点の軌跡を意味する．球面上のどの一点も他の点と幾何学的に区別できないので，便宜上，極軸が円の中心にくるように極座標の方向をむける．したがって円は定数 θ を持った曲線である．定数 Θ に対して方程式

$$\theta = \Theta \tag{2.16}$$

によって定義される円を考えよう．円周はこの曲線の周りの距離である．曲線上の互いに近い点は $d\phi$ 離れているが $d\theta = 0$ になっている．よって，(2.15) 式から円は $dS = a\sin\Theta d\phi$ であり，円

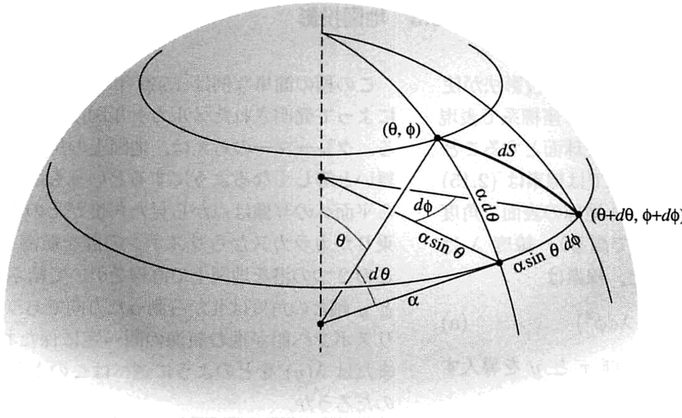


図 2.6 球面における線素の導出．導出には 2 次元球が 3 次元ユークリッド空間内の曲面であることを使う．無限小離れた 2 つの点の位置 (θ, ϕ) と $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$ を示した．一定の緯度 θ にある ϕ と $\phi + d\phi$ の点の間の距離が $a \sin\theta d\phi$ である．経度一定の線に沿って θ と $\theta + d\theta$ 離れた点の間の距離は $ad\theta$ である．θ と ϕ 座標線は直交するので，これら 2 つの微分の 2 乗の和は，$d\theta$ と $d\phi$ が無限小のとき，2 つの点の距離 dS の 2 乗になる．これから (2.15) 式が得られる．

周は

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} a \sin\Theta d\phi = 2\pi a \sin\Theta \tag{2.17}$$

となる．半径は $d\phi = 0$ で中心から θ 方向の曲線に沿った円の距離である．この曲線に沿って (2.15) 式は $dS = ad\theta$ となり，半径は

$$r = \int_{\text{center}}^{\text{circle}} dS = \int_0^{\Theta} ad\theta = a\Theta \tag{2.18}$$

となる．(2.18) 式を使って，(2.17) 式の Θ を消去すると，非ユークリッド幾何学である球における円周と半径の間の関係は

$$C = 2\pi a \sin\left(\frac{r}{a}\right) \tag{2.19}$$

となる．この式の中で a は，幾何学を特徴づける固定された数値である．この値は幾何学の曲り具合を表している．円の半径が球の半径よりもずっと小さいとき $r \ll a$, 近似的に

$$C \approx 2\pi r \tag{2.20}$$

とでき，これはユークリッド幾何学で見慣れた結果である．地表面の幾何学が球と同じであると近似してもよいだろう．

いろいろな射影法が地表の地図を作るために使われるが，それらはボックス 2.3 で示したように球の幾何学を表すための様々な座標系に対応する．

ボックス 2.3　地図投影

地表面の2次元地図をつくるためにいろいろな投影法が使われるが，それは身近な幾何学をいろいろな座標系で表現するよい例となる．地表の幾何学を2次元球面とすることはすぐれた近似である．ふつうの極座標では線素は(2.15)式で与えられ，a は地球の半径となる．地球の表面で角度 ϕ は経度である（度よりもラジアンで測る）．緯度 λ は $\pi/2-\theta$ である．経度と緯度で表すと，線素は

$$dS^2 = a^2(d\lambda^2 + \cos^2\lambda d\phi^2) \qquad \text{(a)}$$

地図を作るために，球面に新しい座標 x と y を導入する．λ と ϕ とは

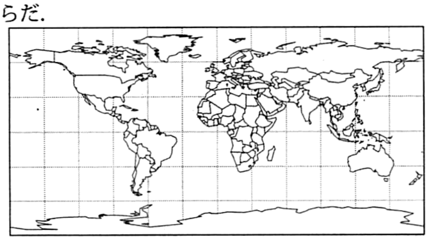
$$x = x(\lambda, \phi), \qquad y = y(\lambda, \phi) \qquad \text{(b)}$$

の関係によって定義される．これらを平面内の直交座標として使い，大陸の輪郭と町の位置などを表示する．別の投影法では別の関数 $x(\lambda,\phi)$ と $y(\lambda,\phi)$ を使うことになる．これらの関数を球面から平面へ（数学的な）写像を与えるものと考えることができる．

関数の数ほど投影法が存在する．もっとも簡単な例は

$$x = (L\phi)/2\pi, \qquad y = (L\lambda)/\pi \qquad \text{(c)}$$

である．ここで L は地図の幅である．これはちょうど ϕ と λ を直交軸上の x と y としてプロットしたものである．結果は図にあるように**正距円筒図法**と呼ばれるものである．だが，球面の幾何学の特徴をいくつか平面上に残せる便利な投影法が存在する．しかしすべての特徴を残せるわけではない．それは球面の幾何学は平面とは別物だからだ．



正距円筒図

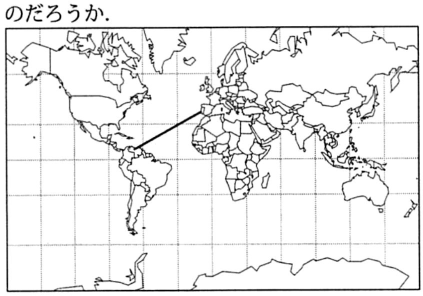
投影法を有益さで大きく分類すると，それらでは経度が x に線形となっている:

$$x = \frac{L\phi}{2\pi}, \qquad y = y(\lambda) \qquad \text{(d)}$$

この種の投影法に対し，本当の距離は線素

$$dS^2 = a^2\left[\left(\frac{2\pi}{L}\cos[\lambda(y)]\right)^2 dx^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 dy^2\right] \qquad \text{(e)}$$

この種の簡単な例は1569年 クレーマー（G. Kramer）によって発明されたメルカトル図法であり，以下で説明する．クレーマーの考えは，地図上の角度を方位磁針の振る舞いと等しくなるようにするというものだ．つまり，球から平面への写像は点から見た角度がそのまま保たれる．船乗りがカラカスからリスボンの間を航海しようとすると，この2つの港を地図上で直線を引いて結ぶだろう．この線と y 軸との角度は北から測った方向であり，カラカスからリスボンへ船が進む航海の間一定に保たれる．関数 $y(\lambda)$ または $\lambda(y)$ をどのように選べばこのような地図を描けるのだろうか．



メルカトル図

角度は(2.13)式でみたように距離の**比**である．球面上の線素が平面上の線素 $dS^2_{\text{flat}} = dx^2 + dy^2$ に**比例**すれば，球面上の2方向の間の角度は平面内で対応する方向の間の角度と等しい．よってクレーマーのアイディアを実行するために(e)式が，ある関数 $\Omega(x,y)$ に対して

$$dS^2 = \Omega^2(x,y)(dx^2 + dy^2) \qquad \text{(f)}$$

と書けるような関数 $\lambda(y)$ を探す．明らかに

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{2\pi}{L}\cos\lambda \qquad \text{(g)}$$

となる必要がある．$\lambda=0$ に $y=0$ を対応させると

$$y(\lambda) = \frac{L}{2\pi}\int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\cos\lambda'} = \frac{L}{2\pi}\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)\right] \qquad \text{(h)}$$

が得られる．(d)式と(h)式でメルカトル図法を定義する．赤道 $\lambda=0$ は $y=0$ の線に写像され，両極 $\lambda=\pm\pi/2$ はそれぞれ $y=\pm\infty$ に写される．

(f) 式で定義される球面計量と平坦計量の間の比例因子 $\Omega(x,y)$ は

$$\Omega(y) = \frac{2\pi a}{L}\cos\lambda(y) = \frac{4\pi a}{L}\frac{e^{2\pi y/L}}{1+e^{4\pi y/L}} \tag{i}$$

である．メルカトル図法のよく知られた特徴の多くはこの因子からくる．たとえば，経度 Δx 離れた同じ緯度線上にある 2 つの点を考えよう．2 点間の物理的距離は

$$\Delta S = \Omega(y)\Delta x \tag{j}$$

であり，経度に依存する． 北極 $y \to \infty$ ではそうなるべきであるが，この距離は 0 に縮まる． $\Omega(y)$ があるために，高緯度で x 実際の距離は座標距離よりも小さくなる．

面積に対しても同じことがいえる．座標上で辺の大きさが Δx と Δy の小さい長方形の面積は

$$\Delta A = [\Omega(y)\Delta x][\Omega(y)\Delta y] = \Omega^2(y)\Delta x\Delta y \tag{k}$$

である．したがって，グリーンランドはメルカトル図法でアフリカ大陸と比べると大きく見えるけれど，実際の面積はずっと小さい．

より一般的な面の幾何学

平面と球の線素は，ユークリッド空間内の面としてこれらの幾何学の描像を明解に描くことから始めてうまく導き出すことができた．しかし，一般相対性理論では，まず始めに線素に直面し，それを使って幾何学の性質を計算しなければならないということがごくふつうである．

例として，線素

$$dS^2 = a^2(d\theta^2 + f^2(\theta)d\phi^2) \tag{2.21}$$

を考えよう．関数 $f(\theta)$ はいろいろ選ぶことができる．$f(\theta) = \sin\theta$ に選ぶと球面の幾何学（(2.15) 式）になる．しかし，他の $f(\theta)$ を選ぶと，線素 (2.21) 式によって表される内的幾何学は 3 次元ユークリッド空間内のどんな面の幾何学となるのだろうか．いくつか手がかりがある:

1. 線素はすべての ϕ に対して同じなので，軸に対して軸対称な面に対応する．
2. 定数 θ の円の円周 $C(\theta)$ は（(2.21) 式から）

$$C(\theta) = \int_0^{2\pi} af(\theta)d\phi = 2\pi af(\theta) \tag{2.22}$$

   である．
3. 極と極の間の距離は

$$d_{\text{pole-to-pole}} = a\int_0^{\pi} d\theta = \pi a \tag{2.23}$$

   である．これらのいろいろな測地的な性質を導き出すことにより表面の図を描くことができる．例 2.1 に示す．

例 2.1. **ピーナッツ幾何学.**

$$f(\theta) = \sin\theta \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta\right) \tag{2.24}$$

によって決められる面を考えよう．面は $\theta = \pi/2$ の赤道面で反転対称である．(2.22) 式で表される θ 一定の円周は $\theta = 0$ から出発すると，初めのうちは増加するが，そのうち $f(\theta)$ が減少すると減少し，そして増加し，再び減少する．どんな θ の値でも，円周は球の値よりも小さい．たとえば，赤道では

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi a\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi a}{2} \tag{2.25}$$

である．円周の最大値は $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 0.73$ ラジアンの角度で，$(8\pi/9)a$ である．(2.23) 式にしたがうと，極から極の距離は πa になるので，この面は図 2.7 で示されたような伸びあがった「ピーナッツ」型になる．



図 2.7 (2.21) 式と $f(\theta) = \sin\theta(1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta)$ で決まる幾何学を持った平坦 3 次元空間内の曲面．水平な罫線は θ 一定線である．θ が変化すると円周は (2.22) 式にしたがってに変わる．鉛直線は対称性のある軸の周りに等角度で引かれた ϕ 一定の線である．この例は非常に対称性の高いピーナッツの表面のように見える．(このような曲面の構成法は 7.7 節で扱う．)

2.6 座標と不変性

前述した，面内の円の半径に対する円周の比を計算すると，直交座標か極座標を使ったかに関係なく，同じ答えが得られた．答えが同じに**なるはず**だということはわかりきっている．円の周りの距離と中心から円の距離は，あいまいのない量であり，平面内の点に番号を付けることに使われた座標の選び方に**独立**である．円盤を例にとれば，端にある点が中心から等距離にあるかどうかを巻尺を使って調べることによって端が円であるかどうかチェックできるであろう．そのとき，円周を見つけて，巻尺を使い，半径に対する円周の比を計算することができるであろう．これらの操作に座標系は含まれていない．座標系は単に幾何学に点を割り振るための便利で系統的な方法にすぎない．それ自身には意味がないのである．点にジョーやアリス，フレッド，... と名前を付けることもできるだろう．地図上ではニューヨークや北京など，そうしている．しかし微積分の方法を幾何学の問題に適用する場合には，このような名前の付け方は体系的でもないし便利でもない．座標は

名前の体系的な集合であるが，座標系の数は無限にあり，それらはすべて同等だ．極座標を用いた円周の計算は (2.12) 式と (2.11) 式で示したように，ある計算に対しては便利かもしれないし，22 ページのボックス 2.3 の地図で示したように，ある目的に対して便利なのかも知れない．しかしどんなものを使っても答えは同じだ．

平面における直交座標と極座標の同等性は一般的に理解できる．2 つの座標系は，平面の点の名前の付け方なので，その間をつなぐ関係がなければならない．点は座標 (x, y) または (r, ϕ) のどちらかの名前が付けられる．これらの名前の間の変換は**座標変換**と呼ばれる．この場合，

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \tag{2.26}$$

である．座標変換 (2.26) の力を借りれば，2 つの線素 (2.7) 式と (2.8) 式の間の同等性は機械的に説明できる．どちらも平面の幾何学を表している．(2.7) 式から始め，(2.26) 式から dx, dy を計算する:

$$dx = (dr)\cos\phi - r\sin\phi(d\phi) \tag{2.27}$$
$$dy = (dr)\sin\phi + r\cos\phi(d\phi) \tag{2.28}$$

これらを (2.7) 式に代入して，整理すれば極座標の dS^2 の (2.8) 式を得る．ここでのポイントは，互いに近い点の距離 dS が**不変量**だということだ．これは計算に使う座標に依らない量である．

計算に使う座標は任意であり，答えは物理的に不変なもので表現されなければならない．次章で，不変量の例を多数見るだろう．

問題

1. [B]（a）平面内で，光線が直角コーナレフレクタにどんな角度で入射しても同じ角度で戻されることを示せ．
   （b）3 次元中で立方体コーナーレフレクタを使えば同じことが起きることを示せ．
2. [S] 地上で角度を測定すると，太陽の中心は，地球の中心よりもずっと遠くにある．しかし太陽は地球よりもずっと重い．(2.1) 式を使って，ガウスが行ったとされるような角度の測定にどちらが大きな効果を与えたであろうかを**評価せよ**．
3. [C]（a）球面上の三角形の 2 つの角度が直角のとき，内角の和と面積の間の関係が，(2.4) 式で与えられることを確かめよ．
   （b）この関係を一般的に証明せよ．
4. 以下の場合について球面上の三角形の例を描け．
   （a）内角の和がわずかに π よりも大きい．
   （b）角度の和が 2π に等しい．
   （c）球面上の三角形の内角の和が (2.4) 式にしたがうものの中で最大のものを求めよ．和が最大になる三角形を示して見せることができるか．
5. 半径 a の球面の 2 次元幾何学上で半径 r（中心から円周までの距離）の円の面積を計算せよ．これが $r \ll a$ のとき πr^2 になることを示せ．

6. [B] 半径 a の球面上で緯度線上の長さ s の区間を考えよう．この区間は球面上で北極から距離 d にある．
この区間が張る経度線の角度はいくらか．この角度は，区間が平面上で同じ距離を張ったとするときと比べ大きいか小さいか．
7. 平面内で直交座標 (x, y) から新しい座標 (μ, ν) への座標変換を考えよう:
$$x = \mu\nu, \qquad y = \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \nu^2\right)$$
(a) xy 平面上で μ 一定曲線と ν 一定曲線を描け．
(b) 線素 $dS^2 = dx^2 + dy^2$ を (μ, ν) 座標へ変換せよ．
(c) μ 一定曲線と ν 一定曲線は直角に交わるか．
(d) 原点を中心とする半径 r の円を μ と ν の方程式で表せ．
(e) (μ, ν) 座標を使って，直径に対する円周の比を計算せよ．正しい答えが得られたか．
8. [A] 卵の表面は軸対称幾何学のよい近似となる．2 次元軸対称幾何学の線素 (2.21) において，表面が卵の幾何学に似るように $f(\theta)$ を選べ．両極間の距離に対する軸回りの最も大きな円の比を計算せよ．
9. 地球の表面は完全な球面ではない．両極を通る大円の円周の 1/4 は 9985.16km である．赤道の円周は 10018.75km よりもわずかに小さく，地球はわずかにつぶれている．地表面が (2.21) 式において小さな ϵ に対して
$$f(\theta) = \sin\theta(1 + \epsilon\sin^2\theta)$$
の線素の軸対称面でモデル化できるとする．どんな a と ϵ の値が極半径と赤道半径を再現するだろうか．
コメント:極周りの 1/4 がほとんど正確に 1000 万メートルであることは決して偶然ではない．これがメートルのもともとの定義だからだ．
10. [B] **正積図法**　正距円筒図法正積図法は地図上の面積と地球の面積が一定の割合をもつものをいう．$x = L\phi/2\pi$ とするとどんな関数 $y(\lambda)$ によって正積図ができるのだろか．（**ヒント:** 無限小面積 $dxdy$ を，球面上のどんな場所においても球面上で対応する無限小の面積と比例定数が同じなら，面積が大きくなっても比例定数は同じになるだろう.）
11. [B] **円錐図法**　円錐図は地上の点を地図上の面内の極座標 (r, ψ) に置く．（球面上の座標 ϕ と混乱を避けるため ψ を使う）よって一般的に $r = r(\lambda, \phi)$ および $\psi = \psi(\lambda, \phi)$ である．特に簡単な円錐図法には北極を極座標の原点として使い，$r = r(\lambda)$ および $\psi = \phi$ とする種類のものがある．
(a) この種類に対して，球の線素を r と ψ で表せ．
(b) 地図上の各面積と球面上の対応する面積の間に比例定数が存在するような正積図法にする関数 $r(\lambda)$ を求めよ．（**ヒント:**問題 10 のヒントを見よ）
12. [B, N] **あなたの世界図**　ボックス 2.3 の地図は *Mathematica* のプログラム `WorldPlot` を使って作った．半径座標を使って，あなたの住む町を中心にして，世界を眺める投影図を作れ．

第 3 章

ニュートン物理学の空間と時間，重力

第 2 章で幾何学の考えとその記述法を紹介した．この章ではニュートン力学における空間の幾何学と時間の概念を考察する．これは力学と，後の展開で重要となる特殊相対性理論の側面を復習するときにも役立つだろう．

3.1 慣性系

ニュートンの第一法則

ニュートン力学では，空間に対して幾何学，時間に対して特別な考えを仮定する．力のはたらいていない粒子，つまり**自由粒子**の運動についての規定はニュートンの第一法則が明白に示している．ニュートンの第一法則にしたがえば，自由粒子は等速で直線上を運動する．ところで，どんな幾何学が「直線」を定義するのだろうか．時間についてどんな考えによって「等速」が決まるのだろうか．

ニュートンの第一法則では 2 点間を結ぶ直線の距離が 3 次元ユークリッド空間中でもっとも短い．空間の幾何学は直交座標における線素

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.1}$$

によって決められ，無限小座標間隔 dx, dy, dz 離れた 2 点間の距離が決まる．この幾何学は平面の 3 次元幾何学の自然な拡張になっている．したがって**平坦**空間と呼ばれる．平坦ユークリッド幾何学をニュートン力学の空間に対して仮定する．

ニュートン力学の平坦空間でどんな運動が記述されるのか理解するために，自由粒子があちこち動いている世界を想像しよう．実験室系の観測者は，その中で動いている粒子の運動を記述し理解しようと努める（図 3.1 を見よ）．観測者は運動を記述するために，実験室の壁と床が交わり，それらがぶつかる隅を直交座標 (x, y, z) の原点に選ぶことができる．これらの座標を使い，粒子が動いている空間内の点の位置に数値を割り当てることができる．座標系は**基準系**または短く**系**と言われる[1]．

[1] 本書では座標系に対する同意語として系という言葉を使う．この言葉を非常に正確に定義する必要はないけれど，系は観測者の実験室系と（ここでのように）強く関連しており，一般的に全体を覆っているか，空間と時間の限られた領域でのみ使える．ニュートン力学と特殊相対性理論の慣性系は空間と時間全体を覆うことのできる例外的存在である．

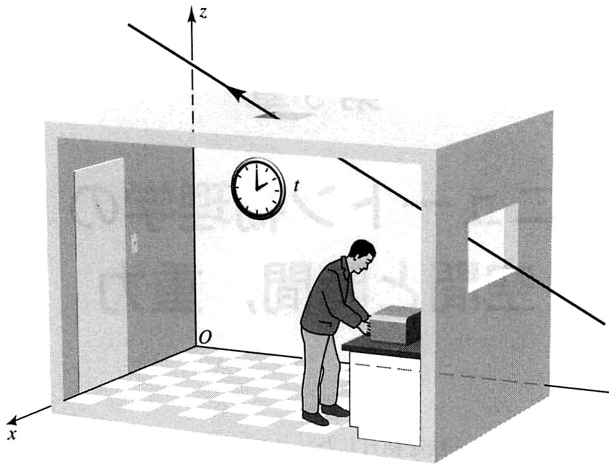


図 3.1　1つの実験室で基準系が1つ決まる．理想的な実験室内で観測者は直交座標系 (x, y, z) の原点として部屋の角を選ぶことができる．軸を床と壁が交わるところに一致させる．3つの座標軸と，時計で測定する時間とともに基準系が定義でき，観測者はそれを使って実験室で粒子の運動を記述し，ニュートン運動の法則を記述する．

実験室はたくさんある．一様に運動しているものや，加速度運動，互いに回転しているもの，またはこれら3つの組合せになっているものも可能である（図 3.2 を見よ）．しかしこれらの基準系のすべてが運動の法則を表す目的に対して同等に使いやすいとは限らない．基準系の特に便利なものを以下のように構成することができる：すべての時間を通じて粒子を直交座標系の原点として選ぶ（図 3.3 を見よ）．ある瞬間にこの原点に向いている3つの直交するジャイロスコープの軸を3つの直交座標 (x, y, z) に選び，後の瞬間でもこれらのジャイロスコープの方向によって (x, y, z) を定め続ける．原点が直線軌道に沿って運動すれば，そのままの形を保ったまま初めの軸を平行に（回転することなく）移動させる．できあがった座標系は**慣性系**[2] と呼ばれる．

慣性系

ニュートン力学の法則は慣性系で最も標準的で単純な形式になる．慣性系の観測者は，すべての自由粒子の位置がある一定の割合で変わるようなパラメータ t を見つけることができる．これが**時間**である．どんな1粒子の運動もその座標を時間の関数 $(x(t), y(t), z(t))$ として，加速度をゼロとして記述することができる：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{3.2}$$

(3.2) 式はニュートンの第一法則を表す式である．実際，慣性系は，ニュートンの第一法則が (3.2) 式の形で成り立つような直交基準系として**定義**されるであろう．

[2] 慣性系の同意語は無数にあり，典型的には**慣性直交基準系**の短縮形である．

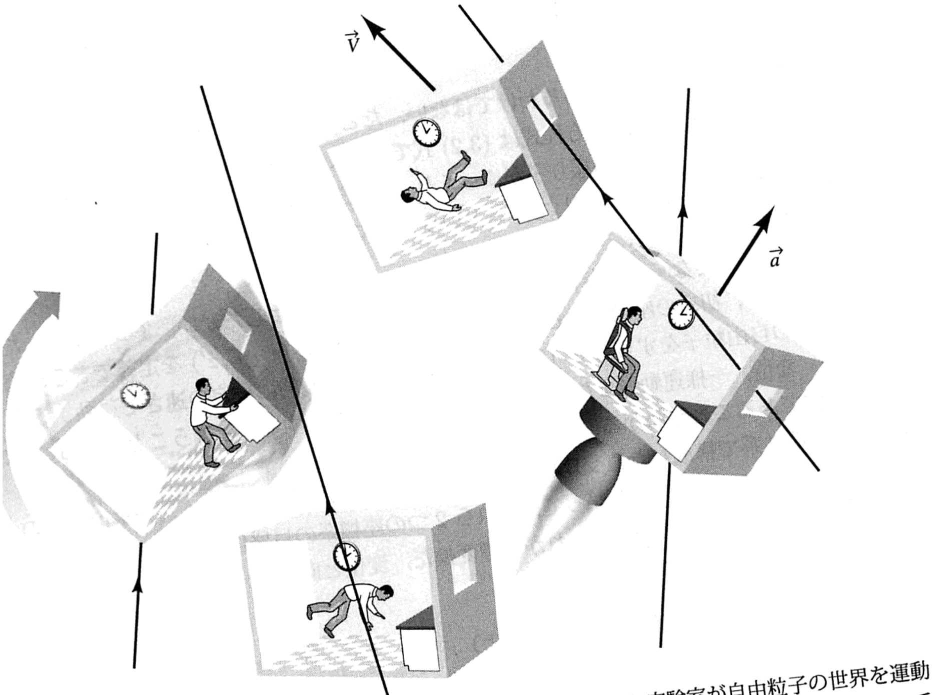


図 3.2　すべての基準系が慣性系ではない．図は 4 つの理想的な実験室が自由粒子の世界を運動しているところを示している．図 3.1 で説明したように各実験室は基準系になっている．一番下の実験室が慣性系であるとしよう．一番下の実験室に対して一様運動する実験室（一番上）も別の慣性系である．だが，一番下の実験室に対して回転する実験室（左）や加速度運動する実験室（右）は慣性系にはならない．

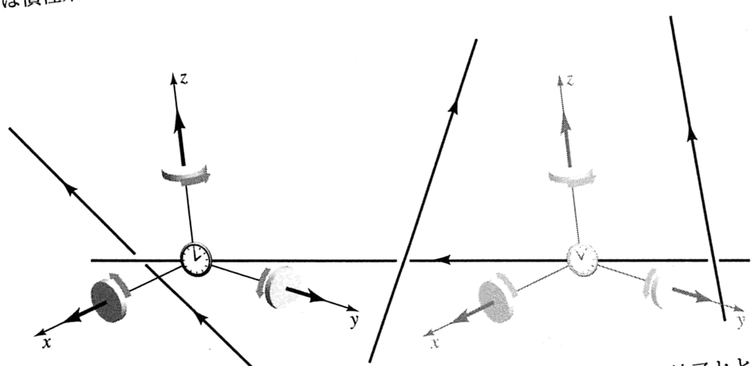


図 3.3　慣性系の構成．1 粒子の位置を系の原点に選ぶ．直交する 3 つ軸は粒子とともに動くジャイロスコープによって定義される．この 3 つの直交座標 (x, y, z) からなる系は他の粒子の運動を記述する慣性系となる．

力学の法則を使うと，慣性系の観測者は時間 t を測定する時計を組み立てることができる．たとえば，1 つの自由粒子の位置を使えば t を測定することができる．その位置が時間的に一定の割合で変化するからである．

すべての直交座標系が慣性系であるわけではない．たとえば，地上の実験室の基準系は厳密には慣性系ではない．自由粒子の運動方程式は (3.2) 式ではなく，さらに地球の回転から遠心力やコリオリ力を受けている．フーコーの振り子がゆっくりと歳差運動するのは，地球に固定された系が慣性系ではなく，慣性系に対して回転しているというまさにその兆しである（別のこのような測定についてはボックス 3.1 を見よ）．

慣性系はたった 1 つでなく多数存在する．すでに述べた構成法にしたがい，3 つの直交した方向を 3 つの軸に選べば，初めの座標に対して**回転した**新しい座標系 (x', y', z') を定義できる．第一の座標に対して別の自由粒子を**ずらし**て（変位）原点を選び，一般的に**一定の速さ**で運動する系を定義する．回転，変位，一様運動（またはその組合せ）が慣性系の中で他と違うことを知ることのできる**少ない**方法であることがわかる．

2 つの違った慣性系で構成した直交座標系 (x, y, z), (x', y', z') に対して 3 次元平坦空間の点に数値を割り振ることができる．したがって，これら 2 つの座標系の目盛付けの間には互いを結び付ける関係がなければならない．つまりこれが座標変換だ．変位と回転，一様運動に対する座標変換の簡単な例はそれぞれ以下のようになる．

1. x 軸に沿って距離 d の**変位**（図 3.4 を見よ）：

$$
\begin{aligned}
x' &= x - d \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

2. z 軸回りの角度 φ の**回転**（図 3.5 を見よ）：

$$
\begin{aligned}
x' &= (\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y \\
y' &= -(\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

3. x 軸に沿って速度 v で**一様運動**（図 3.6 を見よ）：

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

座標変換 (3.3)，(3.4)，(3.5) は**位置**を番号づけする座標が慣性系間でどのように結びつけられるかを示している．ところで時間の関係はどうなっているのか．ある慣性系内の観測者に対して，自由粒子に対する運動法則が単純な形になるような時間をどのようにしたら見つけられるかをすでに考察した．しかし別の慣性系で同じように作られた時間 t' は同じなのであろうか．より具体的に言えば，ある慣性系で同時に起きた 2 つの事象は別の慣性系でも同時なのであろうか．ニュートン

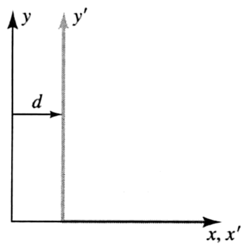


図 3.4 x 軸に沿って距離 d 離れた関係にある 2 つの直交座標系.

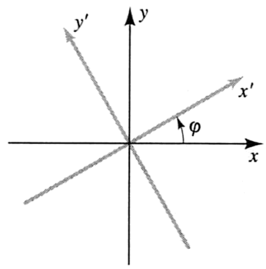


図 3.5 z 軸について角度 φ 回転した関係にある 2 つの直交座標系.

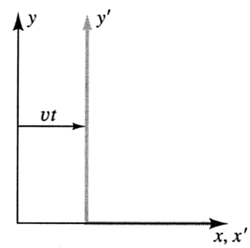


図 3.6 x 軸に沿って一様速度差 v のある 2 つの直交座標系.

力学ではこれらの質問の答えは明白に yes である．あらゆる慣性系の観測者に対して時間の概念は 1 つしかないのがニュートン力学の中心となる**仮定**である．これが「絶対」「普遍」時間であり，どんな慣性系でも運動の法則に同じように入ってくる．したがって，$t' = t$ が成り立ち，互いに一様な速さ v で運動する 2 つの座標系の間の変換法則 (3.5) の完全な形は

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}} \tag{3.6}$$

ガリレイ変換

である．これは**ガリレイ変換**と呼ばれている．絶対時間のニュートン的なアイディアは特殊相対性理論で破棄される．相対論では慣性系が違えば時間の概念は違う．

3.2 相対性原理

ニュートンの第一法則が力学のすべてではない．ニュートンの第二法則によって，一定速度からのずれ（加速度）は力と結びつく．だが，ニュートンの第二法則を含むすべてのニュートン力学は以下の**相対性原理**とかみあっている：

> **相対性原理**
> 別々の慣性系で同じ実験をすれば同じ結果が得られる

あなたは閉じた実験室にいるとする．ニュートンの第一法則をチェックする実験をすれば，実験室系が慣性系であるかどうかを決めることができるだろう．しかし相対性原理によれば，実験室が無限に多い慣性系の中のどれになるかを決めるための実験を，実験室系の内側で行うことはできないことになる．言い替えれば，絶対変位や絶対回転，絶対速度の概念は存在しないのだ．この状況を加速度系と対比しよう．理想的に滑らかな路面上の車の中で目隠しをされると，車が止まっているか，一様速度で運動しているのかを知ることはできない．しかし，加速しているかどうかを知る

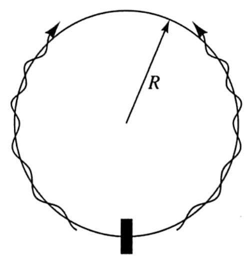
ボックス 3.1　リング干渉ジャイロスコープによる地球の回転の測定

地上の実験室は地球が回転しているため慣性系ではない．地球の回転率は太陽の昇り沈みのような天体現象を参照しなくても地上の閉じた実験室の内部だけで行わえる実験で測定することができる．ジャイロスコープの歳差運動やフーコーの振り子の観測はその方法の 1 つであろう．しかし正確な測定はリング干渉ジャイロスコープで行うことができる．この機器の背後にあるアイディアは右の図をつかって説明できる．リング上の一点から同じ位相の波が互いに反対方向に放射される．円周上を回って反対に進み，リング上の出発点で検出される．もしリングが回転していなければ，波は同じ距離を回り位相が合って，干渉が起き強め合う．リングの中心が止まっている慣性系を使い，その系でリングが角速度 Ω で回転していると何が起きるかを調べてみる．どちらの波もリングを回っていて一方では，検出器は放射の時刻の位置から角度 $\Omega \times$ (経過時間) だけ回転しているだろう．リングと反対に回転している波は同じ方向に回転する波に比べ時刻 $\Delta t_{\mathrm{counter}}$ 後に検出器に到達し，進む距離は $v\Delta t_{\mathrm{counter}}$ である．v は波の速度である．この距離は $(2\pi - \Omega\Delta t_{\mathrm{counter}})R$ でもある．R はリングの半径である．この 2 つを等しいとして $\Delta t_{\mathrm{counter}}$ を求めると，距離は $(2\pi R)/(1+(\Omega R/v))$ となる．同じような式からリングと同じ方向に進む波の距離が得られ，それは分母の符号を変えただけで同じ式となる．2 つの距離の差は

$$(4\pi R^2\Omega/v)[1-(\Omega R/v)^2]^{-1}$$

である．この距離が波長の整数倍になると，2 つの波は干渉し強め合い，半整数倍のときには弱め合うだろう．これをサニャック効果（*Sagnac effect*）という．

地球の回転はこのように電磁波を用いて測定されている．しかし，特に執筆時，最も正確な結果が原子干渉計で原子の量子ド・ブロイ波を使って得られている [たとえば Gustavson, Bouyer, and Kasevich (1997)]．質量 m の物質のド・ブロイ波長は $h/(mv)$ であり，実験における原子の速度ではこの波長は可視光の波長よりもかなり短い．強め合いと弱め合いの干渉の差は半波長なので，物質波の干渉を使えば原理的には非常に正確な測定ができることになる．回転の厳密な測定は重要である．第 14 章で習うように，一般相対性理論では物質の回転は近くの慣性系の回転に影響を及ぼすからである．

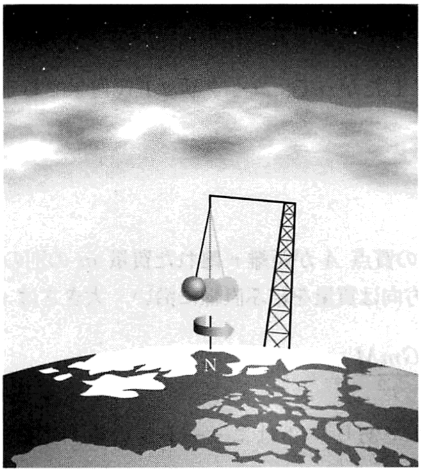


ことは可能である．次章で述べるようにアインシュタインが特殊相対論を発見する上で相対性原理は重要な役割を果たした．

「物理法則を習うとき，重力の法則，電気磁気の法則，核反応の法則など，複雑でこまごまとした原理がたくさんあることに気づくであろう．しかし，これらのこまごまとした法則をまとめてしまう偉大で一般的な法則が存在する．すべての法則がそれにしたがっているのだ」このようにファインマン（Richard Feynman）(1965) は相対性原理のような原理を特徴づけた．たくさんの法則に関係する原理が数学的に正しいと思ってはいけない（相対性原理の文面の中にある「同じ」ということばは厳密に何を意味しているのだろうか）．だが，こまごまとした法則に共通な性質が存在するという事実から目を背けてもいけない．たとえば，相対性原理は，力学の法則がすべての慣性系で同じ形式になると表現されている．正確な意味を**形式**で表すことは難しいが，そのアイディアはニュートンの第一法則によって説明することができる．式 (3.2) が ある慣性系で成り立つとする．回転や変位，一様運動は (3.2) 式の形を維持する．それを示すために，(3.3)，(3.4)，(3.5) 式を時間に関して単に 2 回微分し $t = t'$ を使うと d と θ, v は時間について定数なので，各 3 つの場合で

ボックス 3.2　マッハの原理：慣性系とは何か

ニュートン力学では慣性系を互いに関係づける方法を具体的に述べている．しかし，慣性系を宇宙にある物理的な特徴物に結びつける方法は明らかにしていない．だが，慣性系を物理的な特徴と関連させる簡単な方法がある．以下の思考実験を考えることによって迫ることができる．



あなたは雲で覆われた空のもと地球の北極にいるところを想像しよう．フーコーの振子が地表に対して揺れている．振子の揺れる面が止まっている慣性系があり，それが地球に対して回転している．そこで雲が切れると，この慣性系が遠い星に対して止まっているか，一様に運動しているかを知ることができるようになるだろう．経験にもとづけば，力学の慣性系は宇宙の遠い物質に対して止まっているか，一様運動している．局所慣性系と遠い物体の間のこうした関連性が必要であるというのがバークレー（Bishop Berkeley 1685–1753）と物理学者マッハ（Ernst Mach 1838–1916）のアイディアである．この関係は**マッハの原理**と呼ばれることがある．だが，一般相対性理論ではこの関係は不要である．振子の揺れる面が変わらない系が遠い星に対して回転していれば，宇宙が回転しているといっても構わない．遠い物体にあるこの種の一様性 —— 宇宙背景放射（CMB） —— から宇宙全体の回転に強い上限が与えられている．第 14 章で見るように一般相対性理論では物質の回転運動は慣性系に影響を及ぼす．

(3.2) 式は

$$\frac{d^2x'}{dt'^2}=0 \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2}=0 \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2}=0 \tag{3.7}$$

となり，(3.2) 式と同じ形になる．自由粒子の方程式の形はすべての慣性系で同じである．特に，その形はガリレイ変換のもとで**不変**である．

相対性原理は変位と回転の差だけが異なる慣性系間の物理法則の形式を関係づけているのだが，ユークリッド幾何学が対称性を共有しているという理由のためだけでも相対性原理には意味がある．2 次元の空間の幾何学がじゃがいもの表面のように曲がっていれば，物理法則は変位と回転のもとで不変にはならない．

線素

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.8}$$

が変位と回転のもとでどのように変わるのかを調べることによって，ユークリッド幾何学におけるこれらの対称性を確かめることができる．これらの変換公式はそれぞれ (3.3) 式と (3.4) 式によって与えられる．例として回転を考えよう．その変換は (3.4) 式によって与えられる：

$$
\begin{aligned}
x &= (\cos\varphi)x' - (\sin\varphi)y' \\
y &= (\sin\varphi)x' + (\cos\varphi)y' \\
z &= z'
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

これらを (3.8) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
dS^2 &= (\cos\varphi dx' - \sin\varphi dy')^2 + (\sin\varphi dx' + \cos\varphi dy')^2 + dz'^2 \\
&= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

が得られる．線素の形は回転のもとで**不変**であり，したがって，ユークリッド幾何学である．同じことが変位に対しても言える．

3.3 ニュートン重力

ニュートンの重力の法則は重力 $\vec{F}$ を，質量 M の質点 A が距離 r 離れた質量 m の別の質点 B に作用することを述べている．この力は引力で，方向は質量を結ぶ直線に沿い，大きさは r^2 に反比例する：

ニュートンの重力方程式

$$
\vec{F}_{\rm grav} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r \tag{3.11}
$$

ここで，$\vec{e}_r$ は A から B に向かう単位ベクトルであり，G はニュートンの重力定数 $6.67 \times 10^{-8}{\rm dyn}\cdot{\rm cm}^2/{\rm g}^2$ である． B にはたらく重力は

$$
\vec{F}_{\rm grav} = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}_B) \tag{3.12}
$$

である．ここで m は B の質量，$\vec{x}_B$ は B の位置であり，$\Phi(\vec{x})$ は A によってつくられる**重力ポテンシャル**である:

ニュートンの重力ポテンシャル

$$
\Phi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r} \equiv -\frac{GM}{|\vec{x}-\vec{x}_A|} \tag{3.13}
$$

B が，いろいろな位置 $\vec{x}_A$ にあるたくさんの質点 M_A, $A = 1, 2, \ldots$ から引力を受けていれば，(3.12) 式の力のポテンシャルはその各々の質点からの重力ポテンシャルの和

$$
\Phi(\vec{x}) = -\sum_A \frac{GM_A}{|\vec{x}-\vec{x}_A|} \tag{3.14}
$$

となる．物体が**質量密度** $\mu(\vec{x})$ で連続分布をしているときには，(3.14) 式は体積素 d^3x の質量 $\mu(\vec{x})d^3x$ についての積分になる．つまり

$$
\Phi(\vec{x}) = -\int d^3x' \frac{G\mu(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{3.15}
$$

になる．

電磁気学に詳しい読者なら，(3.15) 式と静電ポテンシャルが似ていること，重力 (3.12) と静電気力が似ていることにすぐ気がついたであろう．この類似性がすぐわかるように表 3.1 に示した．こ

表 3.1　ニュートン重力と静電気力

	ニュートン重力	静電気力
2 つの物体の間の力	$\vec{F}_{\rm grav} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r$	$\vec{F}_{\rm elec} = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
ポテンシャルから得られる力	$\vec{F}_{\rm grav} = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}_B)$	$\vec{F}_{\rm elec} = -q\vec{\nabla}\Phi_{\rm elec}(\vec{x}_B)$
球体の外部のポテンシャル	$\Phi = -\frac{GM}{r}$	$\Phi_{\rm elec} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
ポテンシャル場の方程式	$\nabla^2\Phi = 4\pi G\mu$	$\nabla^2\Phi_{\rm elec} = -\rho_{\rm elec}/\epsilon_0$

ここで $\vec{x}_A$ と $\vec{x}_B$ は重力の場合，質量 M と m の位置であり，静電気力の場合 Q と q の位置である．それらの距離は $r = |\vec{x}_A - \vec{x}_B|$ であり，$\vec{e}_r = (\vec{x}_B - \vec{x}_A)/r$ である．$\vec{F}_{\rm grav}$ は M が m に及ぼす重力であり，$\vec{F}_{\rm elec}$ は Q が q に及ぼす力である．$\Phi_{\rm elec}$ は静電ポテンシャルであり，$\rho_{\rm elec}$ は電荷密度である．

れらの類似性の起源は，力が 2 つの物体の距離の 2 乗に反比例することである．重力における質量は静電気における電荷である．だが，質量は常に正であるため重力はいつも引力であり，反発力もある静電気とは違う．

重力と静電気の類似をさらに推し進めることができる．ニュートン重力場 $\vec{g}$

$$\vec{g}(\vec{x}) \equiv -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \tag{3.16}$$

ニュートンの重力場

を導入する．これは電磁気で電場に相当するものである．重力ポテンシャル (3.15) に対する微分形は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{x}) = -4\pi G\mu(\vec{x}) \tag{3.17}$$

または

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\mu(\vec{x})} \tag{3.18}$$

ニュートンの場の方程式

である．ここで ∇^2 はラプラシアン $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ である．静電場のポアソン方程式に相当するものがニュートン重力場の方程式である．

例 3.1. ニュートンの定理　球対称な質量分布の外側の重力場は全質量だけに依存する．この結果はニュートンの定理と呼ばれる．これを証明するために，すべての質量を含むような半径 r の球の内側の体積 $\mathcal{V}(r)$ について (3.17) 式の両辺を積分すると

$$\int_{\mathcal{V}(r)} d^3x\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\int_{\mathcal{V}(r)} d^3x\,\mu(r) = -4\pi GM \tag{3.19}$$

となる．ここで M は全質量である．左辺を半径 r の球面についての面積分として表すために発散定理（ガウスの定理とも呼ばれる）を使うと

$$\int_r d\vec{A}\cdot\vec{g} = -4\pi GM \tag{3.20}$$

となる．球対称のため $\vec{g}$ は r にのみ依存し，方向は半径方向だけである．したがって面積分は $4\pi r^2|\vec{g}(r)|$ となる．ここで $|\vec{g}|$ は $\vec{g}$ の大きさである．よって，もし $\vec{e}_r$ が半径方向の単位ベクトルならば

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r \tag{3.21}$$

であり，M にのみ依存する．同様に，どんな球対称の質量分布の外側でも重力ポテンシャルは無限遠を 0 に規格化すると M だけに依存する：

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \tag{3.22}$$

質量 M が中心に集中していても，薄い球殻上に分布していても，一様分布であっても，その他の球対称な形状をしていようとも関係ない．内側の質量が動いていても，半径方向だけに動いている限り同じである．球対称質量分布の外側の場とポテンシャルは (3.21) 式と (3.22) 式によって与えられ，全質量が保存するので常に時間的に一定である．一般相対論でも曲がった時空も球対称質量分布の外側にあれば，全質量にのみ依存する．

例 3.2. **ケプラーの法則．**　重力中心を回る軌道上の衛星に対して，ケプラーの法則から軌道周期とその大きさは関係づけられる．質量 M の球対称中心の周りで半径 R, 周期 P の円軌道の例を取り上げて考えてみよう．関係は向心加速度 V^2/R（V は線形軌道速度）と重力加速度が等しいとすることで求められ，

$$\frac{V^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{P}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{GM}{R^2} \tag{3.23}$$

となる．この式は

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3 \tag{3.24}$$

であり，周期の 2 乗が長軸半径の 3 乗に比例することの特別な場合になっている．

第 6 章で，ニュートン重力と加速度が，曲がった時空中で運動する自由粒子の理論として幾何学的に再度定式化されるのを見ることになるだろう．

3.4　重力と慣性質量

重力の法則 (3.12) にニュートンの運動法則 $\vec{F} = m\vec{a}$ を代入することで

$$m\vec{a} = -m\vec{\nabla}\Phi \tag{3.25}$$

または

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{3.26}$$

が得られる．これは，すべての物体が質量や組成に関係なく重力場中で同じ加速度で落下することを表している．2.1 節で述べたように，この自由落下加速度の普遍性が一般相対性理論の幾何学的理解の中心となる．

この自由落下の普遍性に向けられた偉大なる洞察は，(3.25) 式の質量によって果たされる 2 つの役割を区別することによって得られる．方程式の左辺の質量は物体の慣性という性質を支配し，その役割から物体の**慣性質量** m_I と呼ばれる． これはニュートンの運動法則

慣性質量

$$\vec{F} = m_I \vec{a} \tag{3.27}$$

に一般的に含まれる質量である．左辺にある力のもと（重力や電磁気，弾性など）が**何であっても**成り立つ．

(3.25) 式の右辺の質量は物体間の重力の強さを表すため，物体の**重力質量** m_G と呼ばれる．これは逆 2 乗則

重力質量

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{G m_G M_G}{r^2} \vec{e}_r \tag{3.28}$$

に現れる質量であり [(3.11) 式を参照]，電荷と類似している．重力質量は (3.12) 式

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -m_G \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \tag{3.29}$$

に入ってくる．そして重力質量密度は重力ポテンシャル (3.18) の発生源である：

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \mu_G(\vec{x}) \tag{3.30}$$

また，重力質量は重力場 $\vec{g}$ 中で物体の**重さ**と等しいことはよく知られている．

$$\vec{F}_{\text{grav}} = m_G \vec{g} \tag{3.31}$$

表 3.1 内のすべての質量，質量密度は重力質量である．

すべての物体は重力場中で同じ加速度で落下することが実験からわかっている．したがって慣性質量と重力質量の比例定数はすべての物体で同じでなければならない．重力質量はある物体，つまりフランスのセーブルの標準キログラムを基準とする慣性質量と等しいと**定義する**ことができる．加速度の等価性はすべての物体で等しいことを意味する：

$$\boxed{m_I = m_G} \tag{3.32}$$

重力質量と慣性質量は等しい

12 ページのボックス 2.1 で示したように，これは物理の中で最も正確に検証された関係式の内の 1 つである（このことについてさらに多くは第 6 章で）．

m_I の数値（すべての力に対して力学的法則の中で慣性を操る）と特殊な力—— 重力 —— への結合定数としての m_G の数値が等価であることはまさに驚くべきことである．ニュートン理論では，このことは説明できない実験事実のように見受けられる．重力の幾何学理論が可能で一般相対性理論の基礎となっているのはこの実験事実があるからである．もし同じ初期条件ですべての物体がその組成と無関係に同じ曲線に沿って落下するなら，その曲線は時空の幾何学の特徴であって，物体にはたらく力の特徴ではない．

3.5　ニュートン力学の変分原理

物理 —— それは作用があるところ．
（作者不詳）

ニュートン力学の法則は最小作用の原理[3]と呼ばれる変分原理で定式化することができる．この原理を拡張すれば，曲がった時空で粒子の運動方程式を定式化する道しるべとなるであろう．ポテンシャル $V(x)$ の中で 1 次元中を運動する質量 m の粒子の単純な場合から始めて最小作用の原理を復習する．運動の方程式はラグランジアンによってまとめられる：

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \tag{3.33}$$

ここでドットは時間微分を表す．ニュートンの法則 $m\ddot{x} = -dV/dx$ はラグランジュ方程式

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{3.34}$$

によって表すことができる．

図 3.7 に示した，時刻 t_A で点 x_A と時刻 t_B で点 x_B をつなぐ経路を考えよう．各経路に対して，**作用**

$$S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\dot{x}(t), x(t)) \tag{3.35}$$

と呼ばれる実数をつくろう．作用は**汎関数**の例である．これは関数（この場合 $x(t)$ の関数）から実数への写像である．

t_A で x_A と t_B で x_B をつなぐすべての曲線の中で作用が極値をとるものがラグランジュ方程式 (3.34) を満たす．これがニュートン力学における変分原理である．

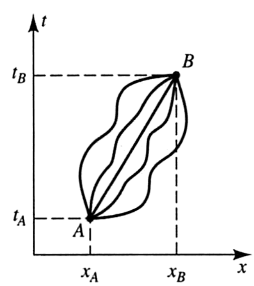


図 3.7　時刻 t_A 位置 x_A と時刻 t_B 位置 x_B を結ぶいろいろな経路を示した．しかし粒子はニュートンの運動方程式にしたがい，そのうちの 1 つに沿って運動する．その経路は作用が極値をとるものである．

[3] 変分原理は作用原理と呼ばれることがある．

ニュートン力学の変分原理
粒子は，ある時刻における点と後の時刻における別の点で計算される作用が
極値をとるように運動する．

言い方を替えれば，ニュートンの運動法則にしたがう粒子は作用が極値をとる経路にしたがう．以下で，**極値**が何を意味するかを説明し，その原理を説明することにする．

1 変数関数 $f(x)$ が極値をとるのは 1 階微分が 0 になる点である．その点では極大をとるかもしれないし，極小かもしれないし，鞍点かもしれない．極値では，x に小さい変化 δx を与えても関数の値は 1 次の変化 δf は起きない．その理由は，δx の 1 次では

$$\delta f = \frac{df}{dx}\delta x \tag{3.36}$$

であり，極値では $df/dx = 0$ だからだ．

n 個の変数 $x^1, \ldots, x^n$ の関数 $f(x^1, \ldots, x^n)$ が極値をとるのはすべての偏微分 $\partial f/\partial x^a$ $(a = 1, \ldots, n)$ が 0 になるところである．このような極値は**任意**の変分 δx^a, $a = 1, \ldots, n$ に対して，関数の第一変分が 0 となるところとして特徴づけられる：

$$\delta f = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^a}\delta x^a = 0 \tag{3.37}$$

次元が多くなると，極値は関数の極大や極小になっているとは限らない．ある方向には極大で，別の方向には極小ということもある．

作用汎関数 $S[x(t)]$ の極値は (x_A, t_A) と (x_B, t_B) をつなぐ経路の任意の変分 $\delta x(t)$ に対して 1 階の変分 $\delta S[x(t)]$ が 0 になることで定義される．$\delta S[x(t)]$ を計算することは，単に，作用 (3.35) の定義の $x(t)$ に $x(t) + \delta x(t)$ を代入し，$\delta x(t)$ の 1 次まで展開し，部分積分をすると

$$\delta S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)}\delta \dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial x(t)}\delta x(t) \right] \tag{3.38a}$$

$$= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)}\delta x(t) \right|_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} dt \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x(t)} \right] \delta x(t) \tag{3.38b}$$

となる．

t_A の x_A と t_B の x_B を結ぶ経路の変分は端点で必ずゼロになる $\delta x(t_A) = \delta x(t_B) = 0$．したがって (3.38b) 式の第一項は 0 になる．$\delta S[x(t)]$ が 0 になるという条件のため，残っている項は任意の $\delta x(t)$ に対して 0 にならなければならない．そうなるのは (3.38b) 式の被積分関数が恒等的に 0 になるときであり

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{3.39}$$

となる．経路がラグランジュ方程式を満たすと作用が極値をとる．

この結果は 1 次元の運動にだけに留まらない．ラグランジアンが n 個の座標 $x^a(t)$ とその微分の関数ならば，作用は n 個の式

ラグランジュの方程式

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)+\frac{\partial L}{\partial x^a}=0, \qquad a=1,\ldots,n \tag{3.40}$$

を満たすとき極値をとる．

例 3.3. 特殊な変分.　作用が運動方程式にしたがう経路から離れた変分で極値をとれば，特殊な変分の極値でなければならない．t_A で x_A と t_B で x_B の間を運動する自由粒子（$V(x)=0$）を考えよう．ニュートンの法則によれば，自由粒子はその間を一定の速さで運動し，その速さは $(x_B-x_A)/T$ になる．$T\equiv t_B-t_A$ は経過時間である．これが図 3.8 に示した直線経路である．この経路では T の半分の時間が経ったとき，粒子は $(x_B+x_A)/2$ の位置にいる．ニュートンの法則にしたがう経路と，一定の速度で x_A からある別の位置 X にいき時刻 T で x_B 着く経路を比べる．例が図 3.8 に示してある．これらの経路の作用 $S(X)$ は X の関数であり，各区間で速度一定なので (3.35) 式から簡単に求められる．その速度は初めの区間で $(X-x_A)/(T/2)$ であり，次の区間で $(x_B-X)/(T/2)$ である．時間 t で，一定速度 V で運動する粒子の区間で計算される作用は $mV^2t/2$ である．これらの区間の作用の和は

$$S(X)=m\left[(x_B-X)^2+(X-x_A)^2\right]/T \tag{3.41}$$

である．作用が極値をとる経路は $dS/dX=0$ を満たす．唯一の解は

$$X=(x_B+x_A)/2 \tag{3.42}$$

であり，これはニュートンの法則にしたがう経路である．

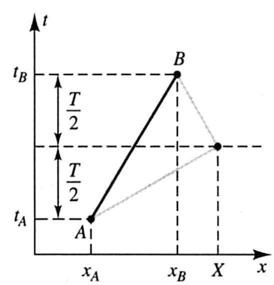


図 3.8　この図は時刻 t_A, 場所 x_A と時刻 t_B, 場所 x_B を結ぶ粒子の経路の特別なものを表している．薄い経路は 2 つの直線からなっており，t_A と t_B の中間の時刻で位置 X を通り，X がパラメータとして入っている．作用の極値をとる経路が実線となっており，2 点をつないでいる．これがニュートンの法則にしたがう経路である．

問題

1. 自由粒子が慣性系 (x, y, z) の xy 面内で $x = d$, $y = vt$ の軌跡上を運動している．d と v は定数である．その慣性系に対して，共通の z 軸（$z = z'$）を角速度 ω で回転している直交座標系 (x', y', z') を考えよう．回転系で $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ のしたがう運動方程式はどうなるか．$x'y'$ 面で粒子の軌跡の概形を描き，それが運動方程式を満たしていることがわかるようにせよ．
2. ニュートン力学の慣性系から一様に加速する系へ変換することによってニュートンの運動法則が不変で**ない**ことを示せ．加速度系での運動方程式はどうなるか．
3. [B,S] 33 ページのボックス 3.2 で述べたフーコーの振り子の歳差運動は 1 時間当たり何度になるか．
4. 半径 R, 全質量 M の一様質量密度をもつ球の内外の重力ポテンシャルを求めよ．無限遠で 0 になるようにポテンシャルを規格化せよ．
5. 汎関数
$$S[x(t)] = \int_0^T \left[\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + x^2(t) \right] dt$$
を考えよう．$S[x(t)]$ が極値をとり，条件
$$x(0) = 0, \qquad x(T) = 1$$
を満たす曲線 $x(t)$ を求めよ．$S[x(t)]$ の極値はいくらか．極大か，極小か．
6. [B,E,C] 月の重力エネルギーを月の静止質量との比として評価せよ．この比は重力質量と慣性質量が等しいことを検証する範囲で月レーザー測距の 10^{-13} 程度の精度よりも大きいか小さいか．

第4章

特殊相対性理論の原理

アインシュタインが1905年に提唱した特殊相対性理論によって，前章で概観したニュートンの空間と時間の考えを根本的に見直さざるを得なくなった．特殊相対性理論では，ユークリッド空間とそれとは独立の絶対時間からなるニュートンのアイディアは，**時空**と呼ばれる4次元統一体にまとめられる．この章では時空の非ユークリッド幾何学から始めて，特殊相対性理論の基本的原理を復習する．

4.1　速度の加法則とマイケルソン–モーレーの実験

電磁場を支配するマクスウェル方程式がニュートン力学のすべての慣性系内で同じ形式にならないという結論を得るために，マクスウェル方程式について多く知る必要はない．マクスウェル方程式から光が速さ c で進むことがわかる．c はマクスウェル方程式について基本パラメータとして入っている[1]．しかし慣性系間のガリレイ変換 (3.6) にしたがえば，互いに運動する慣性系間では光は違った速度で進むべきだ，ということになる．

具体的には，(V^x, V^y, V^z) がある慣性系で測定された粒子の速度成分であり[2]，$(V^{x'}, V^{y'}, V^{z'})$ がその慣性系に対して x 軸方向に速度 v で運動する慣性系で測られた速度成分であるとする．すると (3.6) 式から

$$V^{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = V^x - v \tag{4.1}$$

となり，y と z 成分の自明な変換とともにまとめると

$$\begin{aligned} V^{x'} &= V^x - v \\ V^{y'} &= V^y \\ V^{z'} &= V^z \end{aligned} \tag{4.2}$$

ニュートンの速度の加法則

となる．これらはニュートンの速度の加法則と呼ばれる．

---

[1] 物理量 ϵ_0 と μ_0 がマクスウェル方程式について基本パラメータであるという考えに慣れているかもしれないが，$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$ は純粋に数値であり，$\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0)$ である．

[2] ほとんどの場合，$\vec{V}$ のような大文字は慣性系で測定された粒子の速度に使われ，$\vec{v}$ のような小文字はある慣性系に対する別の慣性系の速度に使われる．しかし，ときどきこの記法にしたがわないこともある．

変換 (4.2) からマクスウェル方程式が 1 つの慣性系でしか正しくないことがわかる．マクスウェル方程式から光の速度が 1 つしか得られないからだ．19 世紀には，この系が光の伝わる物理的媒質 ——「エーテル」—— の静止系だと考えられた．エーテル静止系に対して運動している慣性系では光の速度は (4.2) 式にしたがう．

マイケルソン–モーレー実験

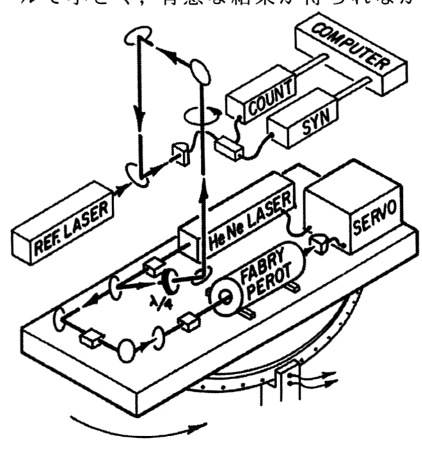
マイケルソン（Albert Michelson）とモーレー（Edward Morley）はニュートンの速度の加法則 (4.2) を光の場合について実験し，1887 年結果を出版した．この実験の現代版をボックス 4.1 に詳しく述べた．マイケルソンとモーレーは地上の実験室で地球の軌道運動の方向に進む光速とそれに垂直な光速を軌道上の 2 点で比べた（図 4.1 を見よ）．太陽の周りを地球が運動しているということは，軌道上のほとんどの位置でエーテルに対して運動しているということになる．軌道上のある点でエーテルに対して止まっていれば，6 ヶ月後にはエーテルに対して 2 倍の軌道速度で運動していることになるだろう．簡単のため太陽がエーテルに対して静止しているとしよう．$V_\oplus$ を地球の軌道速度とすると，ニュートンの速度の加法則から，地球の運動に対して垂直な光の速度は c であり，平行な速度は $c \pm V_\oplus$ になることになる．しかしマイケルソンとモーレーは速度差を検出できなかった．明らかにニュートンの速度の加法則は正しくない．ニュートン力学とマクスウェル方程式のどちらかを修正しなければならない．それは力学の方であった．

ボックス 4.1　現代版マイケルソン–モーレーの実験

1978 年ブリエ（Brillet）とホール（Hall）は光の伝達の等方性について新しい制限を定めた．ヘリウム–ネオンレーザー（$\lambda = 3.39\mu$m）がファブリ–ペロー干渉計に放射を供給する．実質的にはそれはある距離離して固定された 2 枚の鏡によって仕切られた光共振器である．このレーザーの振動数を常に調節し，共振器の定在波を維持する．$f = c/\lambda$ の関係があるため，光速にどんな小さな変化が生じてもレーザーの振動数 f に変化が起きる．レーザーと共振器は重い花崗岩のテーブルに置かれており，空間の方向を比べるために回転できるようになっている．ビームを分割し回転軸を上がるようにし，それを定常参照レーザーと比較することによってレーザーの振動数を決める．もしも光速が 2 つの直交する方向で異なれば，振動数は $\cos(2\phi)$ に依存する．ここで ϕ はプラットフォームの回転角である．ブリエとホールの結果は

$$\Delta f/f = (1.5 \pm 2.5) \times 10^{-15}$$

であり，これから振動数がまったく変化していないといえる．ニュートン的速度の加法では振動数の偏移が $(V_\oplus/c)^2 \approx 10^{-8}$ であることが予測されるだろう（$V_\oplus$ は地球の軌道速度）．ブリエとホールの実験では，この古典的予言値よりも 1000 万分の 1 のスケールで小さく，有意な結果が得られなかった．



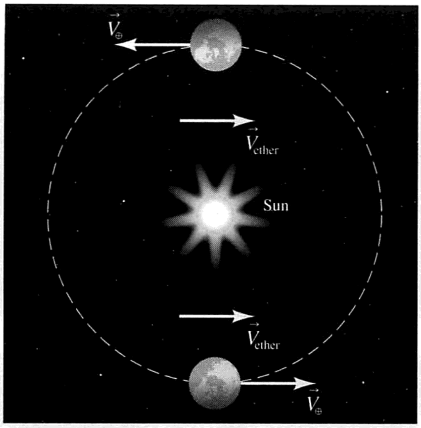


図 4.1 マイケルソン–モーレーの実験．一様なエーテルが太陽に対して速度 $\vec{V}_{\rm ether}$ で運動しているとする．または同じことだが，太陽が速度 $-\vec{V}_{\rm ether}$ でエーテルに対して運動しているとする．太陽に対する地球の速度を軌道上の一点で $\vec{V}_\oplus$ としよう．その点でエーテルに対する地球の速度は $\vec{V}_\oplus - \vec{V}_{\rm ether}$ である．6 ヶ月後地球の速度はほぼ $-\vec{V}_\oplus$ になっており，エーテルに対する速度は $-\vec{V}_\oplus - \vec{V}_{\rm ether}$ である．速度差はエーテルの速度 $\vec{V}_{\rm ether}$ と無関係に，$2\vec{V}_\oplus$ になっている．

4.2 アインシュタインの革命とその成果

アインシュタインは 1905 年にニュートン力学を修正することに成功し，その理論は**特殊相対性理論**または短縮して**特殊相対論**と呼ばれる．アインシュタインは定式化するために 3.2 節の相対性原理がマクスウェル方程式によって表される電磁現象でも成り立つことを仮定した．特に光速がすべての慣性系で同じ値 c になることを仮定した．現在ではこの仮定はマイケルソン–モーレーの実験によって動機づけられたと考えられている[3]．しかし，相対性原理を受け入れるとき，ニュートン力学ではガリレイ変換を採用していたため，ニュートンの速度の加法則が導かれるので，アインシュタインはそれを採用しなかった．むしろアインシュタインはすべての慣性系で光速が同じ値になる慣性系間の新しい関係を発見した．

すべての慣性系で光速が同じであると仮定すると，絶対時間というニュートンのアイディアを見直し，最終的にはあきらめる必要がでてくる．同時性のアイディアを調べると，この仮定が最も浮き彫りになる．2 つの事象が同じ時刻に起きれば同時である．ニュートン理論では，絶対時間を採用しているので，2 つの事象がある慣性系で同時ならば他のすべての慣性系でも同時である．光速一定の仮定のアイディアがいかに大きなインパクトを与えるかを見るため，図 4.2 と図 4.3 に示した実験を考えよう．

[3] 本当の歴史はいつもそうであるように複雑である（Miller 1981, Pais 1982）．

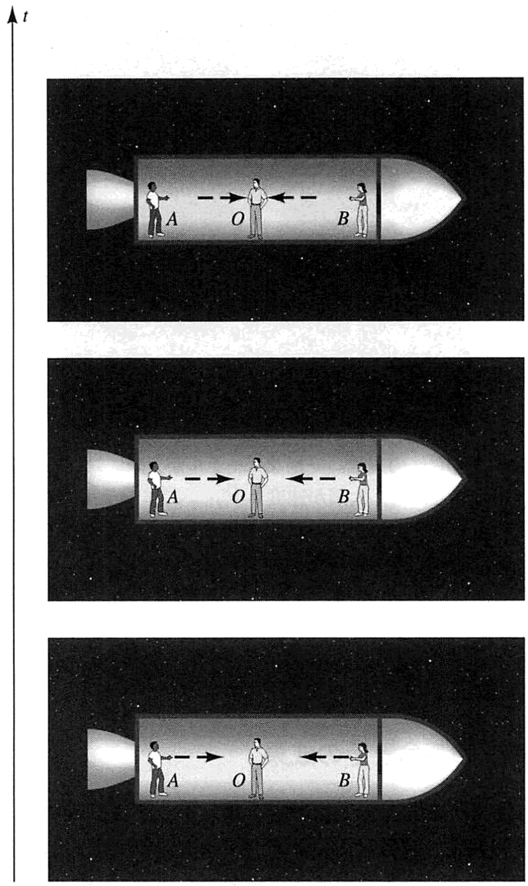


図 4.2　ある慣性系から見たとき，3 人の観測者 A，B，O が静止しているロケットに乗っている．観測者 A，B は O から等距離にいることがわかる．A と B が光信号を放ち，O が同時に受信した．図を下から上へ移動すると，ロケットと信号の様子が 3 つの等間隔で時間が進み，最終的には信号が O に同時に到着している．A と B の信号が速さ c で同じ距離を進み同時に到着するので，信号は同時に発信されていなければならない．

3 人の観測者 A, B, O が長さ L のロケットに乗っている．O は A と B の間の中ほどにいる．A と B はそれぞれロケットに沿って O に向けて光信号を放つ．O はこの信号を同時に受信する．どちらの信号が先に放たれたのか．光速がすべて同じならば答えは慣性系で違ってくる．

図 4.2 の慣性系ではロケットが静止している．この系で止まっている観測者が推測すると「ロケットは止まっており，2 人の観測者 A, B は O から等距離にいる．したがって 光の信号が A から O まで伝わる時間は B から O までと同じである．信号が同じ瞬間に O に届いたので，同時に放たれたはずだ」

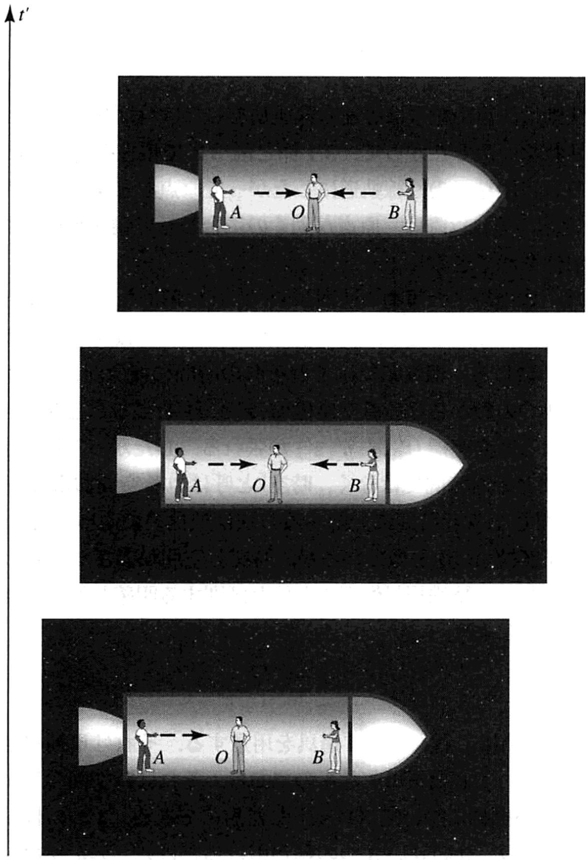


図 4.3 図 4.2 と同じロケットと観測者．今回の慣性系ではロケットが速さ V で右に運動している．下から上へ図は等間隔に時間が進んでいる．いちばん上の図では，A と B の信号が O で同時に受信されている．下の 2 つは A と B の発信を示している．O に同時に着くことから，A からの方が B よりも早く発信されていなければならない．A の方が長く進まなければならないからだ．よって 2 つの信号は同時に発信されていないことになる．

図 4.3 に示したように，ロケットが動いているように見える慣性系では別の結果が得られる．この系で静止している観測者は以下のように推測するだろう．「O が信号を同時に受信した．信号を放つ前では，つねに B の位置は A の位置よりも O の受信位置に近いことがわかる．A と B の両方の信号は光速 c で伝わるので，A の信号は B よりも先に送られたことになる．O に同時に着くためには，A の信号は B よりも長い距離を移動しなければならないからだ．」

よって，光速が一定であるとすると，ある慣性系で同時に起きた 2 つの事象は，その慣性系に対して運動している慣性系では同時ではない（問題 7 と比べよ）．ニュートンの時間のアイディアは破棄されなければならない．次にどうするかをみる．

4.3　時空

ニュートンの第一法則は，自由粒子は等速直線運動をしなければならないというものだが，特殊相対性理論でも変更されない．したがって，3.1 節と図 3.3 で慣性系の構成法を述べたが，これも変更されない．つまり，自由粒子の直線軌道にしたがって原点をまず選ぶ．そしてある瞬間，3 つの直交軸 (x, y, z) を選ぶ．それ以降は，原点が動くのに合わせて軸を平行に移動させ，(x, y, z) を定義する．こうして慣性系ができる[4]．

それぞれ慣性系には，自由粒子の運動の法則が (3.2) 式の形になるような時間の概念がある．しかし前節で考察した同時性にしたがえば，別の慣性系の時間と一致するというニュートン仮定を受け入れる理由などない．むしろ，慣性系には**それぞれの**時間の概念があり，同時性の概念がある．したがって慣性系には 4 **つの**軸からなる直交座標 (t, x, y, z) を張ることができ，それと別の慣性系には**別の** 4 つの軸からなる直交座標 (t', x', y', z') が張れる．したがって物理学にとって，正しい幾何学的舞台は単独の空間と絶対時間ではなく，**時空**[5]と呼ばれる空間**および**時間の 4 次元統一体である．時空を 3 次元空間と 1 次元時間に分解する方法は慣性系によって違う．互いに運動する慣性系間の変換はガリレイ変換 (3.6) と似ているが，時間と空間が混ざったものとなるだろう．これを 4.5 節で調べることになる．特殊相対性理論を他と区別する明確な仮定は 4 次元時空の幾何学である．これから進むことにしよう．

時空図

4 次元時空を記述するために，我々はまず道具を用意する．それは単純すぎて当り前な気がするかもしれないが，非常に強力で必要不可欠なものである．それは**時空図**のアイディアである．時空図は慣性系のうち 2 つの座標軸についてプロットしたものである．4 つの軸があるが 1 枚の用紙は 2 次元でしかないので，2 つ，せいぜい 3 つの軸が引けるだけだ．x-y プロットが 3 次元空間の 2 次元スライスであるのと同じように，時空図は時空の**スライス**または時空の一部である．図 4.4 に典型的な例を示した．1 つの軸として t でなく，ct を使うのが妥当であろう．そうすれば 2 つの軸は同じ単位になる．

時空の点 P は**事象**と呼ばれる．ある特定の時刻に特定の場所で起きるからであり，それは時空の 1 点となる．たとえば超新星爆発は 1054 年カニ星雲の位置に起きた 1 つの時空の事象である．事象 P は慣性系の座標 (t_P, x_P, y_P, z_P) の時空位置に置くことができる．図 4.4 にこれを示した．

粒子は，**世界線**と呼ばれる時空曲線で表される．それはいろいろな時刻で粒子の位置を示す曲線であり，たとえば $x(t)$ と表す．図 4.5 に 2 つの世界線を時空図に表わした．世界線の傾きは，$d(ct)/dx = cdt/dx = c/V^x$ であることから c/V^x である．速度 0 の傾きは無限大に相当する．光速 c は単位 1 の傾きになる．したがって光線は時空図で 45° の線に沿って運動する．52 ページのボックス 4.2 に世界線が走る過去の時空図の例を示した．

---

[4] 特殊相対性理論の慣性系はローレンツ座標と呼ばれることがある．

[5] 相対論屋は統一的なアイディアであることを示すために，時間と空間の代わりにこの言葉「**時空**」を使う．

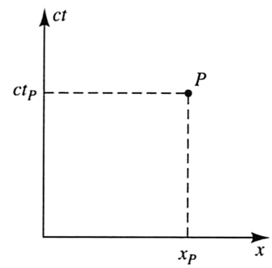


図 4.4 ある慣性系の座標における 4 次元時空中の 2 次元スライスを示す時空図．事象がある空間の場所 (x_P) とある時間 (t_P) で特定される時空の点 P で起きた．

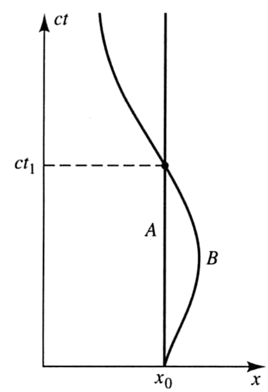


図 4.5 時空中の世界線．A は慣性系 (ct, x) でずっと x_0 に静止している粒子の世界線である．世界線 B は $t = 0$ で x_0 から加速し，減速し，向きを変え $t = t_1$ で x_0 を横切り x の負の方向を進む観測者を表す．

平坦時空の幾何学

特殊相対性理論の重要な仮定は時空の幾何学にある．それは第 2 章で学んだように，近傍の 2 点間の距離を与える線素によって具体化される．この線素から特殊相対性理論の考察を始めるのが妥当なのであろう．だが，そうする前に線素の形をつくるための動機づけをしたい．すべての慣性系で光速 が c であるというアインシュタインの仮定を線素と関連付ける簡単な思考実験をしてみよう．

思考実験を図 4.6 に示した．ある慣性系で距離 L 離れて 2 枚の平行な鏡が静止している．その中の事象は (t, x, y, z) で表される．我々は y を鏡の垂直方向に選び，x を平行方向に選ぶ．光信号は鏡の間を往き来する．図 4.6 の右図は時空図の世界線を表している．時計により光線の出発事象 A とそれと同じ空間点に戻ってくる事象 C の間の時間を測定する．これら 2 つの事象は鏡が静

止している慣性系で座標間隔

$$\Delta t = 2L/c, \qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \tag{4.3}$$

離れている．

慣性系 (t, x, y, z) に対して速度 V で x の負の方向に鏡と平行に運動する慣性系について同じ思考実験を行い分析する．x 軸に平行な x' 軸をもつ座標系 (t', x', y', z') によって事象を表す．この系で，鏡は x' の正の方向に速さ V で運動している．図 4.7 に示してある．この系でパルスの発射と戻りの間の時間間隔 $\Delta t'$ はいくらか．この質問を以下で分析して答えよう．光線は発射 A と戻り C の間に x' の負の方向に $\Delta x' = V\Delta t'$ の距離を進む．y' 方向の距離は L である．横の距

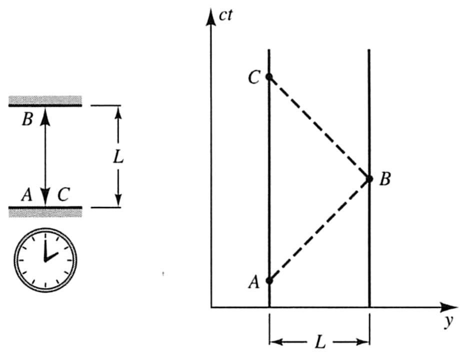


図 4.6　左図は座標 (t, x, y, z) によって張られる慣性系で静止している 2 つの平行な鏡を示している．光のパルスは鏡の間を往き来し，下の鏡から事象 A で発射されたパルスの時刻と戻ってきた事象 C の時刻の時間間隔は $\Delta t = 2L/c$ になる．パルスの世界線は右図の時空図で示されており，y 軸は光線が進む鉛直方向である．A と C の事象は時間間隔 Δt 離れているが，同じ空間点 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ である．こうした配置は，パルスが下の鏡に戻ってくる時間ごとに $2L/c$ 進む時計のモデルと見なすことができる．

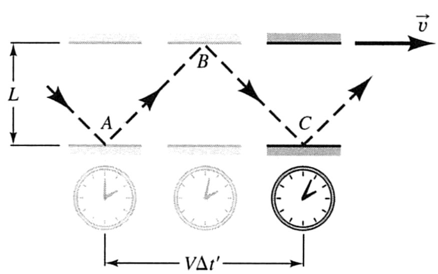


図 4.7　図 4.6 で述べた思考実験がここでは，鏡の水平方向 x' 方向に速さ V で運動する慣性系 (t', x', y', z') で表されている．パルス光の経路が示されており，光は往復の距離を時間 $\Delta t'$ かけて進む．発射と到達の事象は空間で $\Delta x' = V\Delta t'$, $\Delta y' = \Delta z' = 0$ 離れている．経路の長さは $2[L^2 + (\Delta x'/2)^2]^{1/2}$ であり，c で割ると $\Delta t'$ が得られる．

離は 2 つの慣性系で同じであると仮定している（これについて詳しくは問題 16 を解け）．したがって発射と戻りの全距離は $2[L^2+(\Delta x'/2)^2]^{1/2}$ である．アインシュタインが行ったように，この慣性系で光速が c であると仮定すると，時間 $\Delta t'$ はこの距離を c で割ったものである．この系で A と C の間の座標間隔は

$$\Delta t' = \frac{2}{c}\sqrt{L^2+\left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2}, \quad \Delta x' = V\Delta t', \quad \Delta y' = 0, \quad \Delta z' = 0 \tag{4.4}$$

である（右辺は，V と c, L ですべて簡単に書けるが，ここではその必要はない）．

(4.3) 式と (4.4) 式からすぐ

$$-(c\Delta t')^2+(\Delta x')^2 = -4[L^2+(\Delta x'/2)^2]+(\Delta x')^2 = -4L^2 = -(c\Delta t)^2 \tag{4.5}$$

が得られる．数学的な同等性が**不変量**のカギであり，時空の幾何学を記述する線素を見つけるカギである．不変量とは両慣性系で同じ値をとる量のことである． $\Delta x=0$ であり，Δy と Δz も両系で 0 なので，(4.5) 式に加えてもよく

$$\boxed{(\Delta s)^2 \equiv -(c\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} \tag{4.6}$$

が両系で同じであることわかる．具体的には

$$(\Delta s)^2 \equiv -(c\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2 \tag{4.7a}$$
$$= -(c\Delta t')^2+(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2 \tag{4.7b}$$

となる．この関係は簡単な思考実験で得られたのだが，一般的に 2 つの慣性系からみた 2 つの事象の時間と空間を含むどんな思考実験でも成り立つ．$(\Delta s)^2$ は慣性系を変えても**不変**である．

点の間の距離で時空幾何学を決めているのだが，その距離はその点を番号づけする座標系すべてで同じでなければならない．距離を定義する線素はすべての慣性系で同じ形でなければならないということを相対性原理は要請する．したがって (4.7) 式の不変性から $(\Delta s)^2$ が時空点の間の 2 乗距離であることが動機づけられる．より正確には，線素[6]

$$\boxed{ds^2 = -(cdt)^2+dx^2+dy^2+dz^2} \tag{4.8}$$

平坦時空の線素

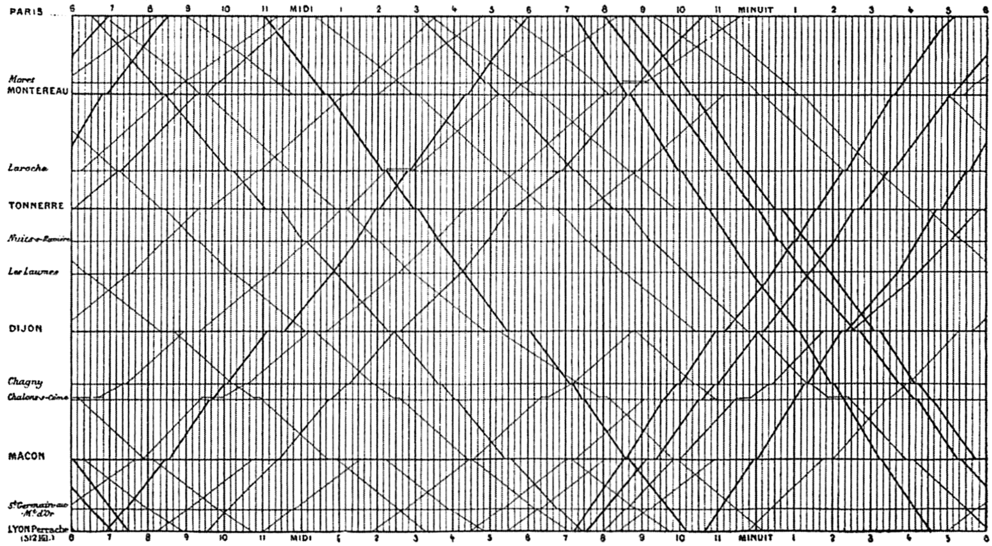
（(4.6) 式の無限小版）は 4 次元時空の幾何学を定義し，特殊相対性理論の出発点となる．線素がすべての慣性系で同じ形をとると要請することによって，慣性系を結びつけるローレンツ変換を 4.5 節で導くだろう[7]．(4.8) 式で決まる幾何学は非ユークリッド的であるが，第 21 章で正確に述べるような意味で平坦である．したがってこれは**平坦時空**と呼ばれる．これは，数学者ミンコフスキー（H. Minkowski）にちなんで**ミンコフスキー空間**と呼ばれることもある．ミンコフスキーは，アインシュタインが特殊相対性理論を導入した後すぐミンコフスキー空間を提案した．

---

[6] 時空の 2 乗距離を決める線素の符号には 2 つのとり方がある．1 つが本書で使う (4.8) 式で，もう 1 つが全体に負をかけた式であり，他書で使われている．時空距離に ds^2 や $d\tau^2$ のような小文字を使い，空間距離には dS^2 や $d\Sigma^2$ のような大文字を使う．

[7] 歴史的には，この変換は 45 ページで述べた仮定からアインシュタインが求めた．それからすぐ時空のアイディアはミンコフスキーによって導入された．今日でも多くの初歩的な教科書がこの歴史の順序にしたがっている．

ボックス 4.2　時空の列車



時空図は特殊相対性理論が現れる以前に使われていた．ここに Marey（1885）から引用したパリ-リヨン線の列車の時刻表を示す．不幸にも，時刻表の制作者は相対論の表記を予期しておらず，時間を横軸にとっている．駅の世界線（静止している）は横軸である．傾いた線は，駅の間をいろいろな速さで運動し，また，駅で停車する列車を表している．速い列車の線の傾きは急であるが，時間軸は 1 時間を単位として測られているので，45° の線は光速ではない．図を 90° 回転させて見ると，特殊相対論の表記法と同じになる．

例 4.1. 時空の地図としての時空図　メルカトル図上の距離と地上の本当の距離の関係を混同することはないだろう．メルカトル図法の地図は地球の幾何学を 1 枚の紙の上に射影したものである．紙には別の幾何学がある（22 ページのボックス 2.3 を見よ）．同じように時空図は [(4.8) 式を参照]

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \tag{4.9}$$

によってまとめられる幾何学の時空をもつ 2 次元部分を，$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ でまとめられる幾何学をもつ紙面上に射影したものである．時空図を表すページ上の距離を時空中の本当の距離とごちゃまぜにしてはいけない．図 4.8 の時空図中の点の間の距離について以下の質問に答えてもらうことであなたの理解度をチェックしてみよう．(4.9) 式の右辺の絶対値の平方根を長さとして，次のページの下の解答であなたの答えをチェックせよ．

(a) 三角形 ABC のどの辺が最も長いか．どれが最も短いか．枡目の長さの単位は何か．

(b) A と C を通る経路の中で最も短いものはどれか．$A\,C$ をつなぐ直線か．それとも ABC の

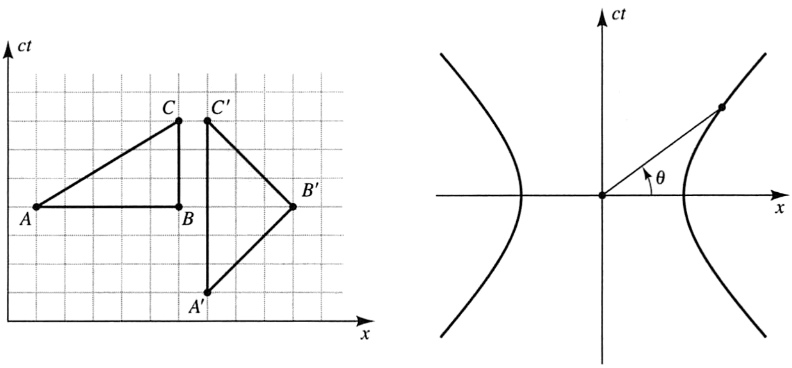


図 4.8 ちょっとした時空幾何学．左図には 2 つの時空図があり，本文にその性質が書かれている．右図には円と対比すべき双曲線の時空図が示されている．それは原点からの時空距離が一定である．図の双曲角 θ は原点から双曲線に沿った時空距離と x 軸から双曲線に沿った時空距離の比である．

各辺を通る経路か．

最後の問題 (c) と (d) として，同じ問題を三角形 $A'B'C'$ について行え．

平面幾何学と時空図の要素には似たところがある．図 4.8 にその 1 つがある．原点を中心とする半径 R の円の類似として，原点から一定の**時空距離**にある点の軌跡があり，これは双曲線 $x^2 - (ct)^2 = R^2$ を構成している．R に対する双曲線に沿った弧の比によって**双曲角**を

$$ct = R\sinh\theta, \qquad x = R\cosh\theta \tag{4.10}$$

で定義する．これが図に示してある．円と双曲線の類似性が理解できるのは有益であるが，あまり頼りすぎてもよくない．

光円錐

$(c\Delta t)^2$ の項の前に負の符号があることが線素 (4.8) の特筆すべき性質である．時空の幾何学は 4 次元ユークリッド幾何学では**ない**．特に，2 点間の距離の 2 乗は正と負，0 になることができる．$(\Delta s)^2$ が正のとき，2 つの点は**空間的に離れている**と言われる．この場合，たとえば $\Delta t = 0$, $\Delta x \neq 0$ である．$(\Delta s)^2$ が負のとき，2 つの点は**時間的に離れている**と言われる．たとえば，2 つの点が同じ場所 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ で，時間が違う（$\Delta t \neq 0$）場合である．$(\Delta s)^2 = 0$ のとき，2 点は**ヌル離れている**と言われる．たとえば，2 点が $\Delta y = \Delta z = 0$ であるが，$\Delta x = c\Delta t$ のとき

(a) 辺の長さは $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = (-3^2 + 5^2)^{1/2} = 4$ である．最も長い辺は AB で，最も短いのが BC である．(b) A と C を結ぶ直線経路が最も短い．(c) 辺の長さは $|A'B'| = |B'C'| = (-3^2 + 3^2)^{1/2} = 0$ で $|A'C'| = 6$ である．最も長い辺は $A'C'$ で，他が最も短い．(d) 最も短い経路は $A'B'C'$ であり，その長さは 0 である．実際，A' と C' を結ぶ直線は近くのどの直線と比べても**最も長い**．4.4 節で見るだろう．

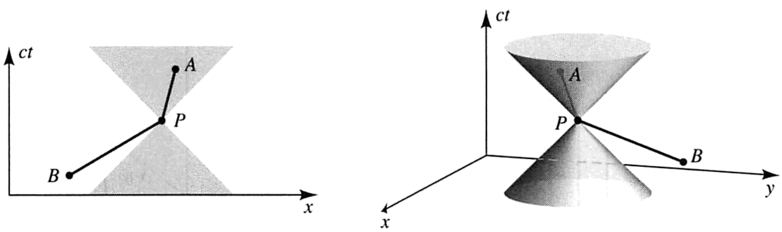


図 4.9 左図の時空図は 4 次元平坦時空の 2 次元のスライス (ct, x) を示している．点 P からのびている 45° の線はヌル離れている点の集合である．これらは，P の光円錐とこのスライスが交差しているところであり，かげのついた楔形の領域がそうであるように，点 A は P と時間的に離れている．上方のかげのついた楔形は未来光円錐の**内部**であり，下の楔形の領域は過去光円錐の**内部**である．かげのない領域は光円錐の**外側**である．かげのない領域がすべてそうであるように，点 B は P から空間的に離れている．右図は同じ点 P を示しているが，空間が 1 次元多い．光円錐は P で放たれる光または P に集まる光のパルスがたどる点の軌跡である．パルスの伝わる面は空間 3 次元で広がる球面または縮まる球面である．空間の次元数が少ないことから，円錐は増大する円形の断面のように見える．

である．ヌル離れた点は速さ c で運動する光線によって結ぶことができる．したがって**光的に離れている**という表現は**ヌル離れている**と同じ意味である．まとめると，間隔には 3 種類ある：

$$(\Delta s)^2 > 0 \qquad \text{空間的に離れている} \tag{4.11a}$$

$$(\Delta s)^2 = 0 \qquad \text{ヌル離れている} \tag{4.11b}$$

$$(\Delta s)^2 < 0 \qquad \text{時間的に離れている} \tag{4.11c}$$

光円錐 時空中の点 P からヌル離れた点の軌跡は**光円錐**になる[8]．P の光円錐は 4 次元時空中の 3 次元面である．その一部（P の未来光円錐）は P から外に向いて運動する光線によって作られる．その次元のうち 2 つは光が進むことのできる方向で，3 番目は光が進んでいる方向である．もう 1 つの部分（P の過去光円錐）は P に収束する光線によって作られる．未来光円錐を，P の時刻と位置から放出された光の球面パルスが時空中を掃く面と考えてもよいだろう．過去光円錐は P に収束する光の球面パルスに掃かれる面である．

言うまでもないことだが，この定義は特別な慣性系を必要としておらず，時空幾何学の距離だけを使っている．しかし光円錐に対する直観を身につけるためには特別な慣性系の時空図を使うとよい．2 つの例を図 4.9 に示した．

時空の各点 P にはそれぞれ光円錐がある．光円錐は時空幾何学の重要な性質である．P から時間的に離れた点は光円錐の**内部**にある（図 4.9 の点 A のように）．P から空間的に離れた点は光円錐の**外部**にある（図 4.9 の B 点）．

光線の経路は時空中で光速に対応する傾き一定の直線である．つまりヌル世界線に沿う．光線

[8] **ヌル円錐**の方を好む著者もいる．光だけが速さ c で進むわけではなく，重力，たぶんニュートリノ（訳注：ニュートリノは質量があるらしく，光速より遅い可能性が高い．）なども光速で進むからである．だが，光円錐には長い歴史があり，我々は光円錐を使い続ける．

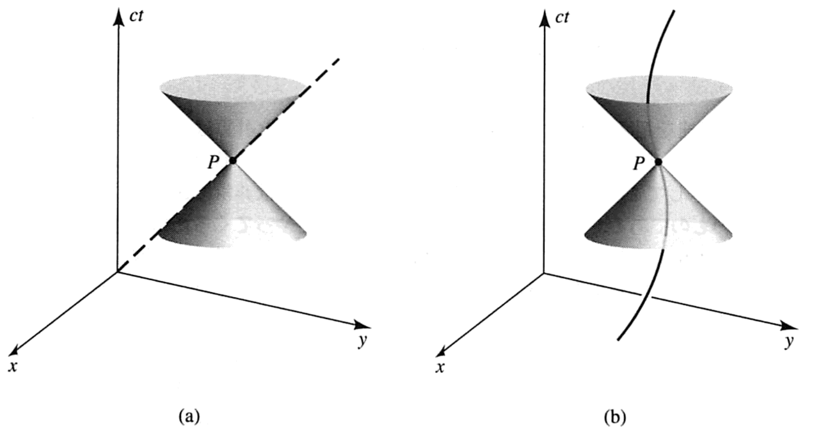


図 4.10 (a) 光線の経路は軌跡上のすべての点で光円錐に接していなければならない. (b) 粒子の時間的経路は軌跡上のすべての点の光円錐の内側になければならない. すべての慣性系で光線は速さ c で運動し, 粒子が c より遅く運動するという不変性を用いた言い方もできる.

の世界線に沿ったすべての点 P で直線はその点の光円錐に**接している** (図 4.10 を見よ). 光線に沿った 2 点間の距離は 0 なのだ.

質量のある静止粒子は**時間的な**世界線に沿って運動し, 常に軌跡上にあるすべての点の光円錐の内側にある (図 4.10 を見よ). その速さはその点における光速よりも小さい. **時間的世界線**

空間的世界線を運動する物体があるということは, これまで考察してきた特殊相対性原理とは矛盾しないであろう. このような仮説上の物体は**タキオン**と呼ばれ, 光速よりも遅く運動することはできないだろう (問題 15). しかしタキオンの存在は物理学の他の原理, つまり因果律や正のエネルギー (positive energy) のようなものと相容れないだろう (問題 5.23 を見よ). しかも誰も観測したことがない. 我々はこれ以降タキオンを無視し特殊相対性理論では粒子は光速以下で運動すると仮定する.

したがって光円錐は時空中の点の間の因果関係を決めることになる. P で起きた事象は未来光円錐上とその内側の点に信号を送ったり影響を及ぼすことはできるが, その外にはできない. P では P の過去光円錐上またはその内側の事象だけから情報を受け取ることはできるが, その外側からはできない. 同時の相対性から, ある事象が他の事象よりも後で起きたということは一般的には意味がないと言える. 事象はある慣性系で空間的に離れた別の事象よりも後に起きているし, 別の慣性系ではその事象よりも前に起きている. しかし 2 つの時間的に離れた事象のどちらが先に起きたかということには意味がある. P の未来の事象は未来光円錐の内側にあるからで, 光円錐の内にあるか外にあるかは時空の性質であり, すべての慣性系で同じである.

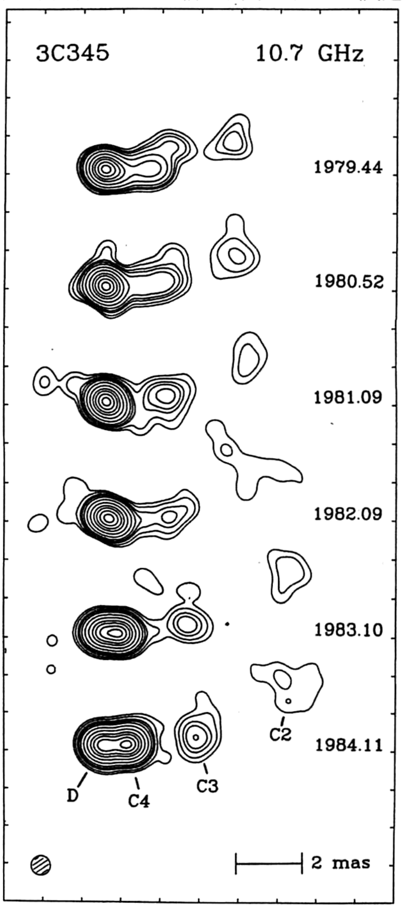
時間的距離と空間的距離の幾何学的違いは測定装置に反映される. **時計**は時間的な距離を測定する装置であり, **ものさし**は空間的な距離を測る装置である. 時間的世界線上の互いに近い 2 点は時間的に離れている ($ds^2 < 0$). 粒子の世界線の距離を測定するために

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2 \tag{4.12}$$

ボックス 4.3　超光速運動

天文学者は電波銀河中に見かけ上光速を超えて運動するガスを観測している．電波源 3C345 はその 1 例である．図はガスの角度位置の時間経過を示しており，Birette, Moore and Cohen（1996）からのものである．ガスの塊は数十光年の大きさがあり，この電波源から出ている．C2 と記されているガスは約 0.5mas/yr の角度変化率で外向きに運動している（1mas≡1 ミリ秒角はロンドンにある 1 本の髪の毛をパリから見た角度に対応する）．

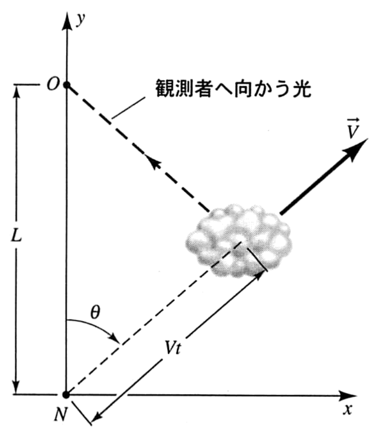
(角速度) × (距離) を使ってこの角速度と距離から得られる線形速度は光速の 10 倍より大きくなる（問題 5）．



しかし，この安易な計算は正しくない．このガスは実はギリギリ光速 c より遅く我々に向かってほとんどまっすぐ運動している．ガスは非常に速く近づいてくるので，光が我々のところまでやってくるために進まなければならない距離は短くなり，ガスが横方向に運動しているときよりも光は速く到達する．これで見かけ上の超光速運動を説明できる．

この効果は 2 番目の図によって定量的に説明することができる．ガスは時刻 $t=0$ に 3C345 の銀河核から出発し，視線方向から角度 θ の方向に速さ V で外向きに運動する．$t_{\rm obs}$ を時刻 t でガスから放出された光を観測者が観測した時刻とする．伝達距離は 2 つの方法で計算され，等しくなければならない：

$$c(t_{\rm obs}-t)=\sqrt{(L-Vt\cos\theta)^2+(Vt\sin\theta)^2}$$
$$\approx L-Vt\cos\theta, \qquad Vt\ll L$$



これを解いて t と $t_{\rm obs}$ の関係を求める：

$$t_{\rm obs}=t[1-(V/c)\cos\theta]+(L/c)$$

観測者が見る横方向の速さ V_T は

$$V_T=\frac{dx}{dt_{\rm obs}}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt_{\rm obs}}=\frac{V\sin\theta}{1-(V/c)\cos\theta}$$

である．θ が小さく，V が c に近いと，V_T は c よりも大きくなり，特相対性理論と矛盾がない．

を導入すると便利である．$d\tau$ は時間の単位を持った実在する量である．時間的曲線上を運動する時計は距離 τ を測定する．この距離の別名を**固有時**といい，世界線に沿って運ばれる時計によって測られる時間である．

4.4 時間の遅れと双子のパラドックス

時間の遅れ

特殊相対性理論の時空幾何学についてのほんの少しの事実から，有名な結果が得られる．最初は**時間の遅れ**の現象である．時間的世界線上の 2 点 A, B 間の固有時 τ_{AB} は (4.8) 式と (4.12) 式の線素から以下のように計算できる：

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \left[dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2\right]^{1/2} \tag{4.13a}$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} dt \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{4.13b}$$

よりコンパクトにまとめると

$$\boxed{\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt' \left[1 - \vec{V}^2(t')/c^2\right]^{1/2}} \tag{4.14}$$

時間の遅れ

となる．$\sqrt{1 - \vec{V}^2/c^2}$ が 1 よりも**小さい**ことから，固有時 τ_{AB} は間隔 $t_B - t_A$ よりも**短い**．これは**時間の遅れ**と呼ばれる現象で，少しあいまいなスローガン「動いている時計はゆっくり進む」にまとめられる．速度 $\vec{V}$ がほぼ一定であると考えられるような十分短い時間間隔 Δt では，(4.14) 式の微分形がよく使われる：

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \vec{V}^2/c^2} \tag{4.15}$$

図 4.11 にこの関係を示した．

(4.14) 式と (4.15) 式は加速度運動している時計でも成り立つことを強調しておきたい[9]．加速度運動する時計の関係を検証した有名なテストをボックス 4.4 に述べた．

例 4.2. 時計のモデル　これまでの時間の遅れの議論では時計のもつ特殊なはたらきに言及してこなかった．時間の遅れは時空幾何学の帰結であり，時計について知るべきすべてのことは，時計が時間的曲線に沿って距離を測定する機械であることだ．とはいえ，時間の遅れが時計の動きからどのように読み取れるのかを知ることは教育的であるし，図 4.6 と図 4.7 で説明したモデルは簡単な例になる．光のパルスが反射しあうことが時計の仕組みとなる．光のパルスが上下の鏡で

[9] ときどき，特殊相対論は一定速度の運動だけしか扱えないという間違った主張に出くわすことがある．これは真実から遠い．こうした誤った考えはおそらく，慣性系は互いに一様運動だけしか違わず，加速度運動していてはいけないという事実のためであろう．しかしこれはニュートン力学でも同じことであるが，加速度運動を説明している．高エネルギー加速器内の高エネルギー粒子の高速運動は特殊相対性原理によって表される加速度運動の日常的な例である．

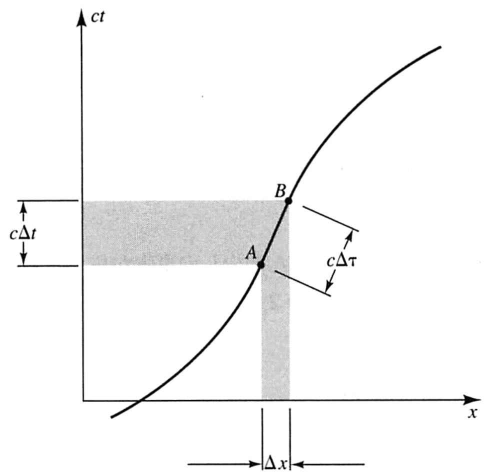


図 4.11　固有時と座標時間．この図の曲線は x 方向に運動する粒子の世界線である．粒子が持っている時計は世界線上で固有時を測定しており，これは時間の単位で表した世界線上の時空距離である．小さな座標間隔 Δt, Δx 離れた時空の 2 つの点 A, B の固有時 $\Delta\tau$ は (4.8) 式と (4.12) 式の平坦時空の線素によって与えられる．Δt は $\Delta\tau$ より長い．つまりこれが時間の遅れである．平面のユークリッド幾何学で判断すると，Δt は $\Delta\tau$ よりも短く見える．しかし，平坦時空の (ct, x) スライスの幾何学はユークリッド幾何学ではない．

次々に行き来することは，時計の世界線に次々に生じる間隔を定義する事象になる（図 4.11 を参照）．これらの事象間の固有時間間隔 $\Delta\tau$ は時計の静止系における事象の時間間隔であり，それは $\Delta\tau \equiv \Delta t = 2L/c$ である [(4.3) 式を参照]．時計が速さ V で運動する系の時間間隔 $\Delta t'$ は (4.4) 式の最初の 2 つの式で $\Delta x'$ を消去することにより求められる．その結果は

$$\Delta\tau = \Delta t'(1 - V^2/c^2)^{1/2} \tag{4.16}$$

となる．これはちょうど速さ V で運動する時計の微分の関係 (4.15) である．この時計のモデルから時間の遅れが生じることがよくわかる．

双子のパラドックス

空間の 2 点間を運動する時計が出発した点に戻ったとしても，その時計によって刻まれる時間は，道のりに依存することを (4.14) 式は示している．これが有名な双子のパラドックスの原因である．

双子のアリスとボブはある慣性系内の空間のある点を時刻 t_1 で静止状態から出発した．これを図 4.12 に示した．アリスは出発点から離れ，その後時刻 t_2 に出発点に戻って静止する．ボブは出発点に止まったままである．ボブの時計は $t_2 - t_1$ 経過した．(4.14) 式の $(1 - \vec{V}^2/c^2)^{1/2}$ は常に 1 よりも小さいため，アリスの時計は常にこれよりも遅く進む．動いている方は止まっている方よりも年をとらないのだ．

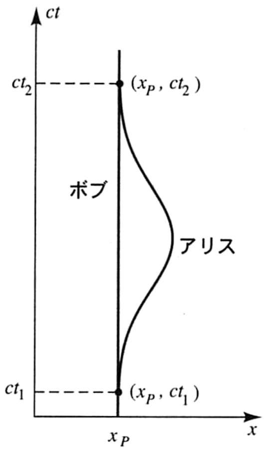


図 4.12 時空の観点から見た双子のパラドックス．アリスとボブは同じ 2 つの時空点を結ぶ別々の世界線を運動している．これらの曲線の長さは違い，それぞれの世界線の時計に刻まれる固有時も違う．

例 4.3. アリスは瞬間的に加速して，一様な速さ $\frac{4}{5}c$ になり，ボブからまっすぐ離れ，瞬時にボブの方に向きを変え，同じ速さ $\frac{4}{5}c$ になりボブのところで瞬時に減速して止まった．ボブの時間は 50 年経っていた．アリスはどれくらい経っていたか．

それぞれが過ごした年月は出発と帰還の間のそれぞれの世界線に沿った固有時であり，(4.14) 式で計算される．瞬間的な加速度の寄与を理解するために加速度は短い時間 2ϵ に渡って一様であるとまず仮定しておき，ϵ が 0 の極限をとる．中間の時刻 t_{mid} より ϵ 前の時刻と ϵ 後の時刻の間で $V = \frac{4}{5}c(t_{\text{mid}} - t)/\epsilon$ である．この間隔の積分 (4.14) への寄与は ϵ に比例するだろうし，ϵ が 0 になると無視できる．アリスがさらに 2 度加速するときにも成り立つ．よって運動する時計は 50 年間静止している時計よりも $[1 - (4/5)^2)]^{1/2} = 3/5$ 倍ゆっくりになり，アリスは 30 歳年をとっていることになる．

辞書 American Heritage dictionary では**パラドックス**は，「見かけ上矛盾しているが，それでも本当に思える表現」と定義されている．アリスの立場から状況を調べるとパラドックスにぶつかる．ボブは一様に運動し，向きを変え一様な速さで戻ってくる．ボブの立場からも同じ状況になっており，アリスは一様な速さで離れ，向きを変え，一様な速さで戻ってくる．しかし結果は対称ではなく，アリスはボブよりも若い[10]．状況も対称ではない．アリスとボブは時空中の 2 つの**異なった**世界線を進み，出発点と到達点を結ぶ距離は**異なっている**．それらの時計はそれぞれ距離を測定し別の値を指す．

---

[10] 地球の時空がわずかに曲がっているときの双子のパラドックスの直接実験は 120 ページのボックス 6.2 を見よ．

ボックス 4.4　CERN のミューオン寿命実験

他の粒子に崩壊する素粒子はある種の時計として使うことができる．崩壊確率は典型的に指数的な崩壊法則にしたがう．ある特定の粒子の崩壊時間は不定であるが，粒子の集団は時間 t の後 $\exp(-t/\tau_p)$ 倍 崩壊せずに残っている．ここで寿命 τ_p は素粒子の種類に特有な量である．

素粒子は粒子加速器の中で光速に近くなる．特殊相対論によれば速く運動する粒子の寿命は静止しているときに比べ $\gamma \equiv (1-\vec{V}^2/c^2)^{-1/2}$ 倍長くなる [(4.14) 式を参照]．もし $\tau_p(\gamma)$ が γ に対応する速さで動く粒子の寿命ならば，

$$\tau_p(\gamma) = \gamma\,\tau_p(1)$$

となる．ここで $\tau_p(1)$ は静止状態の寿命である．加速器中の粒子崩壊を観測すると，時間の遅れを検証することができる．

特に正確な検証が 1970 年代の終わりに CERN にある特別なミューオン貯蔵リングで行われた（Bailey et al. 1977)．ミューオン（$\mu^{\pm}$）は正または負に帯電した素粒子である．寿命 2.2μs でニュートリノと電子または陽電子に崩壊する（どちらになるかはミューオンの電荷による)．ミューオンは貯蔵リング内の 14m の円軌道上を $V/c = 0.9994$ に対応する $\gamma = 29.3$ で運動した．両方の電荷のミューオンが円運動すると，リングを取り巻く計数器が崩壊生成物として電子または陽電子を検出することで寿命が測定される．電子と陽電子の数は時間の関数として記録され，寿命 $\tau_\mu^{\pm}$ や崩壊に影響を与えるその他のパラメータを使って崩壊法則の公式に合わせられる．結果は $\tau_\mu^{+} = 64.419 \pm 0.058\mu$s, $\tau_\mu^{-} = 64.368 \pm 0.029\mu$s であった．静止状態の寿命は時間の遅れから $\tau_\mu^{\pm}(\gamma)/\gamma$ と推測され，独立して測定した静止状態のミューオンの寿命 $\tau_\mu^{\pm}(1)$ と比較された．最もよく合う結果は μ^+ で

$$[\tau_\mu^{+}(1) - \tau_\mu^{+}(\gamma)/\gamma]/\tau_\mu^{+}(1) = (2 \pm 9) \times 10^{-4}$$

であった．これは特殊相対性理論の予言と非常によく一致している．ニュートンの公式 V^2/R を基礎とした評価値でさえもミューオンの向心加速度は大きく（$\sim 10^{18}\mathrm{cm/s^2}$)，時間の遅れは加速度に依存しないことのよい証拠となる．

直線と最長距離

双子のパラドックスは平坦時空の非ユークリッド幾何学の重要な性質を例示している．(4.14) 式が示すように，アリスが点 A と B の間を進むことのできる**すべて**の時間的世界線はボブの直線よりも短い（図 4.12 のような図の中で曲線は長く見えるが，幾何学が非ユークリッドであるため，実際には短い．例 4.1 を思い出せ)．4 次元平坦時空中で直線は時間的に離れた 2 点を結ぶ線の中で最も**長い**[11]．これを確かめるために，時間的に離れた 2 点 A, B を考えよう．ある一定の速度 $\vec{V}$ で運動する世界線が 2 点を結ぶ直線経路になっている．その速度を使って別の慣性系に変換し，2 つの事象が同じ**場所**で起きるようにする．その系は上で考察したボブの系のようなものである．アリスのようなまっすぐでない経路を進む観測者が測定するとボブよりも事象間の時空距離が**短くなる**．時空距離は計算した慣性系に依存しない．3 次元空間で直線はどんな 2 点間の距離と比べても短いが，平坦時空では時間的に離れた 2 点間の距離が最も長い．

[11] 曲がった時空中では直線経路が最大の固有時をもつとは限らない．固有時が極値をとる経路が最も長い．

4.5 ローレンツブースト

慣性系間の関係

ニュートン力学の 3.1 節と特殊相対性理論の 4.3 節の両方で慣性系を構成するときに行った考察から，2 つの慣性系が互いに回転角だけ違うか，ある方向にずれているか，一様運動している（またはそれらの組合せ）という違いがあることがわかった．回転または変位はニュートン力学のときと同じように作用するが，ここでは一様運動に関する変換を探そう．それは (3.6) 式のガリレイ変換を特殊相対性理論に一般化するものである．

線素 (4.8) は 4 つの直交座標 (t, x, y, z) で特殊相対論的時空の幾何学を特徴づける．慣性系ではニュートンの第一法則が (3.2) 式の簡単な形式をとる．線素が直交座標 (t', x', y', z') で同じ形式をとらなければならないことを相対性原理は表している．別々の慣性系をつなぐ変換則は (4.8) 式のような形式を保存するものでなければならず，実際この要請によって決まり，**ローレンツ変換**と呼ばれる．

3.2 節でユークリッド空間の線素

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.17}$$

が (x, y, z) の直交座標の変位と回転によって不変であることをみた．$-(cdt)^2 + dS^2$ と書かれるため，空間変位と回転も特殊相対論的時空の線素 (4.8) 式を変えないだろう．しかし，どのような**新しい**変換が 4 次元平坦時空の非ユークリッド線素の形を保存するのだろうか．新しい変換の最も重要な例は時間と空間の間を回転させるという類似性である．これらは**ローレンツブースト**と呼ばれ，1 つの系から別の系への一様運動に対応する．

わかりやすくするため，(ct, x) 平面における回転との類似性を考えよう．これらは y と z を変えずに ct と x を混ぜ合わせるもので，それは (t, x, y, z) と (t', x', y', z') の間の変換である．(4.8) 式を変えない性質をもつ変換は (3.9) 式のような回転の類似であるが，時空の非ユークリッド的性質のため，三角関数が双曲線関数に置き換わる．具体的に書くと

$$ct' = (\cosh\theta)(ct) - (\sinh\theta)x \tag{4.18a}$$

$$x' = (-\sinh\theta)(ct) + (\cosh\theta)x \tag{4.18b}$$

$$y' = y \tag{4.18c}$$

$$z' = z \tag{4.18d}$$

である．ここで，θ は $-\infty$ から ∞ まで変わりうる（実際，θ は例 4.1 でさらっと述べた意味での双曲的角度である）．変換 (4.18) は線素 (4.8) を変えないことが直接な計算で難なく確かめられる：

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= -(cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 \\ &= -[\cosh\theta(cdt) - \sinh\theta(dx)]^2 \\ &\quad + [-\sinh\theta(cdt) + \cosh\theta(dx)]^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\end{aligned} \tag{4.19}$$

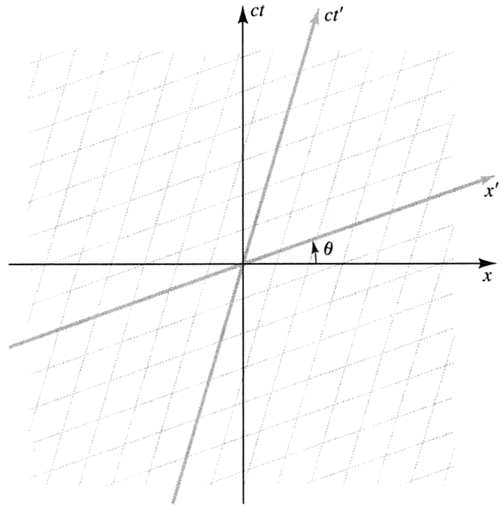


図 4.13　時空図上の座標の変化としてのローレンツブースト．(ct, x) 時空図上にプロットされた (ct', x') 座標のグリッドを示している．グリッドは (4.18) 式で定義される．紙面上のユークリッド幾何学内で (ct', x') 座標は互いに直交していない．しかし時空の幾何学の中では直交している（例 4.1 で考察した時空図と地図の間の類似性を思い出せ）．(ct, x) 軸が直交しているように (ct', x') 軸も直交していなければならない．それはある慣性系と他の慣性系の間に物理的な違いはないからだ．直交性は例 5.2 ではっきりと確かめられる．双曲角 θ は 2 つの座標の間の速度の測定量である．

よって (t', x', y', z') は新しい慣性系をはることができる．

図 4.13 で新しい (ct', x') が古い (ct, x) 軸の上にプロットされている．回転との類似は明らかであるが，重要な差もある．(ct', x') 座標の中の原点 $(x' = 0)$ で静止している粒子の世界線は ct' 軸と一致する．しかし (ct, x) 座標でその粒子は一定の速さで x 軸方向に運動している．速さ v は (4.18b) 式で $x' = 0$ とすることで求めることができ，

$$v = c \tanh \theta \tag{4.20}$$

となる．(ct', x') 座標で別の x' の値のところで静止している粒子は (ct, x) 座標で同じ速さで x 軸方向に一様に運動している．(t, x, y, z) から (t', x', y', z') への変換はある慣性系から x 軸に沿って速さ v で一様運動する別の慣性系への変換である．このような変換は**ローレンツブースト**と呼ばれる[12]．

ローレンツブースト

(4.18) 式をローレンツブーストとするためには，(4.20) 式を使って，θ を v で消去すればよい．

[12] 特に初等的な教科書ではローレンツブーストはローレンツ変換と呼ばれることがある．ここで使われているようにローレンツ変換は時空の線素を一定にするすべての座標変換である．それはローレンツ変換の他に回転や変位も含む．ローレンツブーストはローレンツ変換の特殊な場合である．

公式 $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ を使った簡単な代数計算をすると，

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx/c^2) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$ (4.21a)–(4.21d)

ここで標準的な記号

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \tag{4.22}$$

を使った．逆変換は単に v を $-v$ に変えることで得られる：

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) \tag{4.23a}$$
$$x = \gamma(x' + vt') \tag{4.23b}$$
$$y = y' \tag{4.23c}$$
$$z = z' \tag{4.23d}$$

$v/c \ll 1$ のとき (4.21) 式はガリレイ変換 (3.6) になり，またそうならなければならない．

同時の相対性

図 4.13 に示した 2 つの慣性系の時空図から特殊相対論的効果のいくつかを直接理解することができる．たとえば (ct', x') 系の観測者に対して同時に起きた 2 つの事象 A, B を考えよう．A と B は図 4.14 で示したように，t' 一定の線上にある．しかし，1 つの慣性系に対して x' の負の方向に v で動く慣性系では 2 つの事象の間に時間差 Δt がある．これが 4.2 節で議論した同時の相対性である．時間差 $\Delta t = t_B - t_A$ の数値は 2 つの系をつなぐローレンツブースト，特に (4.23a) 式から計算できる．もし $\Delta x' = x'_B - x'_A$ が (ct', x') 系で同時（$\Delta t' = 0$）の事象間距離とすると

$$\Delta t = \gamma(v/c^2)\Delta x' \tag{4.24}$$

となる．4.2 節で議論したように事象 B は事象 A の後に起きたのだが，(4.24) 式からそれがどれだけかを知ることができる．

例 4.4. 人工衛星位置システムのトーイモデル　簡単のため空間 2 次元に限る．つまり水平方向（x）と鉛直方向（y）である．あなたは地上 $y = 0$ で迷子になった．高さ h の頭上には人工衛星の一群が速さ V で運動しており，慣性系でそれぞれ一様な距離 L_* 離れている（図 4.15 を見よ）．人工衛星には時計があり，それぞれの静止系で同じ時間を刻むように同期化されている．人工衛星は規則的な間隔で時計の時刻と x 方向の位置を発信している．あなたは両側にある近くの 2 つの時計から同時に信号を受ける．それぞれの発信時刻は同じである．これは，あなたが 2 つの時計のちょうどまん中にいることを意味するのだろうか．いや違う．そうであるためには信号が**あなたの**静止系で同時に発信されていなければならないだろう．同時の相対性のため，右の時計からの信号はあなたの系で左の時計からの信号よりも $\Delta t = \gamma(V/c^2)L_*$ 遅れて発信された [(4.24) 式を参照].

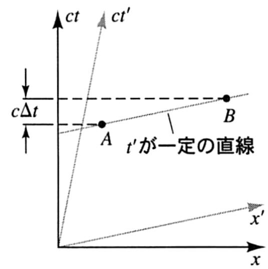


図 4.14 事象 A と B は (ct', x') 系では同時である．なぜなら同じ t' の値で起きているからである．しかし (ct, x) 系では同時ではない．そこでは A は B より以前に起きている．

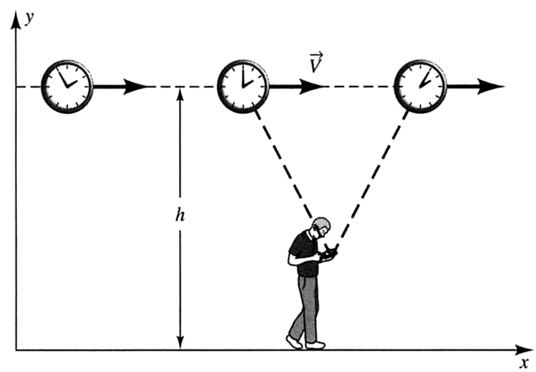


図 4.15 人工衛星位置システムのトーイモデル．人工衛星が頭上を運動しており，それぞれが自身の静止系で発信時刻とそのときの位置 x を発信している．時間の遅れとローレンツ収縮，同時の相対性を考慮に入れることにより，2 つの衛星から同時に受け取る情報を利用して地上の位置は決まる．

したがってあなたはどちらかの時計の方が近くにいて，この情報からそれがどれだけ近いか計算することができる．さらに一般的に，時間の遅れやローレンツ収縮，同時の相対性を考慮に入れることにより，2 つの信号の発信時刻の差からあなたの x 方向における位置を計算することができる（問題 14）．

この例は GPS がヒントになっている．GPS は第 6 章で述べることになるが，ここではいくつかの点で簡略化しており，最も重要なことだが重力を無視している．同時の相対性は GPS でも重要なのだろうか．よりよく理解するために，GPS の数値をこのモデルに入れてみよう．ただしもっと細かい分析が必要だ．上空には 24 機の GPS 人工衛星があり，軌道周期はそれぞれ 12 時間である．地球が静止している慣性系からみると，人工衛星が速さ $V \sim 4\text{km/s}$，中心から $R_s \approx 2.7 \times 10^4\text{km}$ の距離で軌道運動していることになる．人工衛星間の距離はほぼ $2\pi R_s/24 \sim 7 \times 10^3\text{km}$ で，$\Delta t \sim 3 \times 10^{-7}\text{s}$ である．時間の誤差は小さいが，位置の精度にすれば 10m になり，GPS システムは，この距離を光が通過する時間よりもよい精度で測らなければならなず，それは $3 \times 10^{-8}\text{s}$ に

なる．同時の相対性は GPS では重要である．

ローレンツ収縮

長さ L_* の棒を考えよう．この長さは棒の静止系の値である．速さ V で運動している慣性系で測ると棒の長さはどうなるか．図 4.16 の時空図からなぜ L が L_* と違うかがわかる．棒の長さはその端で**同時に** 起きた 2 つの事象間の距離である．しかし同時の概念は慣性系で違うため，棒の長さの測定値も違う（このような測定のよい例については問題 17 を見よ）．棒が運動している系における長さ L は $t' = 0$ における棒の両端の時空距離であり，図 4.16 の中では ●で示してある．この距離は静止系で (4.6) 式から計算することもでき

$$L^2 = L_*^2 - (c\Delta t)^2 \tag{4.25}$$

である．(4.21a) 式から $t' = 0$ は $t = (V/c^2)x$ の直線であり，よって $\Delta t = (V/c^2)L_*$ となる．したがって

$$\boxed{L = L_*\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{4.26}$$

ローレンツ収縮

となる．これがローレンツ収縮である．

速度の合成

慣性系間をつなぐローレンツブーストを習ったので，ニュートン的な速度の合成 (4.2) を相対論的法則に置き換えることにする．粒子の運動が $x(t), y(t), z(t)$ で表される系と，$x'(t'), y'(t'), z'(t')$ で表される系を考えよう．第二の系は第一の系の x 軸に沿って速度 v で運動している．(4.21) 式

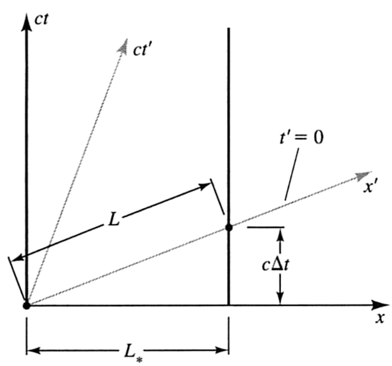


図 4.16 長さのローレンツ収縮．図は，座標 (ct, x) によって張られる棒の静止系で x 軸方向に向いた端の世界線を表している．世界線間の距離 L_* は棒の静止系の長さである．同じ図に，棒の静止系に対して V の速さで運動する慣性系 (ct', x') の軸も示してある．この系で，棒は速度 $-V$ で x' 軸方向に運動している．この系における棒の長さ L は時刻 t' における両端の距離である．時刻 $t' = 0$ における両端の事象はこの図で ●によって表されている．長さ L は図の長さ L_* よりも長く見えるけれども，時空が非ユークリッドであるため，実際は短い．

から第一の慣性系の粒子の速度 $\vec{V} = d\vec{x}/dt$ と第二の慣性系の速度 $\vec{V}' = d\vec{x}'/dt'$ の間の関係を計算することができる．つまり

$$V^{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - v/c^2 dx)} \tag{4.27}$$

である．右辺の分子分母を dt で割ると

$$V^{x'} = \frac{V^x - v}{1 - vV^x/c^2} \tag{4.28a}$$

が得られる．同様に

$$V^{y'} = \frac{V^y}{1 - vV^x/c^2}\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{4.28b}$$

$$V^{z'} = \frac{V^z}{1 - vV^x/c^2}\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{4.28c}$$

を得る．これが，ニュートン的な速度の合成 (4.2) を一般化した**相対論的**規則であり，$v/c \ll 1$ でニュートンの合成則になる．

例 4.5. 光速はすべての慣性系で同じである.　ある慣性系で粒子が x 軸方向に速さ c で運動している．この慣性系に対して x 軸方向に v で運動する慣性系で粒子の速度はどうなるか.

この質問の解答は c となるが，(4.28a) 式に $V^x = c$ を直接代入することでも得られる：

$$V^{x'} = \frac{c - v}{1 - v/c} = c \tag{4.29}$$

4.6　単位系

鋭い読者は t の代わりに ct を使うことで対称性が現れることを見逃さなかったであろう．その理由は線素 (4.8) の中に見ることができる．そこには定数 c が空間の単位と時間の単位の間の変換係数，毎秒約 3×10^{10} センチメートルとして現れている．時空の視点からすれば，c の値は歴史的偶然で決まったものである．それはあたかも空間幾何学を扱うのに y 方向をインチで，x と z 方向をセンチメートルで扱う習慣があるかのようである．空間で互いに近い 2 点の間の距離が

$$dS^2 = C^2 dy^2 + dx^2 + dz^2 \tag{4.30}$$

であるかのようである．ここで $C = 2.54\ \mathrm{cm/in}$ である．空間と時間は 1 つの時空連続体中における別々の方向なので，センチメートルまたは秒などの同じ単位で測ることが望ましい．定数 c はこれら 2 つの単位の変換係数となる．今日では光速は測定されるものではなく，変換係数[13]

$$c = 299792458.0000\ldots \mathrm{m/s} \tag{4.31}$$

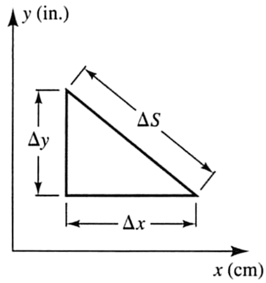


図 4.17 もし y 方向の距離がインチで測られ x 方向の距離がセンチメートルで測られたとすると，ピタゴラスの定理は $\Delta S^2 = C^2\Delta y^2 + \Delta x^2$ となるだろう．ここで $C = 2.54\mathrm{cm/in}$ である．

として厳密に**定義される**ものである．（0 がずっと続く！）

時間を長さの単位で測定することは，力学における伝統的な質量距離時間（$\mathcal{MLT}$）単位系から質量距離（$\mathcal{ML}$）単位系に変えることを意味する．付録 A にいろいろな単位系の考察と本書で使われる単位系の間の変換規則を付けた．

空間と時間を長さの単位で測ることは我々の公式のいたるところで $c = 1$ とおくことである．たとえば時間がセンチメートルで測られる単位では

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.32}$$

であり $d\tau^2 = -ds^2$ で，速度は単位がない．ローレンツブーストの (4.21) 式は

$$t' = \gamma(t - vx) \tag{4.33a}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{4.33b}$$

$$y' = y \tag{4.33c}$$

$$z' = z \tag{4.33d}$$

となる．$\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$ である．こうした理由により $\mathcal{ML}$ 単位系は非公式には $c = 1$ 単位系と呼ばれる．$c = 1$ 単位系をこれ以降の本書で使うことにする．

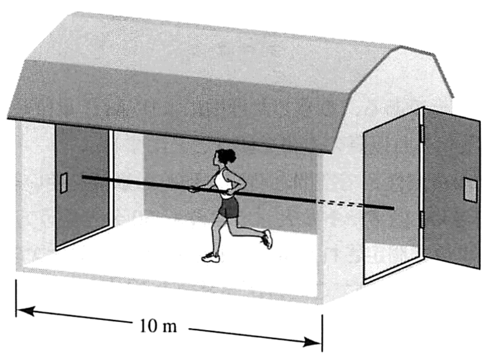
多くの実用的な理由から慣性系で空間と時間に別々の単位を使い続けた方が便利なことがある．たとえば講義の長さが 8990 億メートルと言うよりも 50 分と言う方が簡単である．時間の単位で測定された量や空間の単位で測定された量だとわかれば，c はいつでも戻すことができる．その処方箋は付録 A にあるが，以下の例でこの方法がどのように使えるかを説明した．

[13] 執筆時で，1 秒はセシウム原子の 2 つのエネルギー最低状態の間の遷移放射の 9192631770 サイクルとして定義され，1 メートルは，(4.31) 式によって秒を使って定義される．

例 4.6. c を戻す　時間がセンチメートルで測られた単位系の式は正しい場所に変換係数 c をつけることによって，秒で測かられた単位系にかわる．ローレンツブーストの一部 (4.33a) を例にあげよう．$\mathcal{MLT}$ 単位系で速さの次元は $\mathcal{L}/\mathcal{T}$ である．(4.33a) 式の次元のない v は v/c に置き換えられなければならない．これは γ の定義にも含まれる．左辺の単位が $\mathcal{T}$ になり，(3.38a) 式の右辺のすべての項の単位が正しくなるために，x を x/c に置き換えなければならない．その結果が (4.21a) 式である．

問題

1. [B,S] フランス新幹線 TGV（train à grande vitesse）はパリ（ガール・ドゥ・リヨン）を 8:00 に発ち，リヨン（パール・デュー）に 10:04（24 時間時計）に着く．新幹線は途中どこにも停車しないとして，52 ページの鉄道時空図の紙面上に電車の世界線をプロットせよ．パリとリヨンの距離を 472km とすると，新幹線の平均の速さはどうなるか．
2. 固有長さ L の宇宙船が地球から鉛直方向に $4c/5$ の速さで発射された．宇宙船のロケットと地球に設置された時計が $t = 0$ になったとき，ロケットの最後尾から光信号が発信された．(a) ロケットの先頭に光が到着したのはロケットの時計でいつか．(b) 地球の時計ではいつか．
3. ある走者が長さ 20m のポールを持って長さの方向にあまりに速く走ったため，実験室系では 10m の長さになってしまった．走者は奥行き 10m の小屋に表のドアを通ってポールを入れた．ポールの先端が裏のドアに達したちょうどその瞬間，表のドアが閉じ，ポールが 10m の小屋に収まり，裏のドアが開き，走者は出ていった．だが走者の視点ではポールは 20m の長さで小屋はたった 5m である．したがって，ポールは決して小屋に収まらない．この見かけ上のパラドックスを定性的に，時空図を使って説明せよ．



4. 人工衛星が赤道の地表から 200km の距離にある円軌道上を地球と同じ方向に運動している．このような人工衛星の時計は地球の時計に比べ 1 日に何秒遅れるか（特殊相対論効果だけを計算せよ）．

5. [B,E] 電波源 3C345 は宇宙膨張にしたがっており，その距離は，後退速度と赤方偏移と我々の宇宙の仮定から決められる（もし宇宙論についてほとんど習ったことがなければ第 19 章の問題 1 を解け）．しかし距離を求めるためのアイディアはハッブルの法則から得られる．それによると距離 d と後退速度の観測値 V の間には

$$V = H_0 d$$

の関係がある．ここで $H_0 \approx 72(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$ はハッブル定数である（Mpc メガパーセクのような天文学的単位については裏表紙を見よ）．3C345 の V は約 $0.6c$ である．56 ページのボックス 4.3 とこれらの事実を使い，（事実に反して）C2 が視線方向を横切っていると仮定しその速度の粗い評価をせよ．

6. 例 4.2 で，動いている時計における時間の遅れがどのように理解されるのかがわかった．そこでは運動方向に沿って置かれた 2 つの鏡からなる時計のモデルがどのように作動するかがわかるようになっていた．運動方向に垂直に置かれた同じ時計を使っても同じ結果が得られることを示せ．

7. [S,P] (4.4) 式で速さ V で運動している 2 台の鏡の間を行き来する光のパルスの移動時間 $\Delta t'$ を求めた．この時間は鏡が静止している系における移動時間 $\Delta t(4.3)$ とは違う．絶対時間を使うニュートン物理学ではこれらの時間は必ず一致するだろう．ニュートン物理学の原理を使って (4.4) 式の $\Delta t'$ を求める解析を行い，鏡の静止系がエーテルの静止系であると仮定し，(4.4) 式が成り立つことを示せ．

8. [S] 図 4.8 に示した三角形 ABC の 2 つの辺 AC と AB の間の双曲角を計算せよ．

9. 双子 ジョーとエドを考えよう．ジョーは**彼の**時計で測って 7 年間 $24c/25$ の速さでまっすぐに進み，向きを変え半分の速さで戻ってくる．エドは家にいる．エドの視点からジョーとエドの運動を示す時空図を作れ．

10. スタニスワフ・レム（Lem, S.）『星からの帰還（Return from the Stars)』は双子のパラドックスで双子の一人が帰還したとき直面するであろう問題を扱っている．以下の一節がある：

    くいいるような彼女の眼が光っていた．

    「百二十七年前だった，当時三十歳のぼくは，宇宙探査隊……フォーマルハウト（南のうお座のアルファ星）へ向かうパイロットだった．二十三光年の星だよ．往復の旅行に地球時間で百二十七年，宇宙船時間で十年かかって四日前やっともどってきたばかりだ．……ぼくの宇宙船プロメテウス号は月に残して，そこからきょう飛んできたんだ」[14]

    すべての加速度が瞬間的で，**プロメテウス号**の速度がその間で一定だと仮定すると，地球からフォーマルハウトまでどんな速度で旅行をしたことになるか．

11. [C] アリスとボブは半径 R の円環の周囲を互いに反対方向に運動している．円環が静止している慣性系で 2 人は一定の速さ V で運動している．2 人は時計を持っており，円環上の

[14] 『星からの帰還』スタニスワフ・レム 著, 吉上 昭三（翻訳）早川書房 1977 年, p.42

同じ点に 2 人が来た瞬間，時計の針を 0 に合わせた．ボブの予測では，次にすれ違ったとき，アリスが彼に対して運動していることから，時間の遅れにより彼女の時計は彼の時計よりも遅れる．一方，アリスの予測では，同じ理由によりボブの時計が遅れる．二人ともが正しいはずがない．何が間違っているのか．時計は本当はどうなっているのか．

12. (a) 3 次元平坦空間のどんな 2 点間においても，直線経路 ($dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) の距離が最も短いことを明確に示せ．

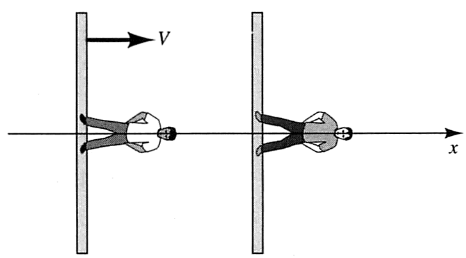
    (b) 平坦時空では空間的に離れた 2 点を結ぶ経路のうち直線が最も短いか．

13. ある慣性系で 2 つの事象が 3m 離れて同時に起きた．この実験室系に対して運動している系で，1 つの事象が別の事象より 10^{-8} 秒遅れて起きた．この運動している慣性系でこの 2 つの事象は空間的にどれだけ離れているか．この問題を 2 通りの方法で解け．第一に 2 つの慣性系をつなぐローレンツブーストを使う方法，第二に 2 つの事象の**時空**距離の不変性を使う方法．

14. [C] この問題は，例 4.4 で考察した人工衛星位置システムのトーイモデルに関するものである．近くにある 2 つの衛星 A, B から信号を同時に受け取って，衛星の位置が x'_A, x'_B で，同様に時刻 t'_A, t'_B も受け取り $t'_A = t'_B$ であったとしよう．時刻と位置は人工衛星の静止系で決められ，衛星時計の時刻はすべて同期化されている．あなた自身の位置を決めるための条件を求めよ．それを評価し，人工衛星の中間点からあなたの位置のずれを V/c の 1 次まで求めよ．V は人工衛星の速さである．

15. 速度の合成 (4.28) 式から以下のことを示せ．(a) もし 1 つの慣性系で $|\vec{V}| < c$ ならば，他のどんな慣性系でも $|\vec{V}| < c$ である．(b) もし 1 つの慣性系で $|\vec{V}| = c$ ならば他のどの慣性系でも $|\vec{V}| = c$ である．(c) もし 1 つの慣性系で $|\vec{V}| > c$ ならば，他のどの慣性系でも $|\vec{V}| > c$ である．

16. **相対運動と垂直な方向の長さは変わらない．**



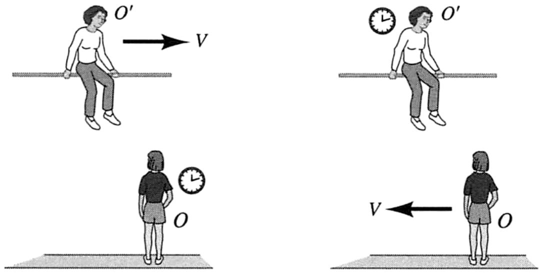
    2 つのメートル尺を考えよう．1 本は止まっており，もう 1 本はここに示したように 1 つ目の尺に直交する軸方向に運動しており，その方向は自身にも垂直である．それぞれのメートル尺の中心には観測者が立っている．

    (a) x 軸についての対称性から，観測者はともにメートル尺の両端が同時にすれ違うのを見ることと，もし一方のメートル尺が他よりも長ければ，長い方がどちらになるのかを互いに認めあえるかどうか議論せよ．

    (b) 相対性原理を破らなければ長さは同じになることを議論せよ．

17. **ローレンツ収縮の別の導出．** 例 4.2 で時計モデルの動作が時間の遅れとどのように整合性を

とるのか示した．この問題の目的は，ローレンツ収縮が長さの測定の理想的な方法とどのように整合性をとるかを示すことである．



速さ V で運動する棒の長さは，固定された点を速さ V で通過するのにかかる時間から決められる（左図）．静止した棒の長さは固定された物体が速さ V で端から端まで動くのにかかる時間を測定することで求められる（右図）．2 つの時間の間の時間の遅れを考慮することで，運動する棒の長さが静止の長さからローレンツ収縮を受けたものに一致することを示せ．

18. [S] 時間的に離れた 2 つの事象に対して，$\Delta t \neq 0$, $\Delta\vec{x} = 0$ となる慣性系が存在することを示せ．空間的に離れた 2 つの事象に対して $\Delta t = 0$, $\Delta\vec{x} \neq 0$ となる慣性系が存在することを示せ．

19. [C] フィルム面に対して平行に光速に近い速さで一様に運動する物体の写真を撮ると，収縮して見えるというよりも回転しているように写っている．なぜか説明せよ．（物体はカメラのレンズから小さい角度に見えると仮定せよ．）

第5章

特殊相対論的力学

ニュートン力学の法則は前章で導入した特殊相対論の原理と矛盾のないように書き換えなければならない．この章では4次元時空の視点から特殊相対論的力学を述べる．ニュートン力学は，この特殊相対論的力学の近似であり，ある慣性系で運動の速さが光速よりずっと遅いときに成り立つ．ここでは4元ベクトルの中心となる考えから始める．

5.1 4元ベクトル

4元ベクトルは4次元平坦時空の中の向きを持った線分として定義される．3次元ユークリッド空間で向きのついた線分として3次元ベクトル（この章では3元ベクトルと呼ばれる）が定義されるのと同じだ．太文字で4元ベクトルを表す．たとえば3元ベクトル $\vec{a}$ と区別するために $\mathbf{a}$ とする．こうした4元ベクトルと3元ベクトルを区別する用語はこの章だけで，以降の章ではこの2つに対して**ベクトル**という言葉を使うことにするので，文脈から区別してもらいたい．

4元ベクトルは通常のベクトルの規則にしたがい，定数倍したり加減できる（図5.1を見よ）．

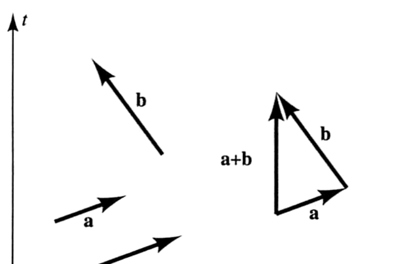


図5.1 4元ベクトルの和と定数倍．2つの4元ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を加えるために，三角形ができるまで平行移動する．和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ は1つ目のベクトルの終点から2つ目の始点に向いた直線区間である．4元ベクトルの定数 α 倍は方向が同じでその長さが α 倍の4元ベクトルである [1]．

[1] ヌルベクトルに同じことをするためには，まず長さが0でない2つの4元ベクトルの和として書き，α 倍し，そして加え合わせる．

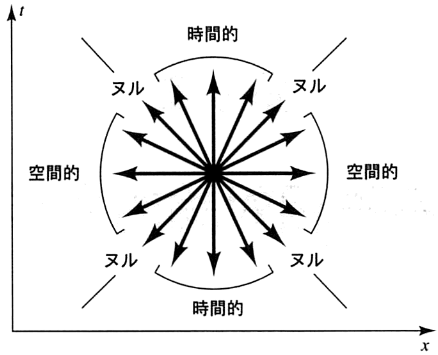


図 5.2 時間的，空間的，ヌル 4 元ベクトル．3 種類の 4 元ベクトルが時空中でそれぞれ時間的，空間的，ヌル的方向に向いている [図 4.9 を参照]．ヌル 4 元ベクトルの長さは時空の非ユークリッド幾何学の中で **0** であることに注意する．

4 元ベクトルの**長さ**はベクトルの始点と終点間の時空距離の絶対値である．始点と終点が空間的に離れている 4 元ベクトルは**空間的**と呼ばれ，時間的に離れている場合に**時間的**と呼ばれ，ヌルのときは**ヌル**と呼ばれる．ヌル 4 元ベクトルの長さは 0 である．いろいろな 4 元ベクトルを図 5.2 に示した．

4 元ベクトルの定義や和，定数倍の規則，長さの計算はどれも特別な慣性系を必要としていない．それらは**不変**である．つまりすべての慣性系で同じである．力学の法則が 4 元ベクトルで定式化されると，すべての慣性系で同じ形をとり，その予測は特殊相対性原理に合致するであろう．ここに 4 元ベクトルの実用性と重要性がある．

4 元ベクトルと成分

基底 4 元ベクトルを慣性系内で t, x, y, z 座標軸方向に単位長さをもつものとして導入することができる．これを図 5.3 に示した．これらの基底 4 元ベクトルを $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ または $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ と記す．ここで 0 は t を表し，1 は x といった風に表している．これら 4 つのベクトルは 4 元ベクトルの**基底**と呼ばれる．それは図 5.4 に示したように，すべての 4 元ベクトルはこれらの線形結合として表すことができるからである：

$$\mathbf{a} = a^t\mathbf{e}_t + a^x\mathbf{e}_x + a^y\mathbf{e}_y + a^z\mathbf{e}_z \tag{5.1}$$

4 元ベクトルの成分

(a^t, a^x, a^y, a^z) または (a^0, a^1, a^2, a^3) は 4 元ベクトルの成分と呼ばれる[2]．成分にはいつも添字をつけて書いておく[3]．

[2] 数学の予備知識が少しはある読者はいろいろな**種類の** 4 元ベクトルを区別できることを知っているかもしれない．この区別は第 20 章まで必要ないだろう．成分の定義はここでするようなものだけにしておく．

[3] もうここまでで太文字を手書きするのは難しいので 4 元ベクトルをどのように書いたらよいか困っているかもしれない．電子組版以前には印刷所へ太字であることを指示するのに文字の下に波線を書いたが，これと同じことをしてもよい．その場合は，(5.1) 式は

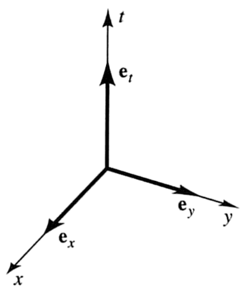


図 5.3　座標軸に沿った基底 4 元ベクトル.

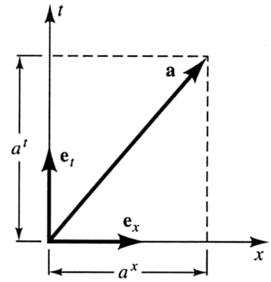


図 5.4　4 元ベクトル $\mathbf{a}$ は座標軸に沿った成分 (a^t, a^x, a^y, a^z) によって表すことができる.

(5.1) 式を表す便利な方法は

$$\mathbf{a} = a^0\mathbf{e}_0 + a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \tag{5.2}$$

のようなものである．または

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=0}^{3} a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{5.3}$$

である．(5.3) 式は**和の記法**を使うとさらにコンパクトに書くことができる．これは，上下に同じ添字が繰り返されるときは，和をとるというものである．ギリシャ文字の添字は 0 から 3 まで，ローマ字は 1 から 3 までの和をとる．このことから　**和の記法**

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{5.4}$$

は (5.3) 式と同じである．同様に，3 元ベクトルに対して

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i \tag{5.5}$$

である．ここで $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ は $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ と一致する．繰り返される添字は和を表し，(5.4) 式は

$$\mathbf{a} = a^\beta \mathbf{e}_\beta = a^\gamma \mathbf{e}_\gamma =, \ldots \tag{5.6}$$

とも書ける．したがって繰り返される添字は**ダミーの添字**または**和の添字**と呼ばれる．7.3 節で総和の規約について多くを述べなければならないだろう．

4 元ベクトルの成分と基底 4 元ベクトルの成分を決めることは 4 元ベクトルそのものを決めることになる．今後のため成分の表示法をいろいろ並べておくと便利である：

$$a^\alpha = (a^t, a^x, a^y, a^z), \qquad a^\alpha = (a^t, a^i), \qquad a^\alpha = (a^t, \vec{a}) \tag{5.7}$$

$$\underset{\sim}{a} = a^t \underset{\sim}{e}_t + a^x \underset{\sim}{e}_x + a^y \underset{\sim}{e}_y + a^z \underset{\sim}{e}_z$$

となるだろう.

例 5.1. 変位 4 元ベクトル　4 元ベクトルの簡単な例は，図 5.5 に示したような 2 つの事象 A, B 間の変位 4 元ベクトル $\Delta\mathbf{x}$ である．

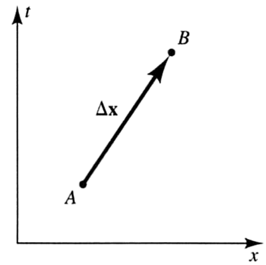


図 5.5　時空中の 2 点 A, B の間の変位 4 元ベクトル $\Delta\mathbf{x}$.

もし (t_A, x_A, y_A, z_A) がある慣性系で事象 A の座標で，(t_B, x_B, y_B, z_B) が事象 B の座標ならば，それらの間の変位 4 元ベクトル $\Delta\mathbf{x}$ は $(t_B - t_A, x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ である．これはよりコンパクトな形で

$$\Delta x^\alpha = x_B^\alpha - x_A^\alpha \tag{5.8}$$

と書くことができる．この式は α の値の 1 つ 1 つ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ に対して，4 つの方程式をまとめたものである．添字 α は**自由な添字**と呼ばれる．「自由」という言葉を使うのは 0 から 3 までのどんな値でもとれ，それぞれが別々の方程式になっているからだ．

慣性系が違えば座標の基底 4 元ベクトルが違うため，4 元ベクトルの成分も違ってくる．4 元ベクトルの成分は，変位 4 元ベクトルの成分がそうであるように，慣性系の間で変わる．たとえば，x 軸に沿って速さ v の一様運動で関係づけられている 2 つの慣性系に対して (4.21) 式のように，4 元ベクトル $\mathbf{a}$ の成分は

ベクトルのローレンツブースト

$$a^{t'} = \gamma(a^t - va^x) \tag{5.9a}$$

$$a^{x'} = \gamma(a^x - va^t) \tag{5.9b}$$

$$a^{y'} = a^y \tag{5.9c}$$

$$a^{z'} = a^z \tag{5.9d}$$

のように変換する（もし (4.21) 式の c がどこに行ったのかと不思議に思うのなら，前章の最後で，これ以降で $c = 1$ の単位系を使うと述べたことを思い出せ)．

スカラー積

スカラー積（内積）は 3 元ベクトルでそうであったように，4 元ベクトルの計算でも重要な概念である．2 つの 4 元ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のスカラー積を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ で表す．4 元ベクトルの場合もスカラー積における通常の数学規則を満たす：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{5.10a}$$
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{5.10b}$$
$$(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{5.10c}$$

ここで **a**, **b**, **c** は3元ベクトルでもよく，α は任意の定数である．

基底4元ベクトルのすべて組についてスカラー積がわかっていれば，4元ベクトルのスカラー積を計算することは簡単である．もし $\mathbf{a}=a^\alpha\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{b}=b^\beta\mathbf{e}_\beta$ ならば

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=(a^\alpha\mathbf{e}_\alpha)\cdot(b^\beta\mathbf{e}_\beta)\\&=(\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta)a^\alpha b^\beta\end{aligned} \tag{5.11}$$

である（ここには2回の和がある．1度は α について，もう1度は β についてである）．慣性系の直交軸 (t,x,y,z) を向いている基底4元ベクトルのスカラー積 $\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta$ には特別な記法が使われる：

$$\eta_{\alpha\beta}\equiv\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta \tag{5.12}$$

平坦時空の計量

その結果 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\eta_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta} \tag{5.13}$$

ベクトルのスカラー積

と書くことができる．ここでは α と β について和をとる．$\eta_{\alpha\beta}$ がわかると，すべてのベクトルのスカラー積は決まる．

変位4元ベクトルとそれ自身のスカラー積が2点間の距離の2乗となるという要請により $\eta_{\alpha\beta}$ が決まる：

$$(\Delta s)^2=\Delta\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{x} \tag{5.14}$$

したがってスカラー積によって定義される4元ベクトルの長さは終点と始点の長さとして定義される長さと一致する．(4.6) 式の $(\Delta s)^2$ とこれを比べ，(5.12) 式と (5.10a) 式の結果として $\eta_{\alpha\beta}=\eta_{\beta\alpha}$ に注意すると

$$\boxed{\eta_{\alpha\beta}=\begin{matrix} \\ 0\\1\\2\\3\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}0&\;\;1&\;\;2&\;\;3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{matrix}} \tag{5.15}$$

となる．ここで $\eta_{\alpha\beta}$ は対角対称行列として表されている．(5.14) 式を眺めると行列 $\eta_{\alpha\beta}$ を和の記号とともに使うことにより，平坦時空の線素 (4.8) を特にコンパクトにまとめた形

$$\boxed{ds^2=\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} \tag{5.16}$$

平坦時空の線素

に表すことができる．この役割から $\eta_{\alpha\beta}$ は平坦時空の計量と呼ばれる．

(5.15) 式を (5.13) 式に代入すると，2つの4元ベクトルのスカラー積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ と同等な式が得られる：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -a^t b^t + a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z, \tag{5.17a}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3, \tag{5.17b}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -a^t b^t + \vec{a}\cdot\vec{b} \tag{5.17c}$$

定義が特別な系を参照していないということから，スカラー積はすべての慣性系で同じになる．別の慣性系で $\mathbf{a}$ の成分が $(a^{t'}, a^{x'}, a^{y'}, a^{z'})$ で，$\mathbf{b}$ の成分が $(b^{t'}, b^{x'}, b^{y'}, b^{z'})$ となるとき，数値 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は同じであり

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -a^{t'} b^{t'} + a^{x'} b^{x'} + a^{y'} b^{y'} + a^{z'} b^{z'} \tag{5.18}$$

となる．このことは定義からわかるが，(5.9) 式からも確かめられる．

例 5.2. **ローレンツブーストでは座標軸の直交性が保たれる**　図 4.13 の (t', x') 軸では（$c = 1$ が使われている），印刷されたページの幾何学中でその直交性が明らかではないが，時空の幾何学中で軸は直交している．(t, x) の中でこれをはっきり見るために，t' に沿った単位変位 4 元ベクトル $\mathbf{a}$ と x' 軸に沿った単位変位 4 元ベクトル $\mathbf{b}$ を考えよう．4 元ベクトルの (t', x', y', z') 成分を $a^{\alpha'} = (1, 0, 0, 0)$, $b^{\alpha'} = (0, 1, 0, 0)$ とする．(t', x', y', z') で表すと (5.17) 式から $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ なので，これらの 4 元ベクトルは直交する．このことからどんな慣性系でも直交することがわかるのだが，教育的には，(t, x, y, z) 系で計算して明らかにした方がよい．(5.9) 式から (t, x, y, z) 成分は

$$a^\alpha = (\gamma, v\gamma, 0, 0), \qquad b^\alpha = (v\gamma, \gamma, 0, 0) \tag{5.19}$$

である．(5.17) 式から再び

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\gamma(v\gamma) + (v\gamma)\gamma + 0 + 0 = 0 \tag{5.20}$$

が得られる．

5.2　特殊相対論的運動学

4 元ベクトルの考え方を導入したので，それらを使って時空中で粒子の運動を記述しよう．これが特殊相対論的力学の主題である．

粒子が時空中を時間的世界線にしたがって運動している．この曲線はある慣性系で時間 t の関数として 3 つの座標 x^i によって決まる．世界線を 4 次元で表すよりよい方法は，パラメータ σ の 1 価関数として粒子の 4 つすべての座標 x^α を与えることである．世界線を動くと σ の値が変わる（図 5.6 を見よ）．σ の各々の値に対して 4 つの関数 $x^\alpha(\sigma)$ は曲線上の点を定める．いろいろなパラメータが可能だが，自然なものは固有時である．これは任意の出発点から世界線に沿って測られた時空距離 τ を与え，正にも負にもなる．したがって世界線は

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau) \tag{5.21}$$

によって記述される．4.3 節で考察したように，時計は時間的世界線に沿って距離を測る装置である．距離 τ は世界線に沿って運ばれる時計で測定することができるであろう．それは世界線に沿った**固有時**と呼ばれる．

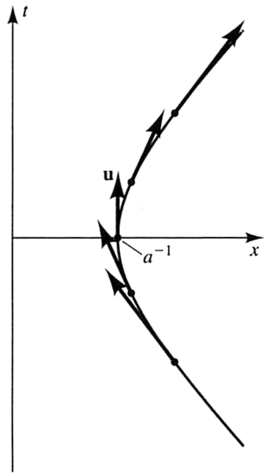


図 5.6 単純な加速度世界線．固有時 τ をパラメータとして (5.24) 式で表される世界線が決まっているところを示している．点（●）は $a\tau$ を -1 から 1 まで 1/2 ずつ増やした位置を示している．これらの点で 4 元速度 $\mathbf{u}$ を半分の大きさで示してある．$a\tau$ が 1.5 と -1.5 の次の点はグラフから出てしまう．時空の幾何学の中で，点は曲線上で等間隔にあり，4 元速度はすべて同じ長さである．なぜ点の間隔が広がって行き，紙面上で $|\tau|$ が大きくなるとベクトルが長くなるように見えるのか説明できるだろうか．

例 5.3. 加速する世界線 粒子が x 軸に沿った世界線

$$t(\sigma) = a^{-1}\sinh\sigma, \qquad x(\sigma) = a^{-1}\cosh\sigma \tag{5.22}$$

上を運動している．a は長さの逆数の次元をもった定数である．パラメータ σ は $-\infty$ から ∞ まで変わる．σ のそれぞれの値に対して (5.22) 式は時空中の点 (t, x) を定める（この例では y と z は重要ではなく，以下では現れないようにする）．σ が変わると世界線は時空中を進む．

図 5.6 には時空図上の世界線が描かれている．これは双曲線 $x^2 - t^2 = a^{-2}$ である．また別に，世界線は $x(t) = (t^2 + a^{-2})^{1/2}$ でも表されるが，(5.22) 式のパラメータの与え方は t と x に対して公平である．世界線は直線ではないので加速している．この世界線に沿った固有時 τ と σ の関係は

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = (a^{-1}\cosh\sigma d\sigma)^2 - (a^{-1}\sinh\sigma d\sigma)^2 = (a^{-1}d\sigma)^2 \tag{5.23}$$

となる [(4.12) と (4.8) 式を参照]．σ が 0 のとき，τ を 0 に固定すると $\tau = a^{-1}\sigma$ であり，世界線は固有時を使って (5.21) 式の形式で

$$t(\tau) = a^{-1}\sinh(a\tau), \qquad x(\tau) = a^{-1}\cosh(a\tau) \tag{5.24}$$

と表すことができる．

---

4 **元速度** $\mathbf{u}$ の成分は，世界線上の位置を固有時パラメータ τ について微分したものがその成分 u^α になる 4 元ベクトルである：

$$\boxed{u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}} \tag{5.25}$$

4 元速度 $\mathbf{u}$ は世界線の各点で世界線に接している．変位は $\Delta x^\alpha = u^\alpha \Delta\tau$ で与えられるからである（図 5.7 を見よ）．

4 元速度の 4 つの成分は，t と固有時 τ の間の関係 (4.15) を使うことにより，3 元速度 $\vec{V} = d\vec{x}/dt$ で表すことができる：

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{V}^2}} \tag{5.26}$$

および

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{V^x}{\sqrt{1-\vec{V}^2}} \tag{5.27}$$

である．こらをまとめるさいに，(4.22) 式の $\gamma \equiv (1-\vec{V}^2)^{-1/2}$ を思い出して使うと

$$\boxed{u^\alpha = (\gamma, \gamma\vec{V})} \tag{5.28}$$

となる．これからすぐ $\mathbf{u}$ 自身との内積が

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1} \tag{5.29}$$

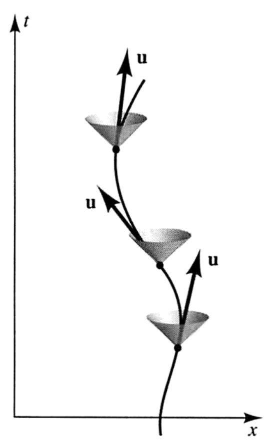


図 5.7　4 元速度 $\mathbf{u}(\tau)$ は粒子の世界線上の各点で単位時間的接 4 元ベクトルになっている．その点の光円錐の内側にある．この図は 2 次元プロットである．しかし，2 次元の情報しかなくても 3 次元光円錐を描くことは習慣的であるし，3 次元であることが頭に浮かぶ．

であることがわかる．このことから 4 元速度は常に時間的**単位** 4 ベクトルであることがわかる [(5.17) 式を参照]．実際，(5.13) 式を使ってスカラー積を

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 \tag{5.30}$$

の形に書けば直接確かめられる．最後の等号は (5.16) 式の形の線素と $ds^2 = -d\tau^2$ によって成り立つ．

例 5.4. 単純な世界線の 4 元速度　例 5.3 で考察した世界線の 4 元速度 $\mathbf{u}$ の成分は

$$u^t \equiv dt/d\tau = \cosh(a\tau), \qquad u^x \equiv dx/d\tau = \sinh(a\tau) \tag{5.31}$$

である [(5.25) 式を参照]．これは正しく規格化されている：

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -(u^t)^2 + (u^x)^2 = -\cosh^2(a\tau) + \sinh^2(a\tau) = -1 \tag{5.32}$$

図 5.6 にいくつか例を示した．

粒子の 3 元速度は

$$V^x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau} = \tanh(a\tau) \tag{5.33}$$

である．これは決して光速を超えないが $(|V^x| = 1)$, $\tau = \pm\infty$ で光速に近づく．

5.3 特殊相対論的力学

運動方程式

ニュートンの第一法則は特殊相対論的力学でも非相対論的力学同様に成り立つ．力がなければ物体は静止するか，等速直線運動をする．まとめると

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 0 \tag{5.34}$$

ニュートンの第一法則

である．(5.28) 式の観点では，この式から $\vec{V}$ がすべての慣性系で一定であることがわかる．

相対論的力学の目標はニュートンの第二法則 $\vec{F} = m\vec{a}$ にあたるものを導入することである．これは決して**導出される**ものではなく，納得のいくいくつかの性質を満たすようなものでなければらない：(1) 相対性原理を満たさなければならない．つまりすべての慣性系で同じ形をとる．(2) 力が 0 になれば (5.34) 式にならなければならない．(3) 粒子の速さが光速よりもずっと遅いとすべての慣性系で $\vec{F} = m\vec{a}$ にならなければならない．これらから

$$\boxed{m\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{f}} \tag{5.35}$$

ニュートンの第二法則

を選ぶのが自然であろう．定数 m は**静止質量**と呼ばれ，粒子の慣性の性質を特徴づけるものである．$\mathbf{f}$ は **4 元力**と呼ばれる．要請 (1) は 4 元ベクトル方程式であることから満たされている．(2)

静止質量

は自明である．(3) は $\mathbf{f}$ を適切に選ぶことより満たされる．これは相対論的力学およびニュートンの第二法則の相対論的な一般化にふさわしい運動の法則である．4 **元加速度ベクトル** $\mathbf{a}$ を

4 元加速度

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \tag{5.36}$$

で定義して導入することで，運動方程式 (5.35) はよく知られた形

$$\boxed{\mathbf{f} = m\mathbf{a}} \tag{5.37}$$

に書くことができる．

(5.35) 式は 4 つの式を表しているが，そのすべてが独立ではない．4 元速度の規格化 (5.29) から

$$m\frac{d(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}{d\tau} = 0 \tag{5.38}$$

であることがわかる．(5.36) 式から $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0$ であり，さらに (5.37) 式を使うと

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{5.39}$$

が得られる．この関係から，独立な式が 3 つしかないことがわかる．これはニュートン力学と同じである．その関係をすぐ考察することにしよう．ニュートンの第三法則についても考察する．

例 5.5. 必要な 4 元力　例 5.3 と 例 5.4 で述べた世界線の 4 元加速度 $\mathbf{a}$ の成分は

$$a^t \equiv du^t/d\tau = a\sinh(a\tau), \qquad a^x \equiv du^x/d\tau = a\cosh(a\tau) \tag{5.40}$$

である．この加速度の大きさは $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2} = a$ であり，このため定数 a はふさわしい名前である．この世界線上の粒子を加速するために必要な 4 元力は $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ である．ここで m は粒子の静止質量である．

エネルギー運動量

(5.35) 式から自然にエネルギーと運動量の相対論的概念に進むことができる．4 **元運動量**を

4 元運動量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \tag{5.41}$$

で定義すると，運動方程式 (5.35) は

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{f} \tag{5.42}$$

になる．

4 元運動量の重要な性質はその定義式 (5.41) と 4 元速度の規格化 (5.29) から得られる：

$$\boxed{\mathbf{p}^2 \equiv \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -m^2} \tag{5.43}$$

(5.28) 式の立場で，4 元運動量の成分は 3 元速度 $\vec{V}$ と

$$p^t = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{V}^2}}, \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\vec{V}^2}} \tag{5.44}$$

の関係がある．速さが小さい（$V \ll 1$）と

$$p^t = m + \frac{1}{2}m\vec{V}^2 + \cdots, \qquad \vec{p} = m\vec{V} + \cdots \tag{5.45}$$

となる．よって速さが小さいと $\vec{p}$ はふつうの運動量になり，p^t は運動エネルギーと静止質量の和になる．この理由で，$\mathbf{p}$ は**エネルギー運動量 4 元ベクトル**とも呼ばれ，その成分はある慣性系で

$$p^\alpha = (E, \vec{p}) = (m\gamma, m\gamma\vec{V}) \tag{5.46}$$

となる．ここで $E \equiv p^t$ は**エネルギー**で，$\vec{p}$ は **3 元運動量**である．(5.43) 式をエネルギーについて解き 3 元運動量で表すと

$$\boxed{E = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}} \tag{5.47}$$

になる．この式から静止質量が相対論的粒子のエネルギーの一部としてどのように組み込まれているかがわかる．実際，静止粒子に対して (5.47) 式はふつうの単位で $E = mc^2$ となる．これは相対論で最も有名な式であろう．

特殊相対論的運動学の中で重要な応用例は粒子の反応である．全 4 元運動量は粒子の衝突で保存し，これは，エネルギー保存則と全 3 元運動量保存則に対応する．宇宙物理学の重要な例が 89 ページのボックス 5.1 にある．

特別な慣性系で，(5.35) 式の相対論的運動方程式とニュートンの法則の関係は **3 元力** $\vec{F}$ を

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \vec{F} \tag{5.48}$$

と定義することでより明確になる．これはニュートンの法則と同じ形であるが，3 元運動量が相対論的な形に (5.44) なっている．したがって特相対論的な問題を解くことはニュートンの運動方程式を解くのと本質的に同じである．唯一の差は運動量と速度の関係 (5.44) にある．ニュートンの第三法則はニュートン力学のときのように，力 $\vec{f}$ にはたらき，(5.48) 式を通じて粒子系の全 3 元運動量がすべての慣性系で保存することを意味している．明らかに $\vec{f} = d\vec{p}/d\tau = (d\vec{p}/dt)(dt/d\tau) = \gamma\vec{F}$ が成り立つ．(5.28) 式と (5.39) 式を使うと，4 元力は 3 元力により

ニュートンの第三法則

$$\boxed{\mathbf{f} = (\gamma\vec{F}\cdot\vec{V}, \gamma\vec{F})} \tag{5.49}$$

3 元力で表した 4 元力

と書くことができる．ここで $\vec{V}$ は粒子の 3 元速度である．運動方程式 (5.42) の時間成分は

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V} \tag{5.50}$$

であり，これはニュートン力学でよく知られた関係である．運動方程式 (5.42) の時間成分は他の 3 成分から得られる．よって 3 元力を使うと，運動方程式はニュートン力学と同じ形になるが，相対論的形式ではエネルギーと運動量の式となっている．速度が小さいとき (5.25) 式からニュートンの第二法則 (5.48) の特殊相対論版は非相対論的形式になっていることがわかる．ニュートン力学は特殊相対論的力学の低速近似である．

例 5.6. 磁場中の相対論的荷電粒子　電荷 q と静止質量 m をもつ粒子が一様磁場 $\vec{B}$ 中を全エネルギー E で運動している．円軌道の半径はどうなるだろうか．粒子にはたらく 4 元電磁気力の成分はどうなるだろうか．

すでに述べたように電磁気は特殊相対論でも変わらないため磁場中で荷電粒子にはたらく 3 元力は

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B}) \tag{5.51}$$

である．ここで $\vec{V}$ は荷電粒子の速度である．粒子はよく知られた運動方程式 (5.48) にしたがいながら一定の速さで半径 R の円軌道上を運動している．したがって

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-V^2}}\right) = \frac{m}{\sqrt{1-V^2}}\frac{d\vec{V}}{dt} \tag{5.52}$$

となる．向心加速度 $d\vec{V}/dt$ は純粋に運動学的関係 V^2/R によって与えられる．したがって

$$\frac{m\gamma V^2}{R} = qVB \tag{5.53}$$

よって

$$R = \frac{mV\gamma}{qB} = \frac{|\vec{p}|}{qB} = \frac{\sqrt{E^2-m^2}}{qB} \tag{5.54}$$

となる．これは半径と全エネルギーの関係を与える．4 元力の時間成分は $f^t = \gamma\vec{F}\cdot\vec{V} = 0$ であり（磁場は仕事をしない）半径成分は

$$f^r = \gamma F^r = qVB\gamma = \frac{qB}{m}\sqrt{E^2-m^2} \tag{5.55}$$

である．

5.4　自由粒子の運動の変分原理

3.5 節で復習したように，ニュートン力学は最小作用の原理でまとめることができる．特殊相対論の自由粒子の運動も同じような最小作用によってまとめることができる．これは極値的固有時の原理だ．その原理は，4.4 節で考察したように双子のパラドックスからすでに明らかである．時空中で自由粒子が運動する直線は 2 つの事象を結ぶ経路の中で固有時が**最も長い**ものである．この節ではこの事実から変分原理を構成し，変分原理が自由粒子の運動方程式 (5.34) を**示唆する**ことを説明する．このことは重要である．なぜなら第 8 章でこの議論に立ち戻ることになるからだ．そこでは極値的固有時の原理を**曲がった**時空の自由粒子に仮定して，自由粒子の運動方程式を**導く**．

極値的固有時の変分原理は以下のように述べることができる：

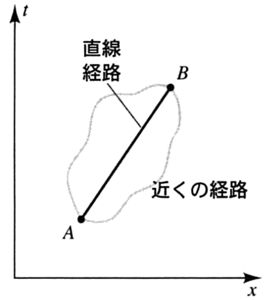


図 5.8 2 点を結ぶ直線は，近くの曲線（灰色）と比べると距離が極値になっている．

> **自由粒子の運動の変分原理**
> 時間的に離れた点をつなぐ自由粒子の世界線は
> 2 点間の固有時が極値をとるものである．

時間的に離れた 2 点 A と B とそれらを結ぶあらゆる時間的世界線を考えよう（図 5.8）．曲線にはそれぞれ固有時

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2} \tag{5.56}$$

がある．世界線はパラメータ σ で表され，すべての曲線は A で $\sigma = 0$ の値をとり，B で $\sigma = 1$ をとるとする（パラメータ τ に対してはそうならない）．世界線は σ の関数として座標によって決まる．つまり $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$ である．(5.56) 式は

$$\tau_{AB} = \int_0^1 d\sigma \left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 \right]^{1/2} \tag{5.57}$$

と書くことができる．τ_{AB} が極値をとる世界線を探す．つまり小さな変分 $\delta x^\alpha(\sigma)$ によって固有時の変分が 0 となるものである．これは，3.5 節で復習したニュートン力学の問題のよく知られた形になっている．(5.57) 式の被積分関数をラグランジアン，x^α を力学変数，σ を時間と考えよう．すると (5.57) 式はニュートン力学の作用 (3.35) と同じ形をしている．ラグランジュ方程式は極値であるための必要条件である．それは具体的に

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/d\sigma)}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{5.58}$$

であり，ラグランジアンは

$$L = \left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 \right]^{1/2} = \left[-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{1/2} \tag{5.59}$$

である．何が起きているか調べるためにラグランジュ方程式 (5.58) を $x^1 \equiv x$ について書こう：

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{L}\frac{dx^1}{d\sigma}\right] = 0 \tag{5.60}$$

しかし $L = [-\eta_{\alpha\beta}(dx^\alpha/d\sigma)(dx^\beta/d\sigma)]^{1/2}$ は単に $d\tau/d\sigma$ であり， $d\sigma/d\tau$ をかけることにより (5.60) 式は

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} = 0 \tag{5.61}$$

になる．これは他の座標についても厳密に同じことができる．4 つのラグランジュ方程式から

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{5.62}$$

となる．これは自由粒子の運動方程式 (5.34) である．その解は A と B を結ぶまっすぐな世界線である．平坦時空で自由粒子の世界線は固有時が極値をとる曲線である．

5.5　光線

静止質量 0 の粒子

これまでの考察は静止質量のある粒子について行った．粒子は光速よりも遅く運動している．これから光速 $V = 1$ でヌル世界線上を運動する粒子を考えよう． その例には光と重力の量子がある (光子とグラビトン)．おそらくニュートリノもそうであろう[4]．我々は非量子論的な面に注目し**光線**と呼び，専ら光線に焦点を当てる．だが，ここでの議論は光速で運動するどんな粒子にも適用できる．

明らかに固有時は，もはや光線の世界線のパラメータとして使うことができない．光線が進む世界線の固有時はゼロになるからだ．しかし別の多くのパラメータが使える．例えば，$V = 1$ の曲線

$$x = t \tag{5.63}$$

はパラメータで表すと

$$x^\alpha = u^\alpha \lambda \tag{5.64}$$

となる．ここで λ はパラメータ，$u^\alpha = (1, 1, 0, 0)$ である．4 元ベクトル $\mathbf{u}$ は接ベクトル $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ であり，(5.25) 式で τ が使われたように λ がパラメータとして使われている．しかし，ここで $\mathbf{u}$ はヌルベクトルなので，(5.29) 式に対応して

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{5.65}$$

となる．別のパラメータを選べば別の接 4 元ベクトルになるが，どれも長さはゼロになる．

パラメータを

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = 0 \tag{5.66}$$

[4] 現在少なくともある種のニュートリノには小さい静止質量があるという証拠がそろっている．

と選ぶと光線の運動方程式は粒子の場合の (5.34) 式と同じになる．間違ったパラメータの選び方はいくらでもある．例えば，(5.64) 式の λ を σ^3 に置き換えることだ．σ が $-\infty$ から ∞ まで変わっても同じ直線 $x=t$ を表しているだろうし，(5.65) 式は引き続き正しいだろう．しかし (5.66) 式にはならないだろう．光線の運動方程式 (5.66) が粒子の場合と同じ形をとるパラメータは**アフィンパラメータ**と呼ばれる．一意的なアフィンパラメータは存在しない．例えば，λ がアフィンパラメータならば，λ の定数倍もアフィンパラメータである．アフィンパラメータは光線に使うときには，(5.66) 式が簡単な形になっているため，非常に有効となる．

アフィンパラメータ

エネルギーと運動量，振動数，波数ベクトル

光子とニュートリノにはエネルギーと 3 元運動量がある．どんな慣性系でも光子のエネルギー E は振動数 ω とアインシュタインの有名な公式

$$E = \hbar\omega \tag{5.67}$$

と結びついている．3 元運動量は (5.44) 式から，3 元速度と $\vec{V} = \vec{p}/E$ の関係があることに注意しよう．$|\vec{V}| = 1$ なので，光子では $|\vec{p}| = E$ となり，3 元運動量は

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{5.68}$$

と書くことができる．ここで $\vec{k}$ は伝播の方向を向き，大きさは $|\vec{k}| = \omega$ であり，**波数 3 元ベクトル**と呼ばれる．どんな慣性系でも光子の 4 元運動量 $\vec{p}$ の成分は

$$\boxed{p^\alpha = (E, \vec{p}) = (\hbar\omega, \hbar\vec{k}) = \hbar k^\alpha} \tag{5.69}$$

光子の 4 元運動量

と書くことができる．4 元ベクトル $\mathbf{k}$ は**波数 4 元ベクトル**と呼ばれる．明らかに

$$\boxed{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0} \tag{5.70}$$

が成り立つ． (5.43) 式と比べると光速で運動する粒子がすべてそうであるように，光子の静止質量は 0 であることがわかる．$\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ はともに光子の世界線に接している．アフィンパラメータ λ の規格化を変えることにより接ベクトル $\mathbf{u}$ を $\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ のどちらかに一致するように選ぶことができる．運動方程式 (5.66) は $\mathbf{p}$ または $\mathbf{k}$ で

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} = 0, \qquad \text{または} \qquad \frac{d\mathbf{k}}{d\lambda} = 0 \tag{5.71}$$

と書くことができる．ここで λ はアフィンパラメータである．

ドップラー偏移と相対論的ビーミング

相対論的ドップラー偏移はこれまでの考え方の簡単な応用である．静止系ですべての方向に周波数 ω の光子を放出する光源を考えよう．別の系で光源は V で x' 軸に沿って運動しているとしよう．運動の方向に対して角度 α をなす方向で観測される光子の振動数はどうなるであろうか．この質問には，光源の静止系で波数 4 元ベクトル $\mathbf{k}$ の成分と光源が運動している観測者の系をつな

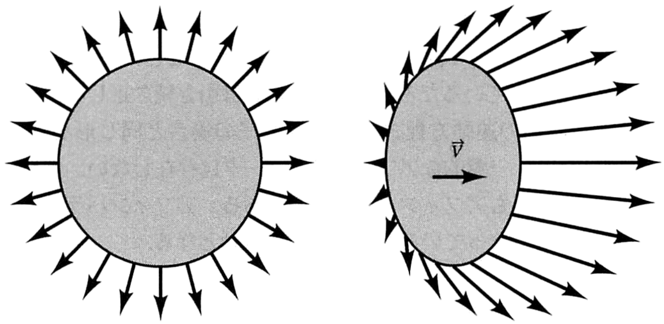


図 5.9 相対論的ビーミング．左図は静止系ですべての方向に同じように光を放っている物体である．表面から垂直に 24 本の光子の波数ベクトルが出ている．右図に，速さ $V = 0.75$ で右に運動する系に静止している物体が同じ 24 個の光子とともにローレンツ収縮しているところを示した．V が光速に近づくと光子は運動方向に向いていき，波数ベクトルの運動方向の成分はドップラー効果のため大きくなっていく．

ぐローレンツブーストを使えば答えることができる．$k^\alpha = (\omega, \vec{k})$ を光源の静止系における光子の 4 元ベクトル $\mathbf{k}$ の成分とし，$k'^\alpha = (\omega', \vec{k}')$ を観測者の成分とする．(5.9) 式から

$$\omega = \gamma(\omega' - Vk'^x) \tag{5.72}$$

である．しかし $k'^x = \omega' \cos\alpha'$ であり，ここで α' は x' 軸と光子の間の観測者系における角度である．よって

ドップラー偏移

$$\boxed{\omega' = \omega\frac{\sqrt{1-V^2}}{1-V\cos\alpha'}} \tag{5.73}$$

これが相対論的ドップラー偏移の公式である． V が小さいと，これは

$$\omega' \approx \omega(1 + V\cos\alpha') \tag{5.74}$$

と近似することができる．$\alpha' = 0$ のとき，光子は光源の運動方向と同じ向きに放出され，光子の振動数は青方偏移 $\Delta\omega' = +V\omega$ を受ける．$\alpha' = \pi$ のとき，光子は光源と反対方向に運動しており，赤方偏移 $\Delta\omega' = -V\omega$ を受ける．

光子が光源の運動に対して垂直なとき（$\alpha' = \pi/2$）でさえ赤方偏移する．ただし，この効果は V^2 のオーダーである．これは横ドップラー効果と呼ばれ，公式 (5.73) は単に時間の遅れになっている．

相対論的ビーミングの現象（図 5.9）は光子の空間的運動量の公式から得られる．光子が光源系の x 軸に対して角度 α をなしているとする．そこでは $\cos\alpha' = k'^x/\omega'$ である．2 つの系の (ω, k^x) と (ω', k'^x) をつなぐローレンツ変換 (5.9) からこれらの 2 つの角度に

相対論的ビーミング

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha + V}{1 + V\cos\alpha} \tag{5.75}$$

の関係があることがわかる．よって光源系で前面の半球内に（$|\alpha| < \pi/2$）放出された光子は小さい円錐 $|\alpha'| < \alpha'_{1/2}$ に放出されたと観測者には見える．ここで $\cos\alpha'_{1/2} = V$ である．V が 1 に近いと，開いた角度は小さくなるだろう．つまり，光子は光源の運動方向に絞られる．ドップラー偏移から前面に放出された光子のエネルギーは後方の光子よりも大きいことがわかる．これは，放射の**強度**が運動方向に強く集中することを意味する（問題 17）．一様に放射を放ちながら向かってくる物体は離れる方向から見るよりも明るくなる．これが相対論的ビーミングである．

ボックス 5.1　宇宙線エネルギーにおける宇宙背景放射によるカットオフ

地球に対して光速よりも遅く運動する粒子の中で，宇宙で最も速い粒子は高エネルギー宇宙線である．**宇宙線**は星間物質中を通ってやってくる素粒子または原子核に使う一般的な言葉である．その中に陽子は非常に多く存在する．宇宙線が大気に入ってくると粒子シャワーが作られ，宇宙線は粒子シャワーを通じて検出される．宇宙線エネルギーは 3×10^{20}eV まで観測されている．大気中で陽子が衝突すると地球の最も大きな粒子加速器の 10 万倍に及ぶエネルギーが発生する．このエネルギーは陽子で計算すると $\gamma \sim 10^{11}$ で光速よりも 10^{22} 分の 1 程度の差だけ小さい．

宇宙線の加速機構は完全にはわかっていないが，宇宙背景放射(cosmic microwave background radiation, CMB)の光子との相互作用を理解することでその起源についていくらかの手がかりが得られている．CMB はあらゆるところにある黒体の背景放射で，ビッグバンのときから存在しており，現在は 2.73K の温度に下がっている．第 17 章で CMB を詳しく述べることになるが，宇宙線との衝突を考えるうえでいくつかの事実が必要である．放射は CMB 系と呼ばれる系にでは等方な黒体放射である．銀河はこの系に対して光速に比べゆっくりと運動している．温度 2.73K で CMB の特徴的なエネルギーは 2×10^{-4} eV であり，1cm^3 当たり平均 400 個の光子がある．

高エネルギー宇宙線陽子が CMB 光子と衝突したとき，何が起きるのだろうか．光子が十分速く運動していればパイオンの光生成のような反応をうながす：

$$\gamma + p \to n + \pi^+, \qquad \text{または} \qquad \gamma + p \to p + \pi^0$$

この反応で陽子のエネルギーは落ちる（誤解の恐れがあるが，γ を光子とローレンツ変換の因子の両方に使い続ける）．地球までの飛行で CMB 光子と確実に衝突するほど十分遠いところに宇宙線源があれば，このエネルギーよりも大きなエネルギーを持った宇宙線陽子は見つけられない．これは，最初にこの効果に注目した論文の著者（Greisen-Zatsepi-Kuz'min）のイニシャルをとって GZK カットオフと呼ばれている．

GZK カットオフエネルギーを評価することは特殊相対論の教育的な練習問題である．わかりやすいように，先に引用した過程の 1 つ目を考えよう．全 4 元運動量は保存する：

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_p = \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_\pi \tag{a}$$

エネルギーの閾値は重心系（CM 系, center of mass system）ですぐ見つかる．そこでは衝突の運動量の大きさが等しくて方向が反対である．閾値はちょうど中性子とパイ中間子が静止するときの初期エネルギーの値である．

CM 系の閾値で，全エネルギーは $E_n^{CM} + E_\pi^{CM} = m_n + m_\pi$ である．全 3 元運動量は定義により 0 である：$\vec{p}_n^{\,CM} + \vec{p}_\pi^{\,CM} = 0$. これは，光子の典型的なエネルギーが $E_\gamma^{CMB} \approx 6 \times 10^{-4}$eV になる CMB 系においてどんなエネルギー E_p^{CMB} に対応するのだろうか．この陽子エネルギーの閾値が GZK カットオフである．

この疑問には，4 元ベクトルの長さがすべての系で同じであるという事実を使うことで効果的に答えることができる．CM 系の閾値で $(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_\pi)^2$ を評価すると $-(m_n + m_\pi)^2$ になる．4 元運動量の保存から，これが $(\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_p)^2$ と同じであることがわかる．2 乗した式 $\mathbf{p}_p^2 = -m_p^2$ と $\mathbf{p}_\gamma^2 = 0$（光子の質量が 0）を使うと

$$2\mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}_p - m_p^2 = -(m_n + m_\pi)^2 \tag{b}$$

次ページに続く...

が得られる．この関係は座標系に依存しないが，CMB 系の 4 元運動量の成分で表すことができる．エネルギー $E_p^{CMB} \gg m_p$ の光子が x 軸に沿って運動し，反対方向に運動するエネルギー E_γ^{CMB} の光子と衝突するとしよう．CMB 系の (t, x) 成分は

$$\begin{aligned}(p_\gamma^{CMB})^\alpha &= (E_\gamma^{CMB}, -E_\gamma^{CMB}) \\ (p_p^{CMB})^\alpha &\approx (E_p^{CMB}, E_p^{CMB})\end{aligned} \tag{c}$$

である．ここで 3 元運動量は (5.47) 式を使ってエネルギーで表し，$E_p^{CMB} \gg m_p$ の近似を使った．(b) 式の内積はこれらの成分を使って計算でき，E_p^{CMB} について解くことができる．その結果は近似 $m_n \approx m_p$ を使って簡単にすることができ，

$$E_p^{CMB} \approx \frac{m_p m_\pi}{2E_\gamma^{CMB}}\left(1 + \frac{m_\pi}{2m_p}\right) \approx 3 \times 10^{20}\text{eV} \tag{d}$$

が得られる．これが GZK カットオフエネルギーである．これらの陽子の速度は光速よりたった 5×10^{-24} 倍だけ遅く，なんとこれはローレンツ因子にして $\gamma \sim 10^{11}$ にも達する！

10^{20}eV の陽子が CMB 光子と衝突するまでの平均自由行程は $\lambda_{CMB} = 1/(\sigma N_\gamma)$ である．ここで σ は光生成過程の断面積で，約 $2 \times 10^{-28}\text{cm}^2$ ほどであり，N_γ は CMB 光子の個数密度で，約 $400\,\text{cm}^{-3}$ である．これらの数値から $\lambda_{CMB} \approx 10^{25}\text{cm} \approx 1000$ 万光年となる．この距離は局所銀河群のたった数倍のサイズである．陽子のエネルギーが下がるまでに平均自由行程程度の距離がかかるが，そのようなエネルギーの光子がずっと遠くから飛んできているはずがない．非常に高エネルギーの宇宙線は稀れであるが，3×10^{20}eV のものが検出されており，GKZ カットオフから期待されるような，個数が鋭く減少するきざしは見られない．高エネルギー粒子の説明の 1 つに，それらが近くで作られているというものがある．

5.6 観測者と観測

特殊相対論的力学の予測は慣性系の中でもっとも簡単に計算され，もっとも容易に理解される．慣性系で静止している観測者が観測するときその系の軸を参照する．たとえば，慣性系で静止している観測者によって測定される粒子のエネルギーは時間軸に沿った 4 元運動量の成分である．しかし慣性系ですべての観測者が静止しているわけではなく，たとえば地上の観測者はそうではない．加速する観測者の観測の予測値はどのように計算されるのだろうか．

この質問は一般相対性理論では特に重要になる．一般的に一般相対性理論の曲がった時空には全時空を覆う慣性系などない．これから見るように，自由落下する世界線の近傍や各点の近傍には**局所**慣性系が存在するが，大域的なものはない．したがって，大域的でない慣性系にいる観測者の予言を引き出すような体系的な方法を手に入れることは非常に大きな意味がある．この節では特殊相対論でそれをどうやってすればよいのか述べる．

時空を通る観測者の経路は時間的世界線である．観測者とは世界線に沿った実験室を運んでいるものだと考えてよいのかもしれない．少なくとも宇宙物理学の問題に対してこの実験室は物理現象が起きる距離に比べて非常に小さい．それがハッブル宇宙望遠鏡であってもである．したがって我々は理想化して実験室が無限小であるとする．実験室の内部で観測者は時計と巻尺で測定する（図 3.1 を見よ）．たとえば，観測者は実験室を通りすぎる粒子の速度を測定する．粒子が実験室の壁となす角度を調べ，実験室の距離を通過する時間を測定することで速さが求まる．

数学的に局所実験室のアイディアは図 5.10 で理想化できる．観測者には 4 つの**単位直交** 4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}, \mathbf{e}_{\hat{1}}, \mathbf{e}_{\hat{2}}, \mathbf{e}_{\hat{3}}$ がある．これらはそれぞれ時間方向と 3 つの空間方向を決め，これらを観測

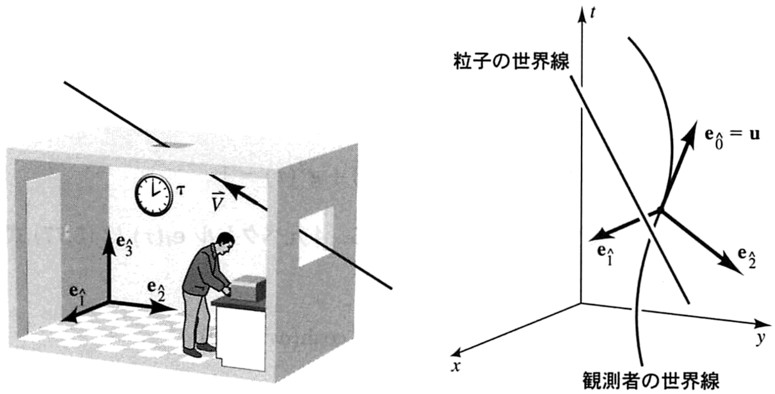


図 5.10 時空を運動する観測者は左図に示したような局所実験室系に住んでいると思ってもよい．それは右に示した世界線の時空中を運動している．直交する 3 つの空間方向によって 3 つの空間的単位 4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$, $\mathbf{e}_{\hat{3}}$ を決める．観測者の時計は実験室系で静止しており，時間方向 $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ を決め，それは観測者の 4 元ベクトルに一致する．観測者による観測は 4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ を参照して行われる．

者はすべての測定で参照する．ハットのついた添字は我々が**正規直交**基底を使っていることを強調するときに使う．直交基底はそれぞれ単位長さをもち，すべての正規直交基底は互いに直交している．世界線の方向は実験室で静止している時計が時空中で運動している方向であることから時間的 4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ は観測者の世界線に接していることになる．観測者の 4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm obs}$ は**単位**接ベクトルなので [(5.29 式を参照]

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}_{\rm obs} \tag{5.76}$$

である．観測者は 3 つの空間基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\imath}}$ が $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ と直交しそれぞれ互いに直交していれば，空間基底ベクトルを自由に選ぶことができる．実験室が慣性系で静止しているときにだけ，$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$ は慣性系の軸の方向を向いている．

例 5.7. 単純加速観測者の正規直交基底 例 5.3 と例 5.4 で述べた加速世界線に沿った観測者を考えよう．慣性系にいる観測者の直交基底 4 元ベクトルの成分は何か．これらの 4 元ベクトルは観測者の固有時とともに変わるだろう．4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}(\tau)$ は観測者の 4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm obs}(\tau)$ でありその成分は

$$(\mathbf{e}_{\hat{0}}(\tau))^{\alpha} = u^{\alpha}_{\rm obs}(\tau) = (\cosh(a\tau), \sinh(a\tau), 0, 0) \tag{5.77}$$

である [(5.31) 式を参照]．他の 3 つの 4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\imath}}(\tau)$ の唯一の条件はそれらが $\mathbf{e}_{\hat{0}}(\tau)$ に直交し，互いに直交し単位長さであることである．観測者が直交系の空間軸を向ける自由度には多くの可能性がある．この条件を満たす最も簡単な方法は $\mathbf{e}_{\hat{2}}(\tau)$ と $\mathbf{e}_{\hat{3}}(\tau)$ をそれぞれ y 方向と z 方向に選ぶことである．残りの $\mathbf{e}_{\hat{1}}(\tau)$ はある関数 f, g を使って $(f(\tau), g(\tau), 0, 0)$ の形をとるとする．

$\mathbf{e}_{\hat{0}}(\tau)$ との直交性は

$$\mathbf{e}_{\hat{0}}(\tau)\cdot\mathbf{e}_{\hat{1}}(\tau) = -\cosh(a\tau)f(\tau)+\sinh(a\tau)g(\tau)=0 \tag{5.78}$$

を意味する．単位長さは

$$\mathbf{e}_{\hat{1}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{1}}(\tau) = -f^2(\tau)+g^2(\tau)=1 \tag{5.79}$$

を意味する．これら 2 つの条件から f と g が決まる．4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\imath}}(\tau)$ は (5.77) 式とともに直交基底 4 元ベクトルをなし

$$(\mathbf{e}_{\hat{1}}(\tau))^{\alpha} = (\sinh(a\tau),\cosh(a\tau),0,0) \tag{5.80a}$$
$$(\mathbf{e}_{\hat{2}}(\tau))^{\alpha} = (0,0,1,0) \tag{5.80b}$$
$$(\mathbf{e}_{\hat{3}}(\tau))^{\alpha} = (0,0,0,1) \tag{5.80c}$$

となる．

すでに考察したように，観測者は観測の際，実験室の軸と時計を参照する．これは，実験室についた基底 4 元ベクトル $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ に沿って 4 元ベクトルの成分を測定することを意味する（中括弧 { } は「集合」を意味する）．たとえば，加速する観測者によって測定される粒子のエネルギーは基底 4 元ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ に沿った粒子の 4 元運動量 $\mathbf{p}$ の成分である．方向 1 で測られる 3 元運動量は $\mathbf{e}_{\hat{1}}$ に沿った $\mathbf{p}$ の成分である，といった具合に．これらの成分は分解 [(5.4) 式を参照]

$$\mathbf{p} = p^{\hat{\alpha}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \tag{5.81}$$

によって定義され，観測者の直交基底 4 元ベクトルとの内積として計算することができる．その結果は[5]

$$p^{\hat{0}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{\hat{0}},\quad p^{\hat{1}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{\hat{1}},\quad p^{\hat{2}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{\hat{2}},\quad p^{\hat{3}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{\hat{3}} \tag{5.82}$$

と書くことができる．これらの関係を確かめようとすれば，基底 4 元ベクトルが正規直交関係にあることを考慮に入れて，(5.81) 式を使って右辺を計算すればよい．特に，4 元速度 $\mathbf{u}_{\mathrm{obs}}$ で表される観測者によって測定される粒子のエネルギー E は，上式の最初の関係または

$$E = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\mathrm{obs}} \tag{5.83}$$

である．以下の例でこれがどのように使えるのかを説明した．

---

[5] 我々は，方程式の両辺で添字がバランスをとるという規則に暗にしたがってきた．それは 8.3 節ではっきりと述べる．しかしここではそれを一時的に破っている．より教育的には，この関係は $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}p^{\hat{\beta}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\mathbf{p}$ のように添字が上下でつりあうように書かれるべきであろう．

例 5.8. 速さ V で運動する観測者に測定される静止粒子のエネルギー 粒子がある慣性系で静止しているところを考えよう（図 5.11）．観測者はこの系で速度 $\vec{V}$ で運動しており，観測者の世界線は粒子の世界線と交差する．観測者の視点では粒子は実験室系を運動していることになる．粒子のエネルギーは観測者が測定するとどうなるか．我々はすでに答えを知っている．粒子は実験室を速度 $\vec{V}$ で運動し，測定されるエネルギーは

$$E = m\gamma \tag{5.84}$$

になるだろう．ここで m は粒子の質量である．

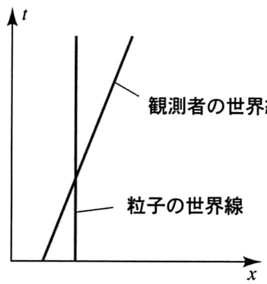


図 5.11 静止粒子を通りすぎる観測者が自分の 4 元速度を使って 4 元運動量の成分として粒子のエネルギーを測定する．

これが観測者の直交基底との内積によってどのように得られるのかをみてみよう．粒子が静止している慣性系の中で粒子の運動量 4 元ベクトルの成分は

$$\mathbf{p} = (m, 0, 0, 0) \tag{5.85}$$

となる．同じ系で観測者の 4 元速度は

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}_{\text{obs}} = (\gamma, V\gamma, 0, 0) \tag{5.86}$$

である [(5.28) 式を参照]．観測者によって測定されるエネルギーは (5.83) 式にしたがうと

$$E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{\hat{0}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\text{obs}} = m\gamma \tag{5.87}$$

観測者に測られるエネルギー

であり，(5.84) 式と同じである．観測者が測定するエネルギーは，ちょうど粒子のエネルギー運動量 4 元ベクトルの観測者の時間方向 $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ に沿った成分である．

この簡単な例で，計算 (5.87) はかなり複雑である．だが，ポイントは，(5.87) 式が不変な形式で書かれていることと，**どんな**慣性系でも計算することができるということである．これが有効であることをみるために次の例を見よう．

例 5.9. 加速する観測者によって測られる振動数　例 5.3 と例 5.4 の世界線にしたがう観測者が星からの光を観測する．星は慣性系の原点に対して静止しており，光を絶えず放射している．簡単のため，光は星の慣性系で可視光領域の 1 つの振動数 ω_* で放出されたと仮定しよう．観測者は自分の世界線に沿った固有時の関数として振動数 ω_* をどう測定するのであろうか．

星が静止している慣性系で，観測者にたどり着く光子の波数 4 元ベクトル $\mathbf{k}$ の成分は $k^\alpha = (\omega_*, \omega_*, 0, 0)$ である．観測される振動数 $\omega(\tau)$ はこれらの成分を固有時 τ の観測者の瞬間的な静止系に変換することで得られるだろう．これは特に難しいことではなく（問題 18），光子では $E = \hbar\omega$ であり，(5.87) 式を使うと簡単にできる：

$$\omega(\tau) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\text{obs}} \tag{5.88}$$

ここで $\mathbf{u}_{\text{obs}}$ は 4 元速度 (5.31) である．明らかに

$$\omega(\tau) = k^t u^t - k^x u^x = \omega_*[\cosh(a\tau) - \sinh(a\tau)] = \omega_* \exp(-a\tau) \tag{5.89}$$

である．固有時の始めでは（$\tau < 0$）観測者が光源に向かって速く近づいてくるので光は青方偏移し，後に（$\tau > 0$）光源から速く遠ざかるので光は赤方偏移する．

世界線 (5.31) にしたがう宇宙船の船橋にいる観測者が星空を見ていると $1/a$ のオーダーの限られた固有時の期間だけ星を見ることになるだろう．あなたにはそれがなぜか説明できるだろうか．

問題

1. [S] 成分が

$$a^\alpha = (-2, 0, 0, 1)$$
$$b^\alpha = (5, 0, 3, 4)$$

である 4 元ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を考えよう．

(a) $\mathbf{a}$ は時間的か空間的かそれともヌルか．$\mathbf{b}$ は時間的か空間的かそれともヌルか．

(b) $\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ を計算せよ．

(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を計算せよ．

2. 2 つの 3 元ベクトルの内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta_{ab}$$

と書くことができる．ここで a と b はそれぞれ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の長さであり，θ_{ab} はそれらの間の角度である．似た公式が時間的 4 元ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間でも成り立つことを示せ：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -ab\cosh\theta_{ab}$$

ここで $a = (-\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$, $b = (-\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}$ であり，θ_{ab} は (4.18) 式で定義されるパラメータであり，これは，世界線が $\mathbf{a}$ を向いて静止している観測者の座標と世界線が $\mathbf{b}$ を向いて静止している観測者の座標の間のローレンツブーストを表す．

3. [S] ある慣性系で自由粒子が x 軸に沿って速さ $dx/dt = V$ で運動しており，$t = 0$ で原点を通過した．粒子の世界線を固有時 τ をパラメータとして V を使って表せ．
4. 4 元加速度ベクトル $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{u}/d\tau$ の成分を 3 元ベクトル $\vec{V}$ と 3 元加速度 $\vec{a} = d\vec{V}/dt$ で表し，(5.28) 式と似た式を求めよ．その式と (5.28) 式を使って $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$ を確かめよ．
5. 図 5.6 を写し，加速度の 4 元ベクトル $\mathbf{a}$ を半分のスケールでそこに描き込め．そのベクトルは $\mathbf{u}$ と直交しているか．
6. x 軸に沿って運動している粒子を考えよ．その速度は時間の関数として

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2}}$$

である．ここで g は定数である．

(a) 粒子の速さは光速を超えるだろうか．
(b) 粒子の 4 元速度の成分を計算せよ．
(c) 軌跡に沿った固有時の関数として x と t を表せ．
(d) 粒子にはたらく 4 元力の成分と 3 元力の成分はどうなるか．

7. [C] 粒子が x 軸に沿って運動している．瞬間的な静止系で測定すると常に一定値 g となる一様な加速度を受けている．粒子が $t = 0$ で x_0 を速度ゼロで通りすぎると仮定して x と t を固有時 τ の関数として表せ．時空図に粒子の世界線を描け．
8. [S] π^0 中間子（静止質量 135MeV）が速さ（3 元速度の大きさ）$V = c/\sqrt{2}$ で x 軸から 45° の方向に運動している．

(a) 粒子の 4 元速度の成分を求めよ．
(b) エネルギー運動量 4 元ベクトルの成分を求めよ．

9. [S] 今は廃棄されているスタンフォード線形加速器（SLAC）で電子と陽電子が長さ 2 マイル（約 3km），直径数センチのビームパイプの中でおよそ 40GeV のエネルギーで加速されていた．このような狭い経路の中で長い距離 電子を導くことは気の遠くなるような仕事である．だがエネルギーが 40GeV のとき，電子の静止系で加速器の長さはどうなるか．
10. CERN の LEP 粒子加速器の中で電子と陽電子が反対方向に半径 10km の円形リングを 100GeV で進む．

(a) これらの粒子はどれくらい光速に近い速さで運動するか．
(b) 電子と陽電子を 2 時間蓄えておくことができる．電子または陽電子はこの時間内にリングを何回まわることができるか．

11. (4.18) 式のローレンツブーストで使われたパラメータ θ で平行速度の合成則を表せ．その結果に幾何学的解釈をすることができるだろうか．
12. 2 マイルのスタンフォード線形加速器は電子を加速器の系で測って 40GeV にまで加速する．加速機構を理想化し，加速器に沿って一定電場 $\vec{E}$ をかけ，運動方程式を

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}$$

と仮定する．ここで $\vec{p}$ は相対論的運動量 $\mathbf{p}$ の空間部分である．

(a) 電子は始め静止していると仮定し，加速器での位置を時間の関数として静止質量 m と $F \equiv e|\vec{E}|$ で表せ.

(b) 最終的なエネルギーまで粒子を加速するために必要な $|\vec{E}|$ の値を求めよ.

13. [B,S] 光生成してできるパイオン（π^+）の反応の 1 つに

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$$

がある．陽子が静止している系でこのようにパイオンをつくるための最低エネルギー（エネルギーの閾値）を求めよ．現在ある加速器はこのエネルギーに到達できるか.

14. [B] 最も大きなエネルギーをもつ宇宙線とあなた自身によって投げることのできる岩のエネルギーを比較せよ.

15. [C] 回転円盤の端に光源と検出器をある角度 ϕ をなすように置き，瞬間的な静止系で光源は振動数 ω_* の放射を放つ．放射が検出されると振動数はどうなるか．**ヒント**：この問題で情報はほとんど与えられない．必要ないからだ.

16. **光行差**　地球の軌道面で，真夜中頭上にある星を考えよう．望遠鏡を覗いて星を観測するために望遠鏡の軸を天頂から地球が運動している方向に向けて小さい角度傾けなければならない．なぜ傾けなければならないか説明し角度を計算せよ．状況を簡単にするために，地球がほぼ円軌道を運動し，必要なら回転軸が円軌道面に対して垂直であることを仮定せよ.

17. [C] **相対論的ビーミング**　物体がその静止系で全ての方向に時間的に等しい割合で振動数 ω_* の光子を放っている．この系で遠く離れて（その物体の大きさに比べて）静止している検出器は単位立体角当たり $(dN/dtd\Omega)_*$ [photon /（s·sr）] の割合で，方向と無関係に光子を受信する．観測者が静止している慣性系 (t', x', y', z') で物体は x' 軸方向に速さ V で運動する.

(a) 静止系で光子が伝わる方向を観測者の系における方向につなげる関係式 (5.75) を導出せよ.

(b) 観測者系において，物体から遠く離れたところで光子を観測するとき，x 軸からの角度 α' の関数として，単位立体角当たり受信する光子数の時間的割合 $dN/dt'd\Omega'$ を求めよ．[ヒント：静止観測者による 2 つの光子の受信時間間隔は，光源が運動していれば発信の時間間隔とは同じではないことを思い出せ．]

(c) 観測者系において，物体から遠く離れたところで観測したとき，角度 α' の関数として，立体角あたりの光度の時間的割合 $dL'/d\Omega'$[erg/（s·sr）] を求めよ.

(d) 光源の速度が光速に近づくと観測者の系でエネルギーと個数のビーミングがどうなるか考察せよ.

18. 光子の波数ベクトルの成分を固有時 τ の観測者の瞬間的静止系に変換することで，例 5.9 の観測者が見る振動数を固有時の関数として計算せよ.

19. [S] 観測者がある慣性系の x 軸に沿って一定の速さ V で運動している．観測者が観測するときに参照する正規直交基底 4 元ベクトル $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ の成分をその系において求めよ.

20. 4 元運動量 $\mathbf{p}$ の粒子と 4 元速度 $\mathbf{u}$ の観測者を考える．粒子が観測者の実験室を通ると，3

元運動量の大きさが

$$|\vec{p}| = \left[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2 + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})\right]^{1/2}$$

であることを示せ.

21. [P,A] すべての慣性系で，荷電粒子にはたらく力は通常のローレンツ力である：

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

ここで q は粒子の電荷であり，$\vec{V} \equiv d\vec{x}/dt$ は 3 元速度で $\vec{E}$ と $\vec{B}$ はローレンツ系で測定した電場と磁場である．この慣性系に対して x 軸方向に速さ v で運動する別の慣性系を考えよう.

(a) 4 元力 $\mathbf{f}$ の成分を $\vec{E}$ と $\vec{B}$, および粒子の 4 元速度 $\mathbf{u}$ の成分を使って表せ.

(b) $\mathbf{f}$ と $\mathbf{u}$ の成分の変換則を使って，もともとの慣性系における以下の特別な場に対して，新しい慣性系での電場と磁場を与える変換則を求めよ.

i. x 方向の電場

ii. x 方向の磁場

iii. y 方向の電場

iv. y 方向の磁場

22. [C] **相対論的ロケット**　ロケットは静止質量の一部分を排出ガスとして噴射することにより加速する．排出の速さはロケットの静止系で一定値 u である．エネルギー保存と運動量保存を使い，ロケットが静止状態から速さ V に加速するとき初期質量と最終質量の比を求めよ．**ヒント：**静止質量は保存しないが，エネルギーと運動量は保存する．ニュートン力学で同じ問題を行ってみたらよいだろう.

23. [C] **タキオン**

(a) つねに光速を**超えて**運動するある種の粒子がローレンツ不変性と整合性がとれることを議論せよ．ローレンツ不変性とはある系で光よりも速ければ，すべての系で速いことをいう.（このような仮想的な粒子は**タキオン**と呼ばれる.）

(b) タキオンの軌道に対して接するベクトルは空間的で，$u^\alpha = dx^\alpha/ds$ と書けることを示せ．ここで s は軌道に沿った空間的間隔である．$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ であることを示せ.

(c) タキオンの 4 元速度 $\mathbf{u}$ の成分を 3 元速度 $\vec{V} = d\vec{x}/dt$ で表せ.

(d) 4 元運動量を $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ で定義し，タキオンのエネルギーと運動量の関係を求めよ.

(e) どんなタキオンのエネルギーでも負になる慣性系が存在することを示せ.

(f) タキオンが普通の粒子と相互作用すると普通の粒子は全エネルギーと 3 元運動量が保存するようにタキオンを放出することを示せ.

コメント： (f) の結果から，タキオンをもつ世界は不安定になることがわかっていてる．自然界にタキオンがあるという証拠はない.

第 II 部

一般相対性理論の曲がった時空

重力が曲がった時空の幾何学で**ある**というアイディアが導入される．曲がった時空と，それらの曲がった幾何学を調べるために必要なテスト粒子と光線の運動を記述する道具立てについて詳しく述べる．球対称星や球対称ブラックホールの外側の幾何学，重力波，宇宙論を調べる．一般相対性理論の基本的なテストを述べる．

第6章
幾何学としての重力

特殊相対性理論の成功により，ほぼ 300 年間にわたって太陽系の力学に適用して成功を収めてきたニュートンの重力理論はもはや厳密には正しくないということが明らかになった．ニュートンの重力相互作用は瞬間的に伝わる．時刻 t で質量 m_1 に及ぼされる第二の質量 m_2 による重力 $\vec{F}_{12}$ の大きさは

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2} \tag{6.1}$$

で与えられる［(3.11) 式を見よ］．ここで $\vec{r}_1(t)$ と $\vec{r}_2(t)$ は**同じ瞬間**における質量の位置である．しかし特殊相対性理論では瞬間の概念は慣性系ごとに違う．ニュートンの法則 (6.1) は 1 つの慣性系でしか正しくないかもしれず，慣性系の中からその 1 つを選び出すことができるかもしれない．したがってニュートンの重力法則は相対性原理と相容れないことになる．

我々は，新しい重力理論，相対性原理と矛盾のない理論に向かってアインシュタインが進んだ道をいくらかたどることになるだろう．そしてニュートンの重力理論とは定性的に違った理論である一般相対性理論にたどり着くだろう．一般相対性理論では重力現象は力や場から生じるのではなく，4 次元時空の曲率から生じるのである．思索の出発点は重力質量と慣性質量の等価性である．

6.1 重力質量と慣性質量の等価のテスト

第 2 章で考察したように，重力質量と慣性質量が等価であることが非常に厳密な精度で確かめられている．一般相対性理論におけるこの等価性の中心的な重要性のため，これらのテストをできるだけ多く述べることは，概略だけだとしても，価値のあることである．

重力質量と慣性質量が等価であることを検証する実験では，重力場中で自由落下している組成の違う物体の加速度を比較する．太陽の重力場中で落下している地球と月の加速度を月レーザー測距実験で比較したことを 12 ページのボックス 2.1 で述べた．加速度は 1.5×10^{-13} の精度で一致しており，現時点で最も正確なテストである．地球上でねじり秤を使って行われた実験は同じ精度を達成している．このような実験は，初めて現代的な実験を行ったエトヴェシュ（R. von Eötvös 1848-1919）にちなんでエトヴェシュの実験と呼ばれている．これからこの実験の基本的な特徴を述べる．

棒の両端に互いに別の物質でできた質量を置く．図 6.1 に示したように，棒は地上の実験室で繊維質の紐で吊るして，ねじれ振子とする．実験室は地球とともに回転しているので，紐は厳密には局所的に重力の方向に向いているといえない．紐は重力の方向に対して小さい角度をなしてお

り，重力の小さい成分は地球の回転による向心加速度とつりあっている．図 6.1 の右図に示した(問題 1).

質量は紐や棒に対して垂直な方向に自由に動くことができる．重力はこの「ねじれ方向」にはたらく唯一の力である．質量はこの方向に事実上自由落下している．2 つの質量に加速度の差があると振子はねじれるだろう．よって，重力質量と慣性質量の差を検出できる．

この種の実験がどのように行われるのかをもう少し定量的に詳しく理解するために，2 つの物体を A, B, 重力質量を $m_{A,G}$, $m_{B,G}$, 慣性質量を $m_{A,I}$, $m_{B,I}$ と記そう．重力場 $\vec{g}$ は質量に重力 $m_G\vec{g}$ を及ぼすのだが [(3.31) 式を参照]，重力は振子の大きさでは一定であると仮定する．地球や太陽，銀河系のような重力源はこの条件を容易に満たすであろうが，実験の物体に近い小さい質量は大いに問題になる．$\vec{g}$ のねじれ方向の成分を g^t で表し，この方向の加速度の成分を a^t_A と a^t_B で表す．

$$m_{A,I}a^t_A = m_{A,G}g^t \tag{6.2a}$$

$$m_{B,I}a^t_B = m_{B,G}g^t \tag{6.2b}$$

もし慣性質量と重力質量の比がすべての物体で同じなら，振子は地球の回転による同じ向心加速

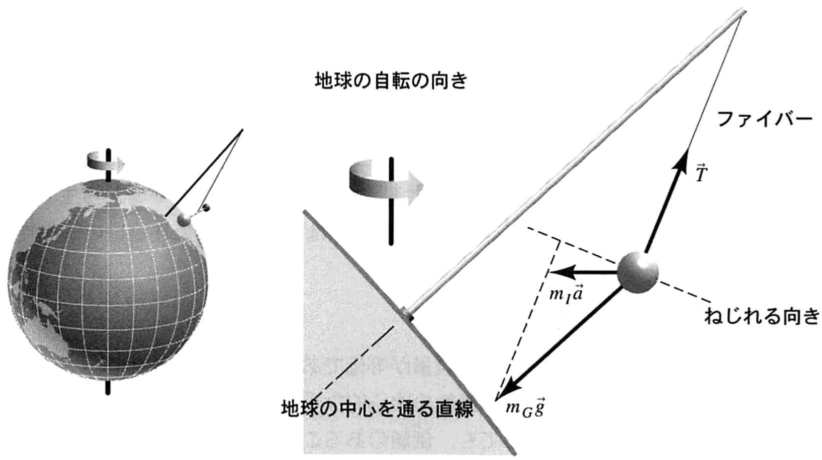


図 6.1　左図は等価原理をテストするために理想化されたねじれ振子である．異なった組成の 2 つの質量が棒の両端についており，棒は剛体の支柱から紐で吊下げられている．質量はバランスをとっているが紐はねじれることができる．質量にかかる力を右図に示した．この図には，地表の一部とねじれ振子の端，質量にはたらく力が描かれている．図の鉛直方向は地球の回転軸になっている．質量は地球とともに回転しているので，向心加速度 $\vec{a}$ を受けている．よって吊るしている紐は地球の中心を通る直線に対して小さい角度をなしている．重力 $m_G\vec{g}$ と張力 $\vec{T}$ も示した．破線はつりあい棒と紐に垂直な「ねじれ方向」である．地球の系で振子がねじれていなければ，この方向の地球の重力の成分 $m_G\vec{g}$ は $m_I\vec{a}$ の成分と等しくなければならない．これは m_I/m_G が等しいときに限り起きる．この 2 つの比の差はねじれのバランスを検出することで知ることができる．

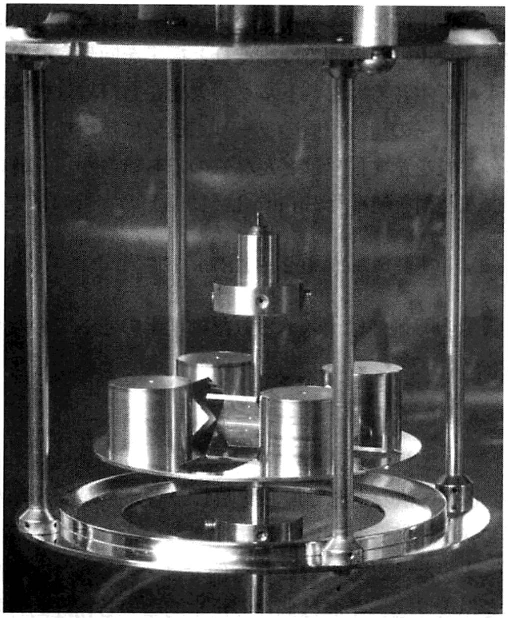


図 6.2 地球と太陽，銀河系に引かれるテスト物体に対する加速度の等価性をテストするために Su et al.（1994）の実験で使われたねじれ振子．振子は小さくして，重力の局所的な変化から揺らぐ効果を最小にしてある．タングステンの糸から吊下げられているが，糸は細過ぎてこの写真では見えない．円形プレートには 4 つの円柱型のテスト物体が直交する鏡とともに載せてあり，鏡は振子のねじれを検出するための繊細な光学系の一部となっている．振子は真空中で吊下げられ，全体は 1 時間に 1 周連続的に回転している．重力質量と慣性質量の等価性が破れると回転周波数が変わり，それが振子のねじれとして現れることになっている．

度をもつ物体とともに静止する．組成の違う物体の重力質量と慣性質量の比における差はどんなものでも加速度の差と振子のねじれとして現れるだろう．(6.2) 式から加速度の差は，それらの平均の比として

$$\frac{a_A^t - a_B^t}{\frac{1}{2}(a_A^t + a_B^t)} = \frac{\left(\dfrac{m_{A,G}}{m_{A,I}} - \dfrac{m_{B,G}}{m_{B,I}}\right)}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_{A,G}}{m_{A,I}} + \dfrac{m_{B,G}}{m_{B,I}}\right)} \equiv \eta \tag{6.3}$$

である．振子のねじれの上限が η の上限と重力質量と慣性質量の等価からのずれとして与えられる．

これから行う考察は，Roll, Krotkov, and Dicke（1964），Braginsky and Panov（1971），および Su et al.（1994）が行った実際の現代的な実験をマンガ的に理想化したものにすぎない．Su et al.（1994）で使われた振子を図 6.2 に示した．いくつかの特徴を述べよう．まず，2 つでなく 4 つの質量が使われており，これにより振子の位置の差で生じる $\vec{g}$ の勾配の効果が最小になる．勾配の効果は重力質量と慣性質量が同じであっても振子にトルクを生ずるであろう．このような勾配や

磁場，熱，その他の雑音源が振子に影響を与えないようにする賢い設計が必要となる．しかし，高い正確性を得るための鍵は，決まった周期でゆっくりと振子を回転させることである．振子系で重力質量と慣性質量の差によって生じるねじれトルクの大きさと符号は正確にその周期で変化することになるだろう．この周期で振子の角度位置のフーリエ成分に焦点を当てることにより，重力質量と慣性質量の同等性からのずれを示す信号はどんなものでも雑音から正確に分離することができるだろう．例えば，ベリリウムと銅を使った Su et al. (1994) の実験の結果を (6.3) 式の η で表すと

$$\eta = (-0.2 \pm 2.8) \times 10^{-12} \tag{6.4}$$

となる．重力質量と慣性質量の等価性はテストされた物理学のすべての原理のうちで最も正しいものの 1 つである．

6.2　等価原理

「そのとき，次のような形で『私の生涯で最も素晴しい考え』が浮かんだ．重力場は，磁気電気誘導によって生じる電場に類似して，相対的存在にすぎない．なぜならば家の屋根から自由落下している観測者にとって —— 少なくとも彼のごく近傍では —— 重力は存在しないからである．実際もし観測者が何か物体を落とすと，それは個々の化学的ないし物理的性質と無関係に，その観測者に対して静止または一様運動の状態を保ち続ける（この考察において空気の抵抗は，もちろん無視されている)．観測者は，それゆえ，自分の状態を『静止しているもの』と解釈する権利を有する．」[1]このように，アインシュタインは，のちに一般相対性理論に導いた**等価原理**の起源を以上のように回想した．今日等価原理は発見的なアイディアであると考えられており，その内容の核心は自動的に正確に一般相対性理論の中に組み込まれている．しかし，このアイディアは一般相対性理論を動機付けするための有効な出発点であり続けているため，ここで取り上げる．考察はニュートン重力の内容で行われ，重力場の考えが意味をもつことになる．一般相対性理論の等価原理は 7.4 節で考察する．

屋根から落ちるアインシュタインの観測者の現代版はスペースシャトルで地球の周りを自由落下する宇宙飛行士であろう（図 6.3 を見よ)．宇宙飛行士には「体重がない」．カップ，皿，砲弾，羽毛，その他のシャトルの中で自由に運動している物体は静止したままか他のものに対して一様な運動をしている（アインシュタインがしたように空気抵抗などは無視する)．短時間におけるこのような物体の運動を研究しても宇宙飛行士は地球の重力中で自由落下しているのか，重力源から遠く離れた空っぽの空間で静止しているのかを区別することができない．事実上，重力場はスペースシャトルの自由落下系の中で消えてしまう．

重力質量と慣性質量が等価であることはこの結論にたどり着くためには不可欠である．砲弾と羽毛が地球に向かって**別々の加速度**で落下するのであれば，スペースシャトルの内部で静止することもないだろうし，互いに一様な運動をすることもないであろう．加速度における小さな差を見つければ重力引力の存在を十分区別できるだろう．

重力質量と慣性質量が等しいことから，重力場を自由落下によって消せることがわかるだけでな

[1] パイス（1982）p.178 からの引用．日本語訳では p.230 ページ．

く，重力が加速度から作られるということも考えられる．図 6.4 に示したような，月面やその他の重力源の表面で静止している小さく閉じた実験室を考えよう．実験室は小さく，実験者ができるかぎりの精度で調べても重力場は一様である．実験者はいろいろな物体で実験をすることができる．例えば，砲弾と羽毛を落とせば実験室の床に加速度，つまり同じ局所加速度 g で落下することになるだろう．重力質量と慣性質量が等しいからである．

同じ実験室が重力源から離れて何もない宇宙空間にあるとしよう．図 6.4 にも説明したように実験室は加速度 g で前方に加速している．実験者が内側で砲

弾と羽毛を落とすと，床に同じ加速度で落ちることを観測するであろう．これは重力場中で静止している実験室と同じ結果である．また，これは粒子を使った別の力学的実験によっても，内側の実験者は実験室が一様重力中で加速しているか，何もない宇宙空間で加速度運動しているかを区別できない．これらの実験に関する限り，2 つの実験室は等価である．

砲弾や羽毛のような物体の運動に関する限り，一様加速度と一様重力場を区別する局所的な実験が存在しないことから，重力質量と慣性質量の等価性はすぐわかる．しかし，光子やニュートリノで実験をするとどうなるのか．電磁場や量子色力学の場ならどうか．これらの実験によって 2 つの実験室を区別することができるだろうか．アインシュタインの等価原理は**一様加速度と一様重力場を区別することができる実験は存在しない**という考えである．

等価原理の強みは**すべての**物理法則に適用できるという主張に由来する．その例として，もし等価原理を受け入れれば光が重力場中で物質が落下するのと同じ加速度で落下することも認めなければならない．だが，光がおよぼす重力の効果を計算する方法は明らかではない．ここには，ニュートンの運動方程式 $F = m_I a$ は存在しないが，等価原理が重力場中で光を落下させるという結論をどのように強いるのかという議論がある．

空っぽの宇宙空間で光線は慣性系中をまっすぐに進む．進行方向を横切って加速する実験室から



図 6.3 スペースシャトルの中で地球の周りを自由落下する宇宙飛行士の体重は 0 であり，スペースシャトルの中で短時間行われる実験からは地球の重力場を検出することができない．

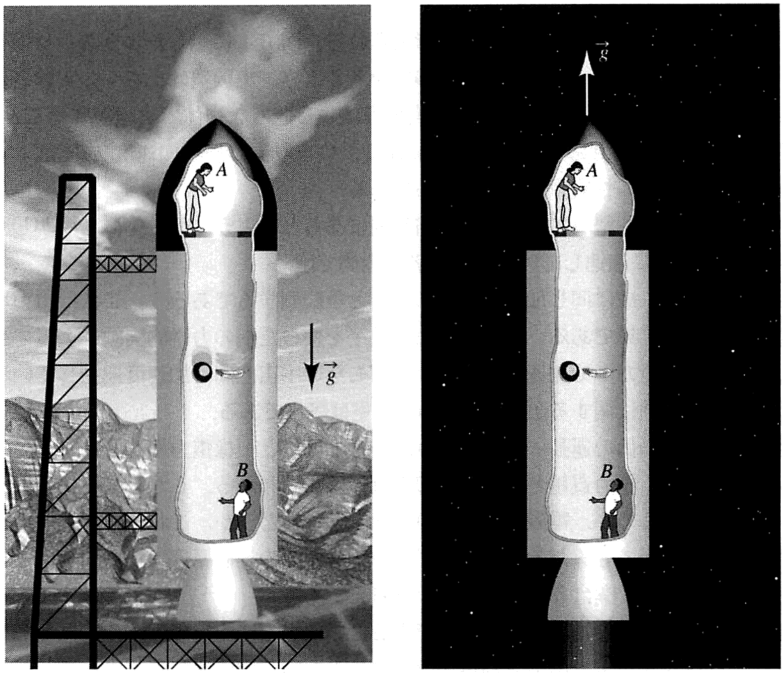


図 6.4　一様加速度と一様重力場の等価性．左図は地上で静止している実験室である．内部の観測者は砲弾と羽毛を放す．重力質量と慣性質量が等しければ，両方とも加速度 g で床に落ちる．右図は宇宙空間の深いところで，すべての重力源から離れた閉じた実験室である．実験室は上方に加速度 g で加速している．実験室内の観測者が砲弾が羽毛を同時に放すと．両方とも床に加速度 g で落下する．閉じた実験室の観測者にはどちらになっているのか区別することはできない．

光線が観測されるとする（図 6.5）．実験室系を光線が横切っている時間内にその系は前方に加速されるので，光線は入ってきたところよりも後方に出て行くであろう．よって実験室系で光線は実験室の加速にともない下方に加速される．等価原理から一様重力場中で同じことが起きると考えることができる．つまり，光線は局所重力加速度によって下方に加速される．

6.3　重力場中の時計

図 6.6 の思考実験を考えよう．観測者アリスが観測者ボブの頭上 h のところにいる．そこでは物体が重力加速度 g で落下する．地上にある塔のてっぺんと下にいる 2 人の観測者はこの状況のよい近似となっている（110 ページのボックス 6.1 を見よ）．または以下の考察の目的に対して，長さ h のロケットの先端にアリスがいて，ボブが地上で静止しているところを想像することができる（図 6.6）．アリスは同じ高さに置かれた時計[2]で測って同じ時間間隔 $\Delta\tau_A$ で光の信号を放つ．

[2] たとえば原子時計である．セシウム原子中の 2 つの低いエネルギー状態間の遷移における一定のサイクル数が時間の単位である．

ボブが同じように構成された時計でその時間間隔を測定すると，受信する間隔 $\Delta\tau_B$ はどうなるだろうか．

等価原理によると，ボブは信号が発信されたときよりも速く受信することがわかる．これを調べるために，アリスとボブがあらゆる重力源から離れ重力加速度 g で加速しているロケットの中にいるところを想像しよう．加速度のために，ボブに信号が速くたどり着き，発信されたときよりも速い割合で受信する．等価原理から，受信する割合の関係は一様重力場で止まっているロケットの中の場合と同じになるだろう．

この効果の定量的な結果を得るために，興味ある時間内で $(V/c)^2$ が無視でき，$(gh/c^2)^2$ も無視できるが， V/c と gh/c^2 が重要となる慣性系にいる加速ロケットを分析しよう（この分析とこれ以降では $c \neq 1$ 単位系が使われる)．これら 2 つの条件は本質的ではないが，分析を非常に簡略化できる[3]．$(V/c)^2$ が無視できるとニュートン力学を使うことができ，ローレンツ収縮と時間の遅れが無視できる．さらに時間間隔を比較したいだけなので，同時性の問題は無視できる． $(gh/c^2)^2$ が無視できると仮定すると，光が鼻先からつま先まで進む時間内にロケットは相対論的速度にまで加速されないことになる[4]．これらの仮定のもとではニュートン力学で十分であり，時計の進みの差は gh/c^2 のオーダーで正しいだろう．

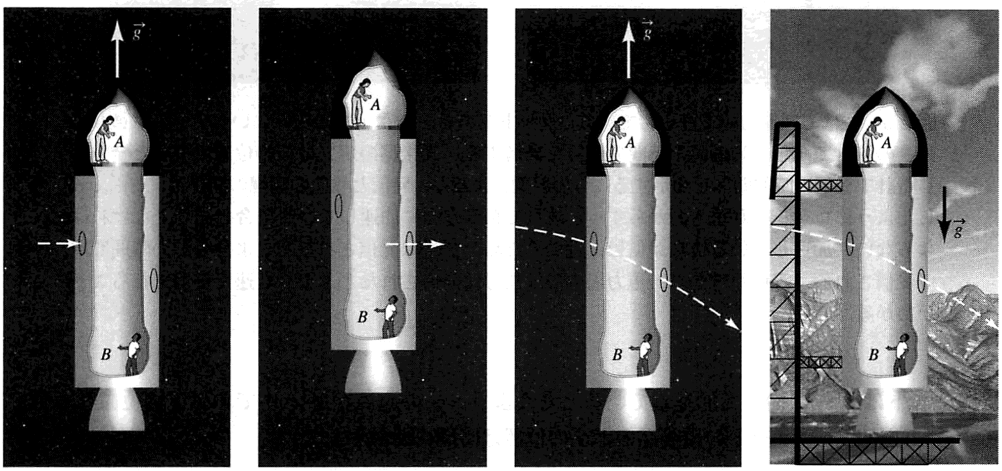


図 6.5 真空中で上に加速している実験室を光線が横切る．左の 2 つの図は慣性系から見た様子である．光線の経路はまっすぐである．しかし実験室は光線が横切る時間内に上方に運動するため，光線の出口は入口よりも下の方になり，加速度運動している実験室の観測者にとっては，光線は加速度 g で落下していく．等価原理によれば，一様重力場で静止している実験室で同じように観測されることになる．重力は光を引きつける．

[3] 特殊相対論における十分な分析については，この章の終わりの問題 6 と 7 で行える．

[4] 同じ条件で，ロケットが剛体的に加速するときに特殊相対論では避けがたい，鼻からつま先の間の加速度における差は $g(gh/c^2)$ のオーダーであるため，無視できる．問題 6 と 7 を見よ．

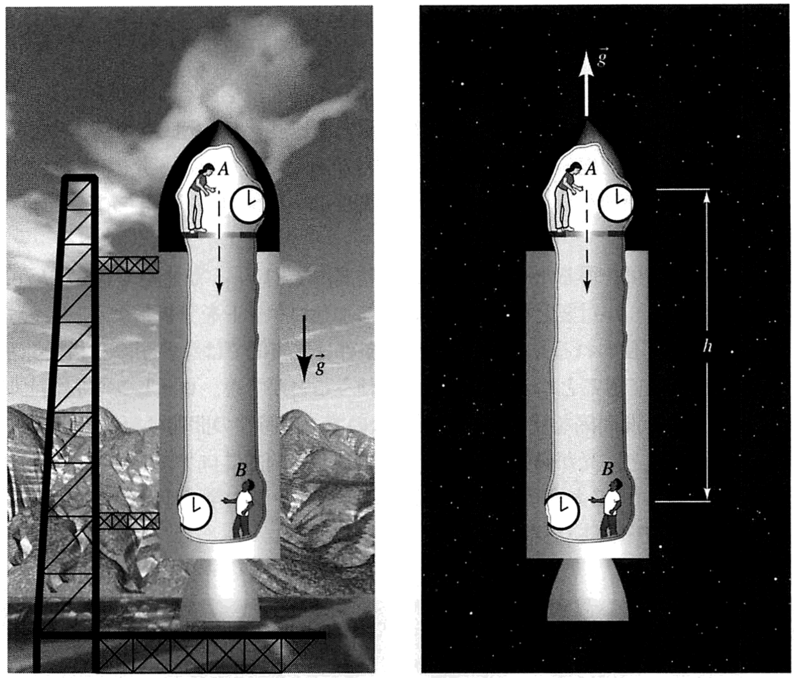


図 6.6　左は一様重力場で静止しているロケットである．ロケットの先端にいるアリスは彼女の高さの時計で測って等間隔の時間で信号を発信する．最後尾のボブは彼の位置で彼女と全く同じ時計で受信の時間間隔を測定する．等価原理によると，発信と受信の間隔の関係は，右図で表したようにロケットが重力源からずっと離れて鉛直方向に加速している場合と同じでなければならない．加速している後端が信号に近づくため，信号は発信されたときよりも短い時間間隔で受信される．等価原理から，重力場中では信号は発信されたときよりも速く受信されることがわかる．

ロケットは z 軸に沿って加速していると考えよう．z の原点が $t=0$ でのボブの位置と一致するように選べば，ロケットの最後尾のボブの位置は時間の関数として

$$z_B(t) = \frac{1}{2}gt^2 \tag{6.5}$$

で与えられる．ロケットの最先端のアリスの位置は

$$z_A(t) = h + \frac{1}{2}gt^2 \tag{6.6}$$

となる．

アリスが発信しボブが受信する 2 つの光を考えよう．$t=0$ が最初のパルスが放たれた時刻であり，t_1 が受信された時刻であるとし，$\Delta\tau_A$ が 2 つめのパルスが発信された時刻で，$t_1+\Delta\tau_B$ が 2 つめのパルスが受信された時刻であるとする．この連続する事象が図 6.7 に示されている．最初の

パルスが進む距離は

$$z_A(0) - z_B(t_1) = ct_1 \tag{6.7}$$

である．第二のパルスが進む距離は短くなり

$$z_A(\Delta\tau_A) - z_B(t_1 + \Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \tag{6.8}$$

で与えられる．(6.5) 式と (6.6) 式を代入し $\Delta\tau_A$ が小さいと仮定し，$\Delta\tau_A$ と $\Delta\tau_B$ の線形項だけ残すと

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1 \tag{6.9a}$$

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 - gt_1\Delta\tau_B = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \tag{6.9b}$$

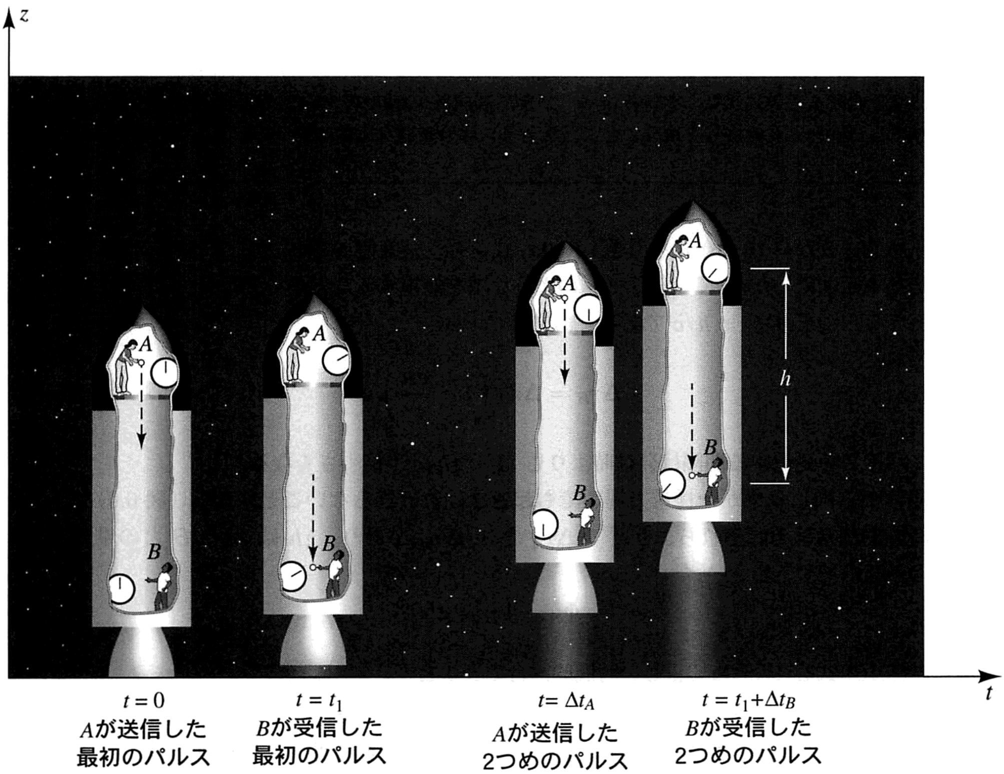


図 6.7 アリスとボブは真空中で上方に加速するロケットの中にいる．先端にいるアリスはそこにある時計で等間隔に信号を発信する．本文で考察したように，後端にいるボブが受信した信号の間隔を観測すると短くなっている．本文中で送信と受信で信号の間隔を定量的に計算するときの便宜のために，この図は信号が 2 回続いて発信され受信されるときのロケットの位置を表している．

ボックス 6.1 重力赤方偏移のテスト

重力赤方偏移の予言の正確なテストは Pound and Rebka (1960) と Pound and Snider (1964) によって行われ，一様重力場中でアリスとボブが発信と受信の間の時間を比較するという本文の思考実験を実現したものである．現実的にはハーバード大学のジェファーソン物理研究所の 22.5m の高さの塔で行われた．信号として，不安定原子核 ^{57}Fe が崩壊するとき発する 14.4-keV ガンマ線を使った．振動数 ω はエネルギー E と $E = \hbar\omega$ の関係があるが，ガンマ線の振動数は (6.12) 式の A における発光率と考えることができる．ガンマ線は塔の根元に向かう．ここでは同じような試料 ^{57}Fe が受信器として作用する．ガンマ線の振動数がまだ発信器と同じならば，放出された反応の逆を通じて検出されるだろう．しかし，(6.11) 式から，$h = 22.5$m の高さでは振動数が $gh/c^2 \sim 10^{-15}$ の割合で大きくなり，つまり青方偏移するはずであり，吸収の効率が悪くなる．放射線源の鉛直方向の速度を変えることにより，実験者がドップラー偏移をつくり出し，重力赤方偏移分を補うことができる．吸収が最大になる速度が重力赤方偏移の直接な測定値になる．

しかし，これはマンガ的な実験であり，現実的なものが望まれる．原子核の崩壊によって必ずしも正確に 14.4keV のガンマ線が発生するとは限らない．この値は線幅と呼ばれるエネルギーの広がりの平均値である．さらに，原子核がガンマ線を放出するとき，試料の内側では原子核はある速度で運動しており，崩壊時に原子核は制御不能な方向に反跳される．この 2 つの効果により放出されたガンマ線の振動数は広がり，ただでさえ小さい重力赤方偏移はさらに小さくなるだろう．しかし，メスバウアー効果を使うことにより，原子核は結晶格子にうまく固定され，反跳速度をかなり小さくできるのだが，線幅は重力赤方偏移よりも約 1000 倍も大きいままである．放射線源の速度に課された変化の制限により実験者は重力赤方偏移を分離することができ， 約 1% の精度で (6.12) 式の予言を確かめることができる．より正確な実験は第 10 章で述べる．

となる．(6.9a) 式から (6.9b) 式を引き，(6.9a) 式をもう一度使って t_1 を消去する．計算の始めに示された基本原則にしたがい，$(gh/c^2)^2$ のような項を無視することができ，t_1 へは 1 次近似だけが必要となる．つまり $t_1 = h/c$ である．結果は

$$\Delta\tau_B = \Delta\tau_A \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \tag{6.10}$$

となる．パルスを受信する間隔は発信時よりも $(1 - gh/c^2)$ 倍小さくなる．

等価原理から同じ効果が一様重力場中でも起きなければならないことになる（図 6.6)．発信と受信の時間的**割合**はそれぞれちょうど $1/\Delta\tau_A$ と $1/\Delta\tau_B$ であり，gh は A と B との重力ポテンシャルの差なので

$$\Phi_A - \Phi_B = gh \tag{6.11}$$

となる．(6.10) 式を $1/c^2$ まで正しい時間的割合で表すと

重力場中の発信率と受信率

$$\boxed{(B\ \text{で受信される割合}) = \left(1 + \frac{\Phi_A - \Phi_B}{c^2}\right)(A\ \text{で受信される割合})} \tag{6.12}$$

となる．Φ_A と Φ_B の相対的な差が何であってもこの関係は成り立つ．受信者が発信者よりも高い重力ポテンシャルのところにいれば，信号は発信されたときよりも遅く受信されるであろう．受信者が発信者よりも低いポテンシャル内にいれば，信号は速く受信されるであろう．この予測を確かめた実験をボックス 6.1 で述べた．

例 6.1. UCSB で速く年をとる理論家　これらの効果はふつうの実験環境では極端に小さい．著者の研究機関で理論家たちは物理棟の最上階を占めている．理論家たちの心臓はある意味 時計である．1 階の時計で測ると，ある時間内で最上階にいる物理学者たちの心臓の鼓動は 1 階にいる同じような理論物理学者たちの鼓動よりも $(1 + gh/c^2)$ 倍速い．高さ $h \approx 30\mathrm{m}$ である．これはたった

$$1 + \frac{(9.8\mathrm{m/s^2})(30\mathrm{m})}{(3 \times 10^8\mathrm{m/s})^2} \tag{6.13}$$

であり，なんと 1 とは $1/10^{15}$ 程度しか違わない！　部屋が建物の最上階にある理論家たちは 100 年に数ミリ秒だけ余分に年をとるだけだ．眺めに払う代償としてとても安い．

(6.12) 式は一様重力場で求められたものではあるが，非一様重力場中でも成り立つと仮定しても不自然ではないと思われる．こうした拡張は $\Phi_A = \Phi(\vec{x}_A)$ と $\Phi_B = \Phi(\vec{x}_B)$ としても (6.12) 式が成り立つことになるだろう．この拡張の正否は等価原理それ自身のように，最終的には実験で決めるしかない．この拡張から，以下の例 6.2 で得られる重力赤方偏移が得られ，次節で述べる GPS が実際に適用されている．

例 6.2. 重力赤方偏移　ある振動数をもった光の波面は，その振動数と同じ割合で放射された一連の信号だと考えることができる．したがって発信と受信の関係 (6.12) は光にも適用できる．例えば，星の表面から振動数 ω_* で放出された光は星から離れた受信器に ω_∞ で到達し，それは ω_* よりも小さい．これが重力赤方偏移である．質量 M, 半径 R の星の表面における重力ポテンシャルは $\Phi = -GM/R$ であり，遠くの重力ポテンシャルはゼロである．(6.12) 式は

$$\omega_\infty = \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)\omega_* \tag{6.14}$$

である．この式は GM/Rc^2 が小さいときに正しいが，一般的な関係は 9.2 節で得られる．重力赤方偏移は $M \sim M_\odot$, $R \sim 10^3\mathrm{km}$ の白色矮星のスペクトルで検出されており，その変化の割合はわずか $\sim 10^{-3}$ である．

重力場が非一様なとき，等価原理は，重力場 $\vec{g}$ の非一様性が検出されないほど小さい実験室で，短い時間で実験を行った場合のみ成り立つ[5]．

等価原理

自由落下している十分小さな実験室で実験を十分短い時間で行ったときと，
何もない空間の慣性系で同じ実験したときの結果は区別できない．

[5] 等価原理という言葉は数学的には不正確のように感じないだろうか．実際そうだ．数学より先んじて定式化された物理学の法則を表す原理と相対論の原理は一般的にそうなっている．もちろん内容に意味がないわけではない．31 ページの相対性原理についての見解を見よ．

等価原理はこの形で一般相対論でも意味を持ち，そのことを 7.4 節で知るだろう．例 6.3 で，どれだけ小さい実験室でなければならないか，どれだけ短い実験時間が必要とされるかが，どんな抽象的な議論よりも明らかにされるだろう．

6.2 節で述べたように，この形の等価原理は重力の理論で成り立つ必要はない．しかし，多くの現象で実際に成り立ち，すでに知られている平坦時空の法則を曲がった時空に一般化する方法を模索するときに役立つ．

例 6.3. スペースシャトル内で地球の重力場の検出　自由落下するスペースシャトルの実験室内でさえも，十分長い時間をかけて実験を行えば，地球の重力場を検出するのに十分大きな空間となる．宇宙飛行士が卓球の球をスペースシャトルの瞬間的な慣性系で止まった状態で放し，2 つの球の間隔を観察することを考えよう．もしスペースシャトルの中に何もなく重力源からずっと離れているとすると，間隔は変わらないだろう（空気抵抗や静電気，相互重力の引力などが無視できる理想的な状況を仮定している）．だが，地球の重力場では，地球の中心に向かう加速度は地球に近い球の方がわずかに大きい．したがって間隔は広がるだろう．この変化を宇宙飛行士が測定することで地球の重力場を検出することができる．

間隔に有意な変化が見られる時間を評価するために，地球の中心に対して静止している慣性系の中でボールの運動を分析しよう（太陽の周りの運動は無視する）．相対運動に関して，シャトル自体の運動は無関係である．つまり，2 つのボールは自由落下するが，我々は間隔だけに関心がある．簡単のため，図 6.8 に示したように，ボールは地球の中心から伸ばした方向に沿って s 離れているとしよう．さらに地球に近い方の球は地球の半径 R で回る円軌道を速度 $\vec{V}$ で回るように放されるとしよう．遠い方の球は同じ速度 $\vec{V}$ で放され，わずかに楕円軌道を回るようにする（問題 5）．地球の中心方向の加速度は近い方の球が $V^2/R = GM_\oplus/R^2 \equiv g$ であり，遠い方が

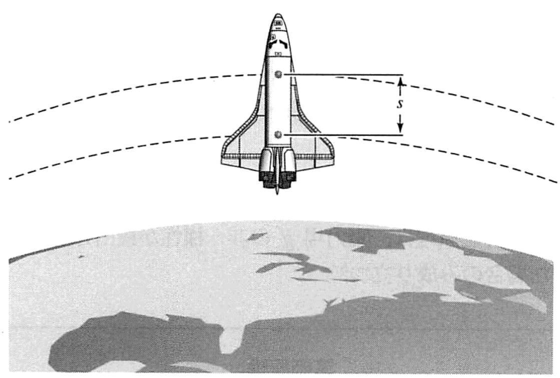


図 6.8　スペースシャトル内の宇宙飛行士が 2 つの卓球の球を地球の中心から伸びた方向に間隔 s 離して放す．地球の中心に対してほとんど静止している慣性系で測定して，同じ速度で 2 つの球は放される．理想的な状況で球は地球の周りを自由落下する．しかし，2 つは別の軌道を回り，相対距離を測定することで，宇宙飛行士は軌道を運動中に重力場の存在を知ることができる．

$GM_{\oplus}/(R+s)^2$ である．相対的加速度 $a_{\rm rel}$ は $s \ll R$ で初め $2g(s/R)$ である．時間内 δt に球の間隔は $\delta s \sim (1/2)(a_{\rm rel}\delta t^2)$ 変わる．これは軌道周期 $P = 2\pi R/V$ で表すことができる．ここで $V^2/R = g$ である．大雑把な結果

$$(\delta s/s) \sim (2\pi\delta t/P)^2 \tag{6.15}$$

が得られる．よって，1 軌道分の時間スケールで，すぐさま宇宙飛行士は球の間隔に大きな変化があることに気づき，重力源の近くにいることを知る．位置の測定の精度を固定すれば，実験室が小さくなるほど，実験の行われる時間が短くなるほど，この効果は小さくなる．第 21 章でこの実験のアイディアを使って，時空の曲率を局所的に測定する方法を考案することになるだろう．

6.4 GPS

重力ポテンシャルが異なる位置で信号の発光と検出の時間的割合の差 (6.12) は (6.13) 式が示すように，実験環境中では微小だ．しかし，この差は，日常的に使われる GPS の動作に対して決定的である．4.4 節で考察した時間の遅れの相対論的効果とこの章の重力的効果が正しく採り入れられなければ，システムは 1 時間としないうちに狂ってしまうだろう．

GPS は 24 個の人工衛星からなり，それぞれ 6 つの軌道面内で地球を 12 時間周期で回っている (図 6.9 を見よ)．各人工衛星は正確な原子時計を備え，人工衛星の固有時として数週間で 10^{13} 分の 1 程度の精度を保っている．地上から一日に数回調整することで正確な時間が長い期間にわたっ

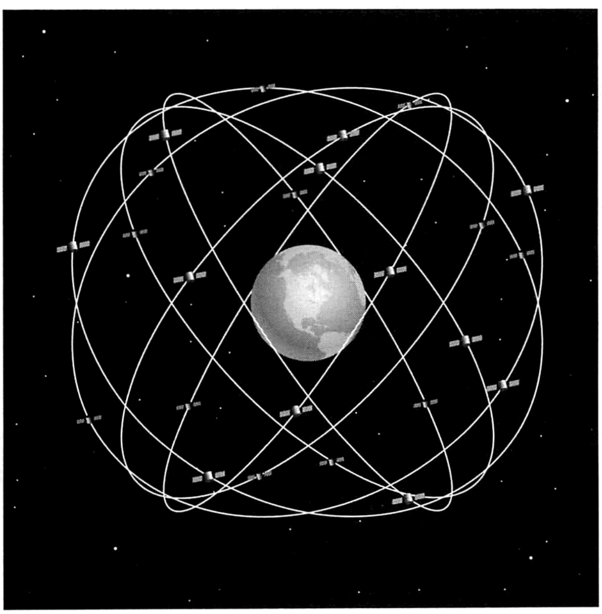


図 6.9　GPS 衛星の配置．24 個の人工衛星の GPS は等間隔にある 6 個の軌道面にある．

て維持されている．システムの動作の詳細は複雑であるが[6]，基本的なアイディアは状況を理想化することで簡単に説明できる[7]．

地上から人工衛星に信号が届くのにかかる時間スケールで，地球の中心が近似的に止まっているような慣性系を想像しよう．人工衛星はそれぞれ慣性系の座標系で発信の時刻と位置を暗号化したマイクロ波信号を周期的に送る．ある時間遅れて信号を受け取った観測者は時間間隔に光速をかけて，人工衛星までの距離を計算する（図 6.10 を見よ）．3 つの人工衛星からの信号を使うことで観測者の位置が 3 つの球面の交点に狭められる．4 つの人工衛星を使うと，図 6.11 に説明したように観測者が時空の完全な位置を与える正確な時計を持っていなくても，観測者の空間的位置と時刻の両方が固定される．さらに遠い衛星からの信号によって不定性は減る．

衛星の固有時は少なくとも以下の 2 つの理由で慣性系の時間を与えるように較正されなければならない．特殊相対論の時間の遅れとこの章で考察している地球の重力場による効果である．これを理解するために，GPS 衛星がその時計で測って一定の割合で信号を発信すると仮定する．さらに，これらは慣性系で静止している遠くの観測者によって監視されているとする．この観測者の時計は静止しており，重力効果を及ぼすものすべてから遠ざかっており，慣性系の時間を測定している．信号は発信されたときよりも遅くれて受信される．動いている人工衛星の時間の遅れが 1 つの原因である．しかし，衛星は遠い観測者よりも地球の重力ポテンシャルの低いところにあるため，信号の割合に送信と受信で差 (6.12) が生じる．慣性系における時間を知るために，2 つの補正を人工衛星時間の発信の割合に適用しなければならない．

これらの補正の大きさを見積もるために，簡単のため，GPS 衛星は地球の中心から半径 R_s で 12 時間周期で赤道上の円軌道を運動していると仮定しよう．軌道パラメータはすべてニュートン力学から計算することができ，これらは特殊相対論と重力効果の大きさを評価する目的においては十分正しい．したがって，慣性系における人工衛星の速さ V_s は速度と周期の関係 $V_s = (2\pi R_s)/(12\text{hr})$ および

$$\frac{V_s^2}{R_s} = \frac{GM_\oplus}{R_s^2} \tag{6.16}$$

によって決められる．本書の見返しにあるデータを使い，少し計算すると

$$R_s \approx 2.7 \times 10^4\text{km} \approx 4.2R_\oplus \tag{6.17a}$$

$$V_s \approx 3.9\text{km/s}, \qquad V_s/c \approx 1.3 \times 10^{-5} \tag{6.17b}$$

となる．ここで $R_\oplus = 6.4 \times 10^3\text{km}$ は地球の半径である．

これらの基本的パラメータを使い，慣性系の時間を維持するために必要な人工衛星時計への補正を評価することができる．補正因子を 1 プラス微小な数の補正としてかけあわせるような形に表す．(4.15) 式から，時間の遅れを埋めあわせるのに必要な微小な補正は $1/c^2$ までで

$$\begin{pmatrix}\text{時間の遅れにおける}\\ \text{微小な補正}\end{pmatrix} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{V_s}{c}\right)^2 \approx 0.84 \times 10^{-10} \tag{6.18}$$

---

[6] たとえば，800 ページほどもある Parkinson and Spilker（1996）の詳細を見よ．

[7] GPS に関係する別の 1 次元のトーイモデルは 63 ページの例 4.4 で考察した．

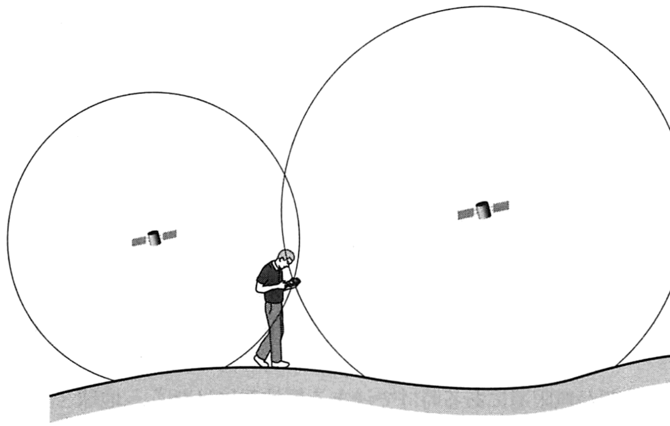


図 6.10 GPS 衛星が発信時刻 t_e と人工衛星の位置を暗号化した信号を送っている．$\Delta t = t_r - t_e$ 後の時刻 t_r で信号を受け取った観測者は，自分が人工衛星の中心から半径 $c\Delta t$ の球のどこかにいることを知る．2 つの人工衛星から送られた信号によって位置が 2 つの球の交点に狭められる．

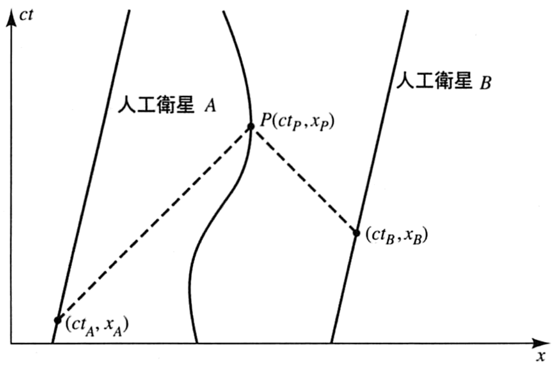


図 6.11 1 次元では 2 つの人工衛星から送られた信号だけでも，同時に受信した時空の点 P の位置を特定するのに十分である．図は慣性系内における 2 つの衛星の世界線を示している．各々の世界線は発信の座標 (ct, x) を暗号化した信号を送っている．これらの信号は図に示した 45° の線に沿って光速で進んでいる．(ct_A, x_A) と (ct_B, x_B) からの信号が P で同時に受信されたとすると，P の座標は

$$ct_P = \frac{1}{2}\left[c\,(t_A + t_B) + (x_B - x_A)\right],$$
$$x_P = \frac{1}{2}\left[c\,(t_B - t_A) + (x_B + x_A)\right]$$

で与えられる．同様に 4 つの衛星からの信号で 4 次元時空中の時空点を特定することができる．

である．(6.12) 式から重力ポテンシャルの効果を埋めあわせるための微小な補正は $1/c^2$ のオーダーまでで (6.17) 式のパラメータを使うと

$$\begin{pmatrix}\text{重力ポテンシャルにおける}\\ \text{微小な補正}\end{pmatrix} \approx \frac{GM_{\oplus}}{R_s c^2} \approx 1.6 \times 10^{-10} \tag{6.19}$$

となる．重力の補正は時間の遅れの補正より大きい．

これらの補正は日常生活の基準ではほんのわずかであるが，ナノ秒は GPS の動作では十分大きな時間である．人工衛星からの信号はナノ秒で 30cm 進む．GPS の軍事的応用で発表されている 2m の正確性を出すためには，時間差がほぼ 6ns の精度でなければならないことを知るべきだ．この程度正確に時間を保つことは現在の原子時計にとっては問題ではなく，むしろ時間の遅れや重力赤方偏移が重要となってくる．もしこれらを考慮しなければ，1 分もかからないうちに要請されるナノ秒の精度を超える誤差は集積される．GPS は特殊相対論と一般相対論の両方の実用的な応用となっている．

実際の GPS は，時間が無限遠にある時計で決まる慣性系にはなく，地球とともに回転する系にあり，その時間は地表の時計で決められている．衛星の時計の進みはその系の時間と合うように補正されなければならない（問題 14）．さらに相対論的ドップラー効果と同時の相対性（例 4.4 を見よ），地球の回転，地球の重力ポテンシャルの非球対称性，地球の電離層の屈折率による時間の遅れ，衛星時計の誤差などに対して補正が必要になる．

6.5　時空は曲がっている

信号が発信されたときと受信されたときとで重力ポテンシャルが異なり，時計の進みに差ができるが，これはどのように説明したらよいのだろうか．

説明の 1 つは，時計が進む割合に重力が影響を与えるというものだ．これは以下のように説明される．重力場が全く存在しなければ，平坦時空で静止した 2 つの時計はその系の時間を追跡する．重力場が存在すると，時空は平坦のままだが，時計は，何もない時空と比べて $(1+\Phi/c^2)$ 違う割合で進む．Φ が正なら時計は速く進み，Φ が負ならゆっくり進む．すべての時計は同じように影響を受ける．重力ポテンシャルの高いところにある時計は，低いところの時計よりも速く進む．これで発信と受信の進みの差 (6.12) を説明できる．前節の GPS の作動の考察は暗にこの視点に立っていた．

この種の説明は，地球の表面が平坦なのだが，曲がっているように見えているだけだと信じている人によって提案されるようなものとそう違わない．地表面は本当は平坦であるが，北に行くにつれて，距離を測る定規がすべて長くなっている．実際，航空会社のパイロットが昔から知っていることだが，パリとモントリオール間の距離はラゴスとボゴタ間の距離よりも短く見えるという事実は，本当の距離は等しいのだが，北の定規が長いために距離が短く見えるとすれば説明できる（図 6.12 を見よ）．この完全な理論は，定規の長さを変えるという特別な「場」を導入すれば，うまく説明できる．一貫性をもたせると，この場は北方に行けば行くほど距離が**つねに**短くなるように，**すべての**長さに同じように影響を及ぼさなければならない．場は定規を長くするだけでなく，飛行機やパイロット乗客も東西方向に大きくしなければならない．さらに，ぶつかる空気の分子を少なくし，パリ，モントリオール間の飛行で使われる燃料がラゴス，ボゴタ間よりも少なくなるよ

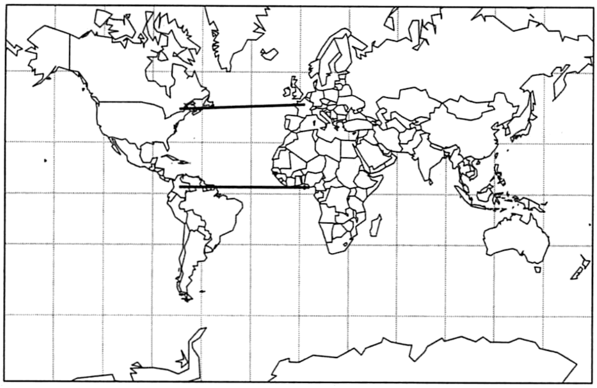


図 6.12 平坦地球理論．平坦地球理論ではモントリオールとパリの間の距離がボゴタとロゴスの間の距離とほぼ同じである．距離は，特別な場の存在のため短くなるように見えるだけである．その場は，すべての物質と結び付き，すべての定規を長くし，高緯度にいくほどその効果は大きくなる．

うに基本的な原子の定数を変えなければならない．

重力場中の時計に測られる時間間隔を平坦時空で説明することと地球上の定規によって測定される距離を平坦地球で説明することには 1 つの共通点がある．これらはともに，すべての装置が同じように影響を受けるので，置かれている幾何学を直接測ることが不可能だという仮定に基づいている．地上の距離は定規で正確に測られ，その表面が曲がっていることを認識することが簡単でより経済的で，究極的に強力である．同じように，時空においても時計が正しく時間的距離を測り，幾何学が曲がっていることを認識することは簡単で経済的にも強力である．これが一般相対性理論への道である．

6.6 時空のことばで表したニュートン重力

重力の幾何学理論がどんなものであるか洞察を得るために，まず簡単なモデルを考えよう．このモデルを使って，時計の振る舞いを**幾何学的に**説明するためには，わずかな曲率を特殊相対論の平坦時空幾何学に導入できるように修正する．さらに，この修正された幾何学中で固有時が極値をとる世界線が，非相対論的速度のとき重力ポテンシャル内の運動に対してニュートン力学の予測を再現できることをみる．

時空幾何学のモデルは線素（$c \neq 1$ 単位系）

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (6.20)$$

静的弱場計量

によって決められる．ここで重力ポテンシャル $\Phi(x^i)$ はニュートンの場の方程式 (3.18) を満たし，無限遠で 0 になる位置の関数である．たとえば，地球の外側で $\Phi(r) = -GM_{\oplus}/r$ [(3.13) 式を参照] である．この線素は実際に時間非依存の弱い重力場によって小さい曲率がつくられるとき，

一般相対論によって予言される．これが **静的で弱い場** と呼ばれる由縁である．たとえば，太陽によってつくられる曲がった時空幾何学のよい近似になっている．

発信と受信における進み具合

信号が発信されたときの進みと受信されたときの進みの差は (6.20) 式から以下のように説明できる．信号が位置 x_A で発信され x 軸に沿って伝わり，別の位置 x_B で受信されたと考えよう．図 6.13 は発信機と受信機，2 つの光の信号を表す (ct, x) 時空図である．光は A で t 時間座標において Δt の時間間隔 離れている．光信号の世界線は平坦時空でみられるような 45° の直線ではない．しかし，2 つの信号の世界線は，幾何学が時間 t と独立なので同じ形をしている．2 つ目の信号の世界線は 1 つ目と同じだが，上方に Δt ずれている．信号は A で発信されたのと同じ座標間隔 Δt で B で受信される．しかし，座標間隔 Δt は 2 つの位置における 2 つの異なる**固有**時間間隔に対応する．x_A の位置における 2 回の発信間の座標間隔は Δt と $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ である．これらの事象間の固有時間間隔 $\Delta\tau_A$ は $1/c^2$ のオーダーまでとると，(6.20) 式および $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ から

$$\Delta\tau_A = \left(1 + \frac{\Phi_A}{c^2}\right)\Delta t \tag{6.21}$$

となる．ここで $\Phi_A \equiv \Phi(x_A, 0, 0)$ である（x が小さいとき正しい関係 $(1+x)^{1/2} \approx 1 + (1/2)x$ を使った）．同様に受信では

$$\Delta\tau_B = \left(1 + \frac{\Phi_B}{c^2}\right)\Delta t \tag{6.22}$$

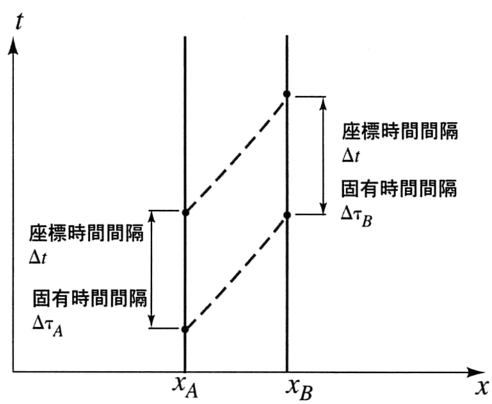


図 6.13　曲がった時空のモデル (6.20) における光の信号の発信と受信．この時空図（ここで $c = 1$）は 2 人の定常観測者 A と B の世界線を表している．信号は A で固有時間間隔 $\Delta\tau_A$ で発信され，$\Delta\tau_A$ は座標時間間隔 Δt と (6.21) 式で結びついている．線素 (6.20) は t と独立なので，信号の受信の座標間隔も Δt となるが，これらの事象の固有時間間隔 $\Delta\tau_B$ は $\Delta\tau_A$ とは違う．受信の間隔は発信の間隔とは違う．

である．これら 2 つの関係式から Δt を消去すると

$$\Delta\tau_B = \left(1 + \frac{\Phi_B - \Phi_A}{c^2}\right)\Delta\tau_A \tag{6.23}$$

が得られる．これは，(6.11) 式のときの (6.10) 式であり，(6.12) 式につながる．進みの差は時空幾何学によって説明される．

時空のことばで表したニュートン運動

重力場における 1 粒子のニュートンの運動法則は (6.20) 式で表される幾何学を使って幾何学的なことばで表すことができる．5.4 節で，平坦時空の自由粒子は 2 点間の固有時が極値をとる経路にしたがうことを示した．同じ原理によって (6.20) 式でまとめられる時空幾何学中で重力ポテンシャル Φ 中の粒子の運動も決まる．その方法は 5.4 節と同じだが，平坦時空の線素の代わりに (6.20) 式を使う．時空中の 2 点 A, B 間の固有時は世界線に依存し

$$\begin{aligned}\tau_{AB} &= \int_A^B d\tau = \int_A^B \left(-\frac{ds^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ &= \int_A^B \left[\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{6.24}$$

で表され，積分は A, B をつなぐ世界線に沿って行われる．世界線に沿ったパラメータ t を使うと，経過固有時は

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left\{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{6.25}$$

と書ける．大括弧の中の量はちょうど非相対論速度 $\vec{V}^2$ の 2 乗である．$1/c^2$ の 1 次だけ正しいもの[8]をとれば

$$\tau_{AB} \approx \int_A^B dt \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\vec{V}^2 - \Phi\right)\right] \tag{6.26}$$

となる．

これを 6.4 節の GPS との関連で議論した時間の遅れと重力ポテンシャルの効果の組み合わせだと思うかもしれないが，ここでは統一的に時空幾何学から導き出されたもので $1/c^2$ の 1 次まで正しいとしている．この公式の興味深いテストはボックス 6.2 で述べる．

(6.26) 式の第一項は世界線がどうなるかに無関係なので，A, B の固有時が極値をとるような世界線では

$$\int_A^B dt \left(\frac{1}{2}\vec{V}^2 - \Phi\right) \tag{6.27}$$

[8] $1/c^2$ の 1 次とは，厳密に言えば無次元の比較的小さい量 $(V/c)^2$ と Φ/c^2 で展開したときの 1 次のという意味である．$c = 1$ の単位系でも意味をもつ．他の場所でもこのような展開の非公式な方法を使うだろう．

が極値になる．極値である条件はラグランジュ方程式であり，ラグランジアンは

$$L\left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 - \Phi(\vec{x}, t) \tag{6.28}$$

である [(3.33) と (3.35) 式を参照]．(6.28) 式に質量をかけると，ちょうど重力ポテンシャル Φ 中で運動する非相対論的粒子のラグランジアンになっている．ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi \tag{6.29}$$

となり，両辺に m をかけるとちょうど $\vec{F} = m\vec{a}$ となる．

ニュートン重力は，曲がった時空 (6.20) **における幾何学的なことばで完全に表すことができる** (表 6.1 を見よ)．質量が存在することで重力ポテンシャルができ，$m\vec{a} = -m\nabla\Phi$ を通じて粒子の

ボックス 6.2 双子のパラドックスのテスト

時間的曲線の長さはそれに沿って運動する時計の固有時によって測定され，2 つの時空点を結ぶ曲線が違えば経過固有時も違う．これが 4.4 節で議論した双子のパラドックスの幾何学的な解であった．このことは特殊相対論の時空で正しいように，静的で弱い重力場でも正しい．1971 年ヘイフリー（J. C. Hafele）とキーティング（R. E. Keating）は時間の遅れと相対論的進みの効果の両方を組み合わせた実験をした（Hafele and Keating 1972)．これは実際に (6.20) 式のチェックとなる．彼らはセシウム原子時計を定期便に載せて地球の周りを飛行し，地上に戻り静止している標準時計と比較した．実験は 2 度行われ，1 度目は東回りにもう 1 度は西回りであった．



原子時計とともに搭乗しているヘイフリーとキーティング．

飛んでいる時計は地球の重力ポテンシャルの中で上方にいるが，これが唯一の効果であるとすると，地上の時計と比べて速く進んでいるだろう．しかし，飛んでいる時計は地上の時計に対して運動しているため時間の遅れの効果によりゆっくり進む．よって 2 つの効果は競合する．彼らはこの実験を十分分析できる $1/c^2$ の正確さで (6.26) 式にきれいにまとめた．この公式の t は飛行機や地上にある時計で刻まれている時間ではなく，慣性系で静止している時計の時間である．飛んでいる時計と地上の時計を比較するために，まず標準時計と比較し，それから互いに比較する．

$V_g(t)$ を地球に対する飛行機の速さ，$h(t)$ をその高度，$V_\oplus = 2\pi R_\oplus/(24\mathrm{h})$ を地球の表面の速さと定義する．簡単のため，赤道に沿って飛行しているとすると，飛んでいる時計と地上の時計の経過固有時間差は

$$\Delta\tau = \frac{1}{c^2}\int dt \left\{ gh(t) - \frac{1}{2}V_g(t)[V_g(t) + 2V_\oplus] \right\}$$

となる（問題 15)．ここで t は地球の中心に対して静止していると近似してよい慣性系の時間である．V_g が正の東回りと負の西回りには，第二項の大きさと符号に大きな差がある．$h(t)$ と $V_g(t)$ について詳細な飛行記録を残すことにより，実験者はこの公式を確かめ，観測された時計の読みを比較することができた．東回りとして，-40 ± 23ns を予測し（飛んでいる時計よりも地上の時計の方が時間が経過する)，-59 ± 10ns が測定値だった．西回りの飛行では 275 ± 21ns を予測し 273 ± 7ns が観測された．全飛行時間はそれぞれ 41 時間と 49 時間で，精度は $1/10^{13}$ だった．両方の観測は時間の遅れと等価原理の予測とよく一致している

表 6.1　重力のニュートン形式と幾何学的形式の比較

	ニュートン重力	幾何学的ニュートン重力	一般相対論
質量のすること	他の質量に作用する力	時空を曲げる	曲がった時空
	$\vec{F}=-m\vec{\nabla}\Phi$	$ds^2=-\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2$	
	を引き起こす場 Φ をつくる	$+\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)$	
粒子の運動	$m\vec{a}=\vec{F}$	固有時が極値をとる曲がり（$1/c^2$ の 1 次）	固有時が極値をとる曲がり
場の方程式	$\nabla^2\Phi=+4\pi G\mu$	$\nabla^2\Phi=+4\pi G\mu$	アインシュタイン方程式

運動を決めるのではなく，質量の存在により (6.20) 式で表される時空曲率ができ，粒子は固有時が極値をとる経路に沿ってこの幾何学中を運動する．力の概念と時計における効果は幾何学的なアイディアによって置き換えられる．質量の概念は，曲率を作る質量の影響のもとで運動する粒子の運動の記述に決して入ってこないので，ある意味，重力質量と慣性質量が等しいことが説明される．運動の法則は自由粒子のものと同じであるが，曲がった時空でという点だけが違う．

第 4.4 節で述べたように，平坦時空では直線経路が固有時の最も長い 2 点をつなぐ曲線でもある．2 点をつなぐ曲線のうち固有時が極値をとるものが 1 つだけあれば，同じことが曲がった時空中でも正しく成り立つ．しかし，2 つ以上あれば，その経路は固有時が最長でも，最短でもないかもしれない．それらは単に極値をとっているだけかもしれない[9]．

線素 (6.20) の**空間**部分の因子 $(1-2\Phi/c^2)$ は時計の時間間隔の相対論的関係式 (6.23) やニュートンの運動方程式 (6.29) を $1/c^2$ のオーダーで導く際に何の役割も果たしていない．$1/c^2$ までのオーダーで因子 1 があるためだ．したがって，速度が小さい場合ニュートン重力の予測を再現できる曲がった時空は多くある．特別な静的な弱い場の計量 (6.20) は一般相対論の予言である．光線の軌道では，違うものを選べば別の予言になる．これは第 10 章でみる．

重力の幾何学理論として表 6.1 の 2 番目の縦列に並べられた要素はどうなっているのか？ これまで見たように，非相対論的速度の第一の縦列にあるニュートン理論の運動が正しく再現される．答えは，このような理論は特殊相対論と矛盾するというものである．この章の初めで強調したように，ニュートンの重力法則は (6.1) 式または (3.14) 式で表されても，物体で瞬時に相互作用するため，特殊相対性原理と矛盾する．(6.20) 式の時間と空間の非対称性は別の意味でこのことを表している．幾何学的な形式でさえも，ニュートン重力は特殊相対論と矛盾する．十分相対論的，幾何学的な重力理論は空間と時間を対称的な基盤で扱うだろう．これがアインシュタインの 1915 年の一般相対性理論である．アインシュタインの理論では (6.20) 式の形に拘束されず一般幾何学を扱い，これらの幾何学が満たしていなければならない場の方程式としてニュートンの重力理論 (3.18) を一般化したものを使う．場の方程式は**アインシュタイン方程式**と呼ばれる．第 21 章までアインシュタイン方程式に出くわさないだろう．しかししばらくこの方程式の帰結を広く探ることにしよ

[9] この疑問に対してより深い洞察を得るためには問題 12 または 14 を解け．

う．まず，曲がった時空の数学的記述法を考察する必要がある．これを次の2つの章で行う．

問題

1. 図6.1に示されているねじりばかりの紐は局所重力場 $\vec{g}$ の方向に対してどんな角度をなすか．(6.2) 式の g^t の値はいくらか．実験は 47° の緯度で行われると仮定せよ（これはシアトルの緯度である．本文中で述べた Su et al. の実験が行われたところである）．
2. エトヴェシュの実験の現代版で，ねじりばかりのねじれは棒につけられた鏡で光を反射し，角度 θ の時間依存を測ることによって測定されたと仮定せよ．等価原理を 10^{12} 分の1の精度でテストするのに必要な角度の精度はいくらか．棒の長さは 4cm で，質量はともに 10g であり，紐のねじれ定数（直線運動のばね定数と類似する）は $2\times10^{-8}\mathrm{N\cdot m/rad}$ であり，ねじれの方向の重力加速度は問題1で決めたとおりである．
3. [S] 地上の重力加速度を仮定して，図6.5のエレベータを光線が横切る間に 1mm 落下するようにするためには，エレベータの幅はどれくらいでなければならないか．これは地上で行えるような実験か．
4. 111ページで述べた形の等価原理から出発して，つまり自由落下系と慣性系だけを使って，光が地球の重力場で落下しなければならないことを議論せよ．
5. 自由落下する卓球の球に関する例6.3で，地球に近い方の球はちょうど地球を円軌道するのに必要な横方向の速度で投げ出された仮定する．したがって同じ速度で投げ出された遠い方の球は楕円軌道を進むだろう．この軌道の離心率を s の関数として求めよ．2つの軌道の略図をかけ．その図は，1周で粒子間隔が大きく変わるという例の結果を支持しているか．**ヒント：**ニュートン力学の教科書の楕円軌道を詳しく調べよ．
6. (a) 特殊相対性理論の線素をふつうの直交座標 (t,x,y,z) から

$$
\begin{aligned}
t &= \left(\frac{c}{g}+\frac{x'}{c}\right)\sinh\left(\frac{gt'}{c}\right)\\
x &= c\left(\frac{c}{g}+\frac{x'}{c}\right)\cosh\left(\frac{gt'}{c}\right)-\frac{c^2}{g}\\
y &= y', \qquad z = z'
\end{aligned}
$$

   によって新しい座標 (t',x',y',z') に変換せよ．g は加速度の次元をもつ定数である．

   (b) $gt'/c \ll 1$ のとき，これがニュートン力学における一様加速度系への変換に対応することを示せ．

   (c) この系において $x'=h$ で静止している時計は $x'=0$ で静止している時計に比べて，$1+gh/c^2$ 倍速く進んでいることを示せ．これは等価原理の考えとどのように結びつくか．
7. (a) 加速している実験室の床が $x'=0$ にあり，天井が $x'=h$ にあり，それらの面が y', z' 方向に広がっている．問題6の (a) で導いた線素を使って，実験室の高さが時間の定数であることを示せ．つまり実験室は剛体として運動していることを示せ．

   (b) 不変加速度 $a\equiv(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$ を計算せよ．ここで $a^\alpha = d^2x^\alpha/d\tau^2$ である．実験室の天井

と床で違うことを示せ．

8. [S] 相対論的概念と非相対論的概念を混ぜて使うことには無理があるが，振動数 ω_* の光子を重力質量 $\hbar\omega_*/c^2$, 運動エネルギー $K = \hbar\omega$ もつ粒子と考えよ．ニュートンの考えを使って，半径 R, 質量 M の球形の星の表面から放出された光子が無限遠に脱出したときの「運動」エネルギーの損失を計算せよ．これから，無限遠における光子の振動数を求めよ．$1/c^2$ の一次までで，これを (6.14) 式の重力赤方偏移と比べて，どう思うか．

9. GPS 衛星は搭載された時計で測って一定の割合で信号を発信している．地上の同じ型の時計で受信すると，どんな割合になっているか変化率で答えよ．$1/c^2$ のオーダーで，特殊相対性理論と重力の効果の両方を考慮せよ．簡単のため，衛星は赤道の円軌道上にあり，地上の時計は赤道上にあり，受信機の瞬間的静止系で信号の進む方向と衛星の速度の角度が 90° であると仮定せよ．

10. [C,P] 地球は約 50 億歳である．地球の中心の岩石は地表の岩石に比べてどれだけ若いか．もし 65 億年の指数的崩壊時間をもつ ^{238}U のような放射性元素が初め同じ量存在していたとすると，中心の放射性元素は地表よりどれだけ多く存在しているか．地球の密度は一定とする．

11. [E] 球形質量の中心では表面よりも加齢はゆっくりになる．もし中心に 1 年間住んで，外に住んでいる人たちに比べて 1 年若くなるようにするためには，10km の半径の球にどれくらい質量を集める必要があるか．

12. [S] 2 次元平面では，直線経路が 2 点間距離のうち極値をとり，最短の距離になる．2 次元の球面では極値をとる経路は大円の一部である．球面上でどんな 2 点を選んでも，極値をとる経路が存在し，近くの経路と比べても距離が最も短いことを示せ．2 点間の距離には極値をとるが，近くの経路に比べて最も長くも短くもないものがあることを示せ．2 点間の距離で最長になる経路は 1 つだけではないことを示せ．

13. 3 人の観測者が地表で互いに近くに立っている．それぞれ正確な原子時計を持っている．時刻 $t = 0$ ですべての時計の時刻を合わせる．$t = 0$ で第一の観測者は時計を真上に投げ上げ，第二の観測者の時計で T の時刻で手元に戻ってくる．第二の観測者は時計をずっと手に持っている．第三の観測者は投げ上げられた時計が達した最大の高さまで一定の速度でもっていき，時刻 T で戻ってくる．
最大高度が地球の半径よりもずっと小さいと仮定し，各時計の経過時間を求めよ．重力の効果を $1/c^2$ のオーダーまで含めて，非相対論的な軌跡を使って計算せよ．どの時計が最も**進んでいる**か．それはなぜか．

14. [C] 半径 R の地球の周りを円軌道で運動する粒子を考える．地球外の時空幾何学が $\Phi = -GM_\oplus/r$ と静的で弱い場の計量 (6.20) で表されるとする．P を時間 t で測定される軌道の周期とする．同じ空間位置において t の時間間隔 P 離れた 2 つの事象 A, B を考える．粒子の世界線は A と B の固有時が極値をとる曲線である．3.5 節で考察したように，その曲線は**近傍の**世界線と比べたとき軌道回りの固有時が極大か極小，または鞍点のどれかになる．しかし近傍の他の**どんな**世界線よりも長いかまたは短いかどうかという問題を調べてみることもできる．円軌道に対する問題を，時空の点 A と B をつなぐ，以下の世界線に沿っ

た固有時を $1/c^2$ の 1 次まで計算して分析せよ.

(a) 粒子それ自身の軌道

(b) A と B の間に固定された観測者の世界線

(c) A から半径方向に進み反対方向に反射され，時間 P 以内に B に戻ってくる光子の世界線

A と B をつなぐ曲線のうち固有時が極値をとる別のものを見つけよ.

15. [B] **双子のパラドックスのテスト**

(a) 飛んでいる時計と地上の時計の固有時の差の公式（120 ページのボックス 6.2）を導出せよ.

(b) 商用飛行機の典型的な高度と速さを使って，地球の東回りと西回りの両方で $\Delta\tau$ の値を評価せよ.

第7章

曲がった時空の表し方

この章と次章で曲がった 4 次元時空を記述する基本的な数学を扱う．その多くは第 5 章で平坦時空に対して導入した概念の一般化である．

7.1　座標系

第 2 章で考察したように，また，第 4 章と第 5 章で説明したように，時空幾何学は互いに近い 2 点間の時空距離を与える線素によって集約される．座標は時空の点に名前をつけるための体系的な手段の 1 つである．座標の選び方は，覆う領域内の各点に対して一意的に名前が付けられる限り任意である．ある特別な問題に対しては，1 つの座標系が他よりも便利なことがあるかもしれない．たとえば，力学で中心力の問題を解く場合，直交座標よりも極座標を使った方が扱いやすい．しかし，運動の法則はどちらの座標でも**表すことができ**，しかも内容は同じである．

座標の任意性は学生が把握するのに困難な点になっている．物理学のほとんどすべての初歩的な分野では，法則が簡単に見えるために好まれる座標系が少ししかないからだ．たとえば，慣性系に分類される系では特殊相対論的力学の一般的な法則が簡単な形をとる．平坦時空の特殊な対称性はローレンツ変換によって表現され，その対称性のために慣性系が非常に便利になるという理由となっている．しかし一般相対性理論では時空が曲がり，一般的に特殊な対称性をもたず，**一般的法則**を単純にする座標系の分類というものはないだろう．特別な問題は特殊な座標系によって簡単になるはずだろうが，すべての問題を簡単にする座標系の集合は存在しない．したがって，任意の座標で一般法則を定式化するには経験が必要となる．これがこの章の主題である．

線素で幾何学を決めるのだが，**多くの線素が同じ時空幾何学を表すことがある**．なぜならいろいろな座標系が使われるからである．たとえば，特殊相対論の平坦時空は直交座標で

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.1}$$

にまとめることができる [(4.8) 式を参照]．$c = 1$ 単位系が使われているが，これをこの章と以下の章で使うことにする．計量の空間部分は極座標に変換することができる．

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta \tag{7.2}$$

と書いて微分し，たとえば

$$dz = dr\ \cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \tag{7.3}$$

などを (7.1) 式に代入すると，線素は

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \tag{7.4}$$

となる．この形は (7.1) 式とは違って**見える**が，点の名称が変わっているだけで**同じ**平坦時空である．平坦時空の座標系にあるその他の興味深い例をボックス 7.1 に挙げた．

座標は任意なので，記号から多くを読み取ろうとしすぎないように注意すべきだ．たとえば，線素

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2 + y^2 dz^2 + y^2 \sin^2 z \, dt^2 \tag{7.5}$$

は平坦時空を表し，(7.4) 式と同じ座標系である．単に座標系の記号が変わっただけである．記号の名前にもかかわらず，t は角度で，x に沿った方向は時間的である．

時空の各点が一意的に名前をつけられるものがよい座標系である．しかし，ほとんどの座標系は**どこかで**一意的な名前づけができなくなる．たとえば，極座標 (r, θ, ϕ) で軸上（$\theta = 0$）の点は 1 組の座標値以上に多くの名が付けられる．各 r の値に対して，ϕ の値が違っても軸上の同じ点に対応する．これは**座標特異点**の軽い例である．より深刻に見える特異点の簡単な例は極座標の 2 次元面の線素を

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{7.6}$$

と書き，ある定数 a に対して $r = a^2/r'$ の変換をすることで得られる．その結果は

$$dS^2 = \frac{a^4}{r'^4}(dr'^2 + r'^2 d\phi^2) \tag{7.7}$$

である．この線素は $r' = 0$ でふっ飛ぶ．しかし，そこでは物理的に興味深いことは何も起きない．幾何学は依然として平面なのだ．座標変換 $r' = a^2/r$ が無限遠のすべての点を $r' = 0$ に写像し，一意的な名前づけをすることができなくなるために，この特異点が生じる．実際，(7.7) 式では $r' = 0$ から $r' \neq 0$ のどんな点までの距離でも無限大になる（問題 1）．ほとんどの座標系に特異点があるということを考慮すると，すべての点を特異点のない座標で名前づけするように時空を覆うためには，パッチを重ねなければならない．その非常に重要な例を後にみることになるだろう．

7.2　計量

一般幾何学を表すために，4 つの座標 x^α の系を使って，点に名前をつけ，距離を与える線素 ds^2 を示す．その線素は

計量の定義

$$\boxed{ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta} \tag{7.8}$$

の形をとるだろう．ここで $g_{\alpha\beta}$ は位置に依存する[1]対称行列で，**計量**という．極座標 (7.4) の平坦時空の計量は

[1] 座標の関数を扱うとき，$f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ の省略形 $f(x^\alpha)$ や $f(x)$ を使う．混乱の危険性はないだろう．

ボックス 7.1 平坦時空のペンローズ図

平坦時空の有益な座標系の例は，**ペンローズ図**を作るときに使われるものである．球座標で表した平坦時空の線素 (7.4) から始めよう．t と r を以下で定義される 2 つの新しい座標 u と v に置き換えよう:

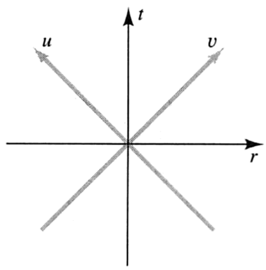
$$u \equiv t - r, \qquad v \equiv t + r \tag{a}$$

これによって線素は

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(u-v)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{b}$$

になる．

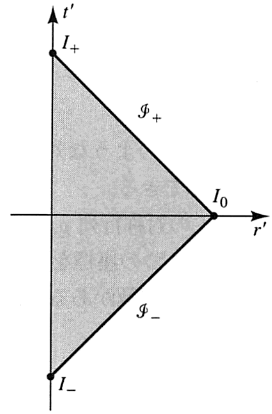
(u, v) 軸は (t, r) 時空図から見ると (t, r) 軸を 45° 回転したものになる．半径方向に進む光線は u 一定または v 一定線上を進む．これは，(a) 式の座標の定義から，または θ, ϕ と u の v どちらかが一定になる線上で $ds^2 = 0$ となることから明らかである．



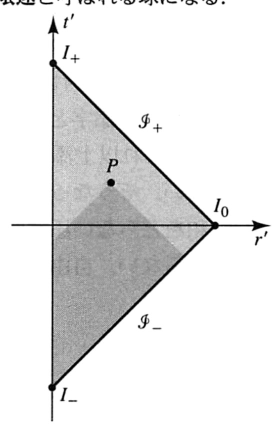
さらに u と v を以下の新しい座標 u', v' に変換し，それに対応して新しい座標 t', r' に変換する：

$$u' \equiv \tan^{-1} u \equiv (t' - r')/2, \;\; v' \equiv \tan^{-1} v \equiv (t' + r')/2 \tag{c}$$

平坦時空の t と r 座標の範囲は無限 $-\infty < t < +\infty$, $0 < r < +\infty$ である．しかし $\tan^{-1} x$ は $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にあるため (u', v') または (t', r') は無限にはならない．実際，平坦時空の (t, r) 面はすべて領域 $r' > 0$, $v' < \pi/2$, $u' > -\pi/2$ に写像される．この領域は右上の (t', r') 図で薄く影をつけてある．これが平坦時空のペンローズ図である．



無限遠を有限の座標値に写像することによって，無限遠の**種類**を区別することができる．半径方向に外側に進む光線は u' 一定の線（$t = r+$ 定数）である．それは境界 $v' = \pi/2$ にたどり着く．これは**未来ヌル無限遠**と呼ばれ，$\mathscr{I}_+$ で表す（スクリプラスと発音する）．半径方向内側に進む光線は $u' = -\pi/2$ の境界から始まり v' 一定線にしたがう．これを**過去ヌル無限遠**といい $\mathscr{I}_-$ で表す．局所光円錐内にある粒子の軌跡は**過去時間的無限遠** I_- と呼ばれる点 $(t' = -\pi, r' = 0)$ から出発しており，**未来時間的無限遠** I_+ と呼ばれる点 $(t' = +\pi, r' = 0)$ にたどり着く（問題 4)．同様に，無限遠の空間的曲線は点 I_0 で終わり，これは**空間的無限遠**と呼ばれる球になる．



ペンローズ図は，ある点の観測者が情報を受け取ることができる時空の事象を図に表すときに便利である．たとえば，最後の図で P にいる観測者は濃い影をつけたところから情報を受け取ることができるが，その外からは受け取ることができない．ブラックホールのペンローズ図はかなり複雑であるが，この種の分析はブラックホールを考察するのに便利である．

$$
g_{\alpha\beta}(x) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{array} \tag{7.9}
$$

となる．このような対角行列は $g_{\alpha\beta}(x) = \mathrm{diag}(-1, 1, r^2, r^2\sin^2\theta)$ によってコンパクトにまとめることができる．

4×4 の対称行列 $g_{\alpha\beta}$ の独立な成分は 10 個ある．同じ幾何学でも，座標系が違えば $g_{\alpha\beta}$ の成分も違う．4 つの座標を変換することで 4 つの任意関数が存在できるので，計量には $10 - 4 = 6$ 個だけの独立関数がある．

7.3　和の記法

ここまで，式の添字の位置に気をつかってきたことに気づいただろう．この点に関して我々の記法は，相対論でよく使われる大きなまとまりの一部分をなし，より進んだ教科書を読み進めるのに困難を覚えないように使ってきた．記法をまとめ，整合性を保てるように規則をいくつか以下に示す．

1. 添字の位置には注意しなければならない．7.8 節で考察するように，座標やベクトルの成分には上つきの添字を使い，計量には下つきを使う．（連鎖律 $dx^\alpha = (\partial x^\alpha/\partial x'^\beta)dx'^\beta$ のような式では，**分母**の上付きの添字は下付きの添字のように作用する．）
2. 同じ添字はいつも上下の添字の**組**となっており，和をとることになっている．そのため，**和の添字**と呼ばれている．和をとることに関して添字は別のものでもよく，そのため和の添字は**ダミー添字**と呼ばれる．よって $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$ は $g_{\gamma\delta}a^\gamma b^\delta$ と同じである．$g_{\alpha\alpha}a^\alpha b^\alpha$ のように，3 つそれ以上添字が繰り返されたり，$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$ のように上下以外の組で繰り返されることはない．そうなっていれば間違いである．
3. 和をとらない添字は**自由添字**と呼ばれる．それらは方程式の両辺でバランスをとらなければならない．自由添字の値は方程式の両辺で同時ならば変わることができる．式

$$
g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \tag{7.10}
$$

は行列が対称であることを表している．両辺で下付きの添字 α, β があり，添字はバランスをとっている．このような方程式は式の配列の省略形であると考えることができ，自由添字 α と β のそれぞれが 4 つの値をとっている．(7.10) 式は 16 個の式を表している：

$$
\begin{array}{cccc} g_{00} = g_{00}, & g_{01} = g_{10}, & g_{02} = g_{20} & \cdots \\ g_{10} = g_{01}, & g_{11} = g_{11}, & g_{12} = g_{21} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{7.11}
$$

そのため，両辺で同時に変えることができれば，自由添字は別の自由添字（まだ和をとっていないもの）に変えることができる．(7.10) 式で β を γ に変えることで $g_{\alpha\gamma} = g_{\gamma\alpha}$ とな

り，(7.11) 式の 16 個の関係式と同じものになる．$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}$ のような式は両辺でバランスをとっていないので，間違っている．

例 7.1. ちょっとしたテスト　以下の式のリストから，和の記法にかなっているものとそうでないものを分け，なぜそうなるか説明せよ．記号が何であるのかは気にしないでよい（すぐそのうちわかるだろう）．すぐとりかかり，和の規則にしたがっているかどうか決めよ．答えはこのページの下にある．

(a) $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\gamma$　(b) $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\beta\gamma}a^\beta b^\gamma$

(c) $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\alpha\beta}a^\alpha c^\beta$　(d) $\Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}a^\gamma = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$

(e) $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma = b^\alpha$　(f) $\partial x^\alpha/\partial x^\beta = \delta^\alpha_\beta$

(g) $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma = 0$　(h) $g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} = g_{\gamma\delta}\dfrac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\dfrac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}$

(i) $g'_{\alpha\beta}a'^\alpha b'^\beta = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$　(j) $a^\alpha(g_{\beta\gamma}b^\beta b^\gamma) = b^\gamma$

(k) $\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \Gamma^\beta_{\beta\beta}$　(l) $g_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$

7.4　局所慣性系

等価原理（111 ページ）は，曲がった時空の局所的性質が特殊相対論の平坦時空のものと区別できないことを意味している．この物理的アイディアを具体的に表現すると，ある座標系に計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ が与えられたとき，時空の各点 P で

$$g'_{\alpha\beta}(x'_P) = \eta_{\alpha\beta} \tag{7.12}$$

となるような新しい座標 x'^α を導入することが可能だという要請をすることである．ここで $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ は平坦時空のミンコフスキー計量であり，x'^α_P は点 P を定める座標である．この要請は一般相対性理論の仮定の 1 つである．すべての点で 3 次元空間と時間 1 次元があることを表している．

$g'_{\alpha\beta}(x'_P)$ がある点 P で対角化されるような新しい座標を見つけることは難しくはない．$g'_{\alpha\beta}(x'_P)$ は 4×4 対称行列で，常に対角化可能だからだ．対角化されてしまうと，座標を 1 つずつ定数でスケールし直し，$g'_{\alpha\beta}(x'_P)$ の直交成分が ±1 になるようにできる（もし嘘だと思うなら問題 8 を解け）．しかしながら，座標変換では P で行列の中の $+1$ の数値を -1 に変換することはできない（やってみよ）．(7.12) 式の中のように，すべての P で 3 つの $+1$ と 1 つの -1 があるというのは**仮定**である．これは 3 つの空間次元と 1 つの時間次元があるという物理的な仮定である．

以下の OK は和の記法が正しいことを表し，OK がないものは正しくないことを表す．(a) 自由添字のバランスがとれていない．(b) OK. すべて和の添字であり，両辺で上下で同じ記号になっている．(c) OK. $b^\alpha = c^\alpha$ ならば正しい．(d) OK. すべての和が両辺で完結している．(e) 同じ添字が上下の組になっていない．(f) OK しかも正しい．分母の上つきの添字は下つきと考える．(g) OK, これは計量のすべての係数の 1 階微分が 0 であることを示す 40 個の方程式である．(h) 右辺では α と β は自由添字であるが，左辺では上下にある．(i) OK. (j) 自由添字がバランスをとっていない．(k) 上下で同じ添字が組になっていない．(l) OK.

平坦時空と同じ計量にする座標変換はどこまで使うことができるのだろうか．明らかに，曲がった時空全体で $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ とするような座標を見つけることは不可能である．もしそんなことができれば，時空は平坦になってしまうだろう．しかし，(7.12) 式に加え，1 点 P で計量の 1 階微分が 0 になるような座標を見つけることはできる：

局所慣性系

$$\boxed{\mathrm{g}'_{\alpha\beta}(x'_P) = \eta_{\alpha\beta}, \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{g}'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}}\right|_{x=x_P} = 0} \tag{7.13}$$

点 P でこれら 2 つの条件を満たす座標系は P における**局所慣性系**と呼ばれる．これは平坦時空の慣性系と似ているが，1 点 P の無限小近傍にだけで成り立つ．これが**局所**慣性系と呼ばれる由縁だ．(7.13) 式は他のどの点でも満たさせることができるが，それらはそれぞれ**別の**座標でのみ可能である．時空の各点で局所慣性系を見つけられることを示すのを 8.4 節まで遅らせることにする．しかし，問題 9 を解くことでこれを支持する議論をすることができる．

例 7.2. 球面の北極における計量　円周 $2\pi a$ の幾何学の線素は，おなじみの極座標 (θ, ϕ) で

$$dS^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{7.14}$$

の形をしている [(2.15) 式参照]．北極 $\theta = 0$ で計量は平面 $dS^2 = dx^2 + dy^2$ のようには見えないが，しかし計量が平坦になり，さらに (7.13) 式に似せて計量の 1 階微分が 0 になるような座標を見つけることはできる．

$$x = a\theta\cos\phi, \qquad y = a\theta\sin\phi \tag{7.15}$$

を考える．この逆変換は

$$\theta = \sqrt{x^2 + y^2}/a, \qquad \phi = \tan^{-1}(y/x) \tag{7.16}$$

であり，これを (7.14) 式に代入することで，球の幾何学の新しい形の線素を得ることができる．北極 $\theta = 0$ は $x = y = 0$ にある．x と y が小さい北極の近傍で計量の成分を x と y のべきで展開すると ($x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$)

$$g_{AB}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y^2/(3a^2) & xy/(3a^2) \\ xy/(3a^2) & 1 - x^2/(3a^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \text{ と } y \text{ の} \\ 3 \text{ 次とそれ以上の項} \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

北極 $x = y = 0$ で，$g_{AB} = \mathrm{diag}(1, 1)$ で $\partial g_{AB}/\partial x^C = 0$ となる．ここで，添字 $A, B, \ldots$ は 1 と 2 をとる．どうやってみつけったかって？ これらが 8.4 節で考察するリーマン正規座標の例である．

一般の曲がった時空で，ある点の計量の 2 **階**微分をすべて 0 にするような座標を見つけることはできない（問題 9 を見よ）．第 21 章でみるように，正しく扱えば，2 階微分はその点の時空曲率の測定量となる．

以前述べたように，局所慣性系は，曲がった時空の幾何学が平坦時空と局所的には区別できないという等価原理の正確な表現を与える．幾何学を離れて，同じ原理によって，物理の他の法則（た

とえば粒子の運動法則）も平坦時空と同じ形を局所慣性系でとるということがわかる．6.2 節で考察したように，そのことは曲がった空間で理論が整合性をもつための要請ではなく，平坦時空で知られている法則を曲がった時空でも使えるようにするためにどのように一般化したらよいのかを推測するのに便利な出発点になる．この例をいくつか後に見ることになるだろう．

7.5　光円錐と世界線

x^α の点 P とその近傍の時空距離は，(7.8) 式の座標または局所慣性系の座標でも計算することができる．仮定 (7.12) から，一般相対論は本来，4.3 節と図 4.9 で表される特殊相対論の局所光円錐構造を持っていることになる．P から無限小座標間隔 dx^α 離れた点は，時間的に離れているか，空間的に離れているか，ヌル離れている．(7.8) 式によって定義されるこれらの 2 乗距離は

$$ds^2 < 0 \quad \text{時間的間隔} \tag{7.18a}$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{ヌル間隔} \tag{7.18b}$$

$$ds^2 > 0 \quad \text{空間的間隔} \tag{7.18c}$$

時間的，ヌル，空間的

を満たす．光線は時空のヌル曲線 $ds^2 = 0$ 上を運動する．4.3 節で述べたように，P から広がるかまたは P に集まるヌル方向の族は厳密に P での局所未来光円錐と局所過去光円錐になる．

粒子は時間的世界線上を運動する．その世界線は特殊相対論（5.2 節）でそうであったように，距離 τ の 4 つの関数 $x^\alpha(\tau)$ によってパラメータ的に線上の点を追跡することができる．曲がった時空では，時間的世界線に沿って測った点 A と B の間の距離は (4.13) 式を曲がった時空に一般化することによって得られる：

$$\tau_{AB} = \int_A^B [-g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} \tag{7.19}$$

ここで積分は世界線に沿って行われる．時空距離 τ はこの曲線に沿って運ばれる時計によって測定され，**固有時**とも呼ばれる．$ds^2 < 0$ または $d\tau^2 \equiv -ds^2 > 0$ [(4.12) 式を参照] にある時間的世界線は，図 4.10 で説明したように，軌跡に沿った各点で局所光円錐の**中**にある．これが，粒子がその点における光速よりも遅いということの座標不変の表現である．

例 7.3. 2 次元の世界線と光円錐　2 次元計量

$$ds^2 = -X^2 dT^2 + dX^2 \tag{7.20}$$

と世界線

$$X(T) = A\cosh(T) \tag{7.21}$$

を考えよう．ここで A は長さの次元をもつ定数である．光円錐は $ds^2 = 0$ の曲線であり，傾きは $dT/dX = \pm 1/X$ である．(7.21) 式の世界線に沿ったもののうちいくつかを図 7.1 に示した．粒子の世界線の大きさ $|dT/dX|$ が $1/X$ よりも大きか，または $|dX/dT|$ が X よりも**小さ**

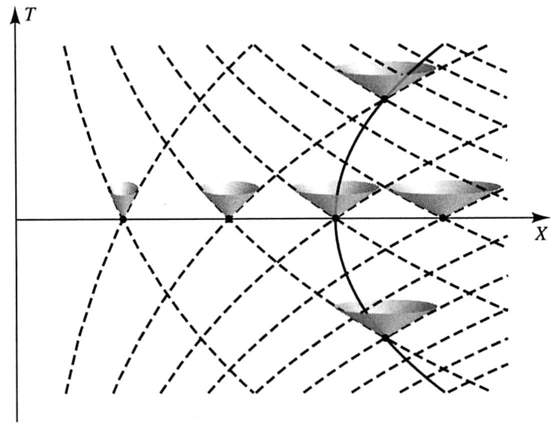


図 7.1　$A = 1$ のときの計量 (7.20) の 2 次元の時空図．$X = 0.5, 1, 1.5, 2, \ldots$ で $T = 0$ の軸と交わる内向きと外向きの光線と時間的世界線 (7.21) を示している．いくつか未来光円錐も示した．各点における時間的世界線の接線は光円錐の内側にある．

ければ粒子の世界線は時間的である．そのとき粒子は**局所的に**光速よりも遅い．世界線 (7.21) は $\sinh T < \cosh T$ なので，時間的である．世界線に沿った固有時は

$$d\tau^2 \equiv -ds^2 = A^2(\cosh^2 T dT^2 - \sinh^2 T dT^2) = A^2 dT^2 \tag{7.22}$$

である．$T = 0$ のとき $\tau = 0$ と選ぶと，$\tau = AT$ であり，(7.21) 式はパラメータを使って，

$$T = \tau/A \qquad X(\tau) = A\cosh(\tau/A) \tag{7.23}$$

と表される．（種明かし：計量 (7.20) は本当は平坦時空であり，座標系が違うだけである．$ds^2 = -dt^2 + dx^2$ の形にする座標変換を見つけられるかな？）

要するに，一般相対論の**局所**光円錐の構造は平坦時空と同じである．だが，光円錐の大域的な配置（時空の**因果構造**）は興味深い特徴を持っている．ブラックホール時空は第 12 章と第 15 章で考察することになるが，おそらく最も重要な例であるが，以下の非現実的な時空の例は的を得た説明になっている．

例 7.4. ワープ航法時空　Alcubierre（1994）による例では座標 (t, x, y, z) と，原点を通り t-x 面にある曲線 $x = x_s(t)$, $y = 0$, $z = 0$ を使う．計量を与える線素は

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_s(t)f(r_s)dt]^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.24}$$

である．ここで $V_s(t) \equiv dx_s(t)/dt$ は曲線に付随する速度であり，$r_s \equiv [(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ である．関数 $f(r_s)$ は滑らかな正の関数であり，$f(0) = 1$ を満たし，ある R に対して $r_s > R$ となると，原点から離れるにつれて 0 に近づく．(7.24) 式を $t =$ 一定面で評価すると，$dS^2 =$

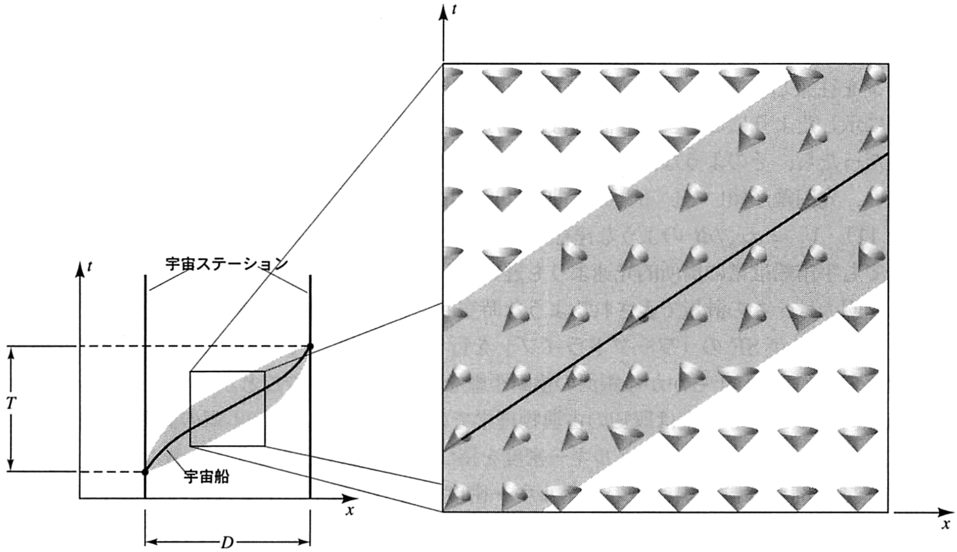


図 7.2 ワープ航法時空の光円錐．もしこれらの図が平坦空間中の時空図だとすると，左図中の世界線に沿って 2 つの宇宙ステーション間を進む宇宙船は（右の拡大図が示すように）光よりも速く運動していることになるだろう．しかしワープ航法計量 (7.24) からわかるように，宇宙船を取り囲む時空曲率の気泡が存在し，その位置が影で示されている．未来光円錐の内側は (7.26) 式で示されており，拡大図にあるように「傾いて」いる．すべての点で宇宙船の世界線は光円錐の中にある．したがって宇宙船は局所的には常に光速よりも**遅く**運動している．しかし，曲率の気泡について何も知らない平坦時空の観測者から見ると，宇宙船は宇宙ステーション間の距離を平坦空間距離 D よりも短い時間 T で横切るだろう（この特別な光円錐構造では $r_s < R$ に対して $f(r_s) = 1 - (r_s/R)^4$ となり，その外側では 0 になることを仮定している）．

$dx^2 + dy^2 + dz^2$ となる．各空間スライスの幾何学は平坦で，r_s は曲線 $x_s(t)$ からの単なる通常のユークリッド距離である．時空図は，$f(r_s)$ がゼロになるところで平坦なのだが，$f(r_s)$ が 0 でなければ曲がっている．図 7.2 は t-x 面の時空図である．影の領域は時空が曲がっている場所である．

t-x 面の点における光円錐はその点から出てくる $ds^2 = 0$ の曲線の集まりである．つまり

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_s(t)f(r_s)dt]^2 = 0 \tag{7.25}$$

の曲線，または同じだが

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 + V_s(t)f(r_s) \tag{7.26}$$

である．±の符号は t-x 面の点から放射される光線の 2 つの方向に対応する．図 7.2 は光円錐を示している．時空が平坦な場所では，光円錐は通常 45° の線である．時空が曲がっている領域では光円錐は傾いている．

光円錐の配列の興味深いところを知るために，2 つの宇宙ステーションを考えよう．これらは図 7.2 で世界線として表されている．曲線 $x_s(t)$ に沿って進む宇宙船が時間 $T < D$ 内に 2 つのステーションを往来しているところを想像しよう．宇宙船は光よりも速く進んでいるように見える．実際，例に示したようにこのような曲線はどこかで必ず $V_s(t) > 1$ となっている．観測者の間で時空が平坦だったら，そのような点で宇宙船は光速よりも速く進んでいるだろう．しかし，時空は平坦ではない．光円錐が傾いているため，曲線は自身に沿ったすべての点の局所的光円錐の内側にある（問題 11）．$V_s = dx_s/dt$ のような座標速度または D/T のような座標比がときどき 1 よりも大きくなっても宇宙船は常に局所的光速よりも**遅い**．

進んだ文明人は，この計量で表されるような時空曲率の領域を**創り出す**宇宙船を造ることができるだろうか．これが SF の「ワープドライブ」を行う方法の 1 つであり，これによって，時空がほぼ平坦ならば約 10 万年もかかる銀河の横断距離を短い時間で進むことができる．Alcubierre のワープ航法時空のような時空は既知の古典物理学では排除される．第 22 章の問題 14 で見るように，そうするためには**負の**局所エネルギー密度を持つ物質や場が必要となる．我々が知っている古典場のすべて，例えば電磁場は**正の**エネルギー密度をもつ．量子力学では負のエネルギー密度があっても構わないが，本当にそうなるのか物理学の理解を超えている．

7.6　対角計量のときの長さと面積，体積，4 次元体積

計量に対して，曲線の長さと面積，3 次元体積，4 次元体積の計算の仕方を知っていると便利である．すでに曲線の長さを ds の積分として計算する方法を知っている．ここから，特別な場合である対角計量

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \tag{7.27}$$

だけを考えることにする．我々の例のほんとどがこの形をしているからである．対角計量では，座標系はすべて直交しており，面積と体積のアイディアを簡単に組み立てることができる．例えば，図 7.3 に示した，$x^0 =$ 一定，$x^3 =$ 一定で定義される x^1-x^2 面内の面積素を考えよう．この面積は**座標**長さ dx^1 と dx^2 で定義されるとしよう．

2 つの線分の固有長さはそれぞれ $d\ell^1 = \sqrt{g_{11}}dx^1$ と $d\ell^2 = \sqrt{g_{22}}dx^2$ である．座標は直交しているので，面積素は

$$dA = d\ell^1 d\ell^2 = \sqrt{g_{11}g_{22}}\, dx^1 dx^2 \tag{7.28}$$

となる．3 次元体積では[2]

$$d\mathcal{V} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\, dx^1 dx^2 dx^3 \tag{7.29}$$

であり，4 次元体積も同様な式で表すことができる：

$$dv = \sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{7.30}$$

[2] 速さ V と区別するために 3 次元体積に $\mathcal{V}$ を使う．

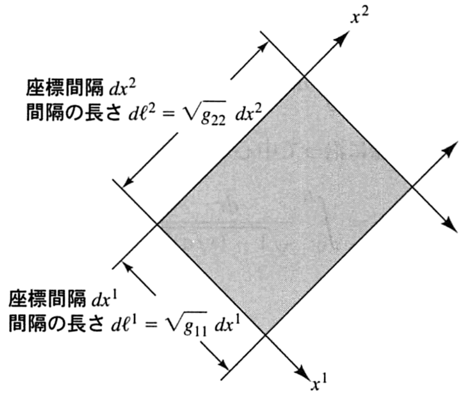


図 7.3　面積素は座標間隔 dx^1 と dx^2 によって定義される．これらの間隔の長さ $d\ell^1$, $d\ell^2$ と座標間隔 dx^1, dx^2 の関係は計量によって決まる．座標直線が直交していれば，面積は $d\ell^1 d\ell^2$ である．

上の式には負の符号があるが，平坦時空に適用すると実数になる．$g_{\alpha\beta}$ を行列と考えて，g をその行列式と定義すると，4 次元体積の体積素は $dv = \sqrt{-g}\, d^4x$ である．実はこれは計量が対角的でなくても一般的な式になっている．以下の例にこれらの使い方を示す．

例 7.5. 球の面積と体積素　簡単な例として，極座標で平坦時空を考えよう．

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.31}$$

(7.28) 式と (7.29) 式を使うと，球面上の面積素のよく知られた式

$$dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \tag{7.32}$$

を得ることができ，3 次元体積では

$$d\mathcal{V} = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{7.33}$$

である．

例 7.6. 一定密度で球形の星または一様で閉じた宇宙の曲がった空間の距離と面積，体積　これらの状況における空間計量は

$$dS^2 = \frac{dr^2}{1-(r/a)^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{7.34}$$

である．ここで a は物質の密度と関係する定数である（これが架空の 4 次元平坦空間の 3 次元球面上の幾何学を表す 1 つの方法であることを 18.6 節で見るだろう）．$r = 0$ を中心とした座標半径 R の球の赤道周りの円周と面積，体積，中心から表面までの距離を計算しよう．

球の赤道は曲線 $r = R,\ \theta = \pi/2$ である．その円周は

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} r d\phi = 2\pi R \tag{7.35}$$

である．$\theta =$ 一定，$\phi =$ 一定の直線に沿って中心から球面まで測った距離は

$$S = \int dS = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1-(r/a)^2}} = a \sin^{-1}\left(\frac{R}{a}\right) \tag{7.36}$$

である．2 次元面 $r = R$ の面積は

$$A = \int dA = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin\theta = 4\pi R^2 \tag{7.37}$$

である．$r = R$ の内側の体積は

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \int d\mathcal{V} &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-(r/a)^2}} \\ &= 4\pi a^3 \left\{ \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{R}{2a}\left[1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2\right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \tag{7.38}$$

である．もちろん，空間が曲がっているので，これらの式は平坦空間の球のものとは違う．しかし，$R/a \ll 1$ でよく知られた結果になることを確かめるのは困難ではない．$R \sim 10\text{km}$, $a \sim 15\text{km}$, $R/a \sim 0.7$ の中性子星では平坦空間からのずれは大きくなる．

7.7　埋め込み図とワームホール

第 2 章では 3 次元平坦空間に埋め込まれた曲がった 2 次元面の絵を使って，球（図 2.6）のような曲がった 2 次元幾何学とピーナッツのような形の幾何学（図 2.7）を説明した．これらの図は**埋め込み図**の一般的アイディアの例である．2 次元の幾何学がすべて 3 次元平坦空間内の曲がった曲面として表されるわけではないのだが，それができる多くの場合，埋め込み図は幾何学の性質を視覚化する便利な方法である[3]．

平坦空間中の曲面として 4 次元幾何学を表すためには少なくとも 5 次元が必要である．すぐ描けるわけではないので，非常に便利というわけではない．しかし 3 次元平坦空間中における 4 次元幾何学の **2 次元スライス**を埋め込むことが可能なときがあり，その性質が便利なことを知ることができる．これがどのようにうまくいくのかを例 7.7 で一般的に説明する以上に明確に示している．

---

[3] 平坦 3 次元空間の曲面すべては，曲がった 2 次元幾何学になっているわけではない．たとえば円筒の表面は平坦時空である．

例 7.7. ワーム時空のスライスの埋め込み 計量

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.39}$$

を考えよう．b は長さの次元を持っている．この計量は知られている限り，物理的に実在する時空を表していないが，この計量を使うと埋め込み図の導入が容易にできる．計量 (7.39) は平坦時空の極座標の計量と似ており [(7.4) 式を参照]，それと同じ性質をいくつかもっている．時間 t に独立であり，r, t 一定面が球の幾何学を持っているので球対称である．計量が (7.4) 式に近いため，r が大きくなると，時空はほぼ平坦になる．しかし，$b = 0$ の場合を除いて幾何学は平坦ではなく，これから見るように，興味深い形で曲がっている．

$t =$ 一定で，(7.39) 式の幾何学のスライスは，計量が

$$dS^2 = dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.40}$$

の 3 次元空間幾何学である．$t =$ 一定スライスは計量が時間に依存しないため，すべて同じ幾何学になっている．空間計量が球対称なので，一定角度の 2 次元スライスを見ることで絵を描くことができる．たとえば，$\theta = \pi/2$ の「赤道」スライスの幾何学は

$$d\Sigma^2 = dr^2 + (b^2 + r^2)d\phi^2 \tag{7.41}$$

で表される．球対称ということは，どんな角度一定スライスも同じ幾何学をもつということを意味する．この幾何学は 3 次元平坦空間に埋め込まれた 2 次元面として視覚化できる．その面を探そう．

2 次元 r-ϕ スライスの計量 (7.41) には時空 (7.39) の球対称性からくる回転対称性がある．ϕ を $\phi +$ 定数としても (7.41) 式は変わらない．このことから，このスライスを**軸対称**面として埋め込めることがわかる．この可能性を調べるために，z を基準とした円筒座標 (ρ, ψ, z) を使って平坦空間内に点をおくと都合がよい．座標 ρ は軸からの距離であり，ψ は軸の回りの角度であり，z は軸に沿った方向である．これらの座標で平坦空間の計量は

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2 \tag{7.42}$$

である．

平坦空間における曲面は $z = 0$ 面上の各点から測った高さ $z(r, \phi)$ を決めれば表せる．(7.41) 式と同じ幾何学をもつ曲面を決める関数 $z(r, \phi)$ を探そう．しかし，そうするためには座標 (ρ, ψ) と，(7.41) 式で使った座標 (r, ϕ) の間の関係も決めなければならない．つまり，曲面 (7.41) の埋め込みを決めるためには 3 つの関数

$$z = z(r, \phi), \qquad \rho = \rho(r, \phi), \qquad \psi = \psi(r, \phi) \tag{7.43}$$

を与えなければならない．

$\psi = \phi$ とおくことができ，z と ρ の関数が角度と独立である軸対称面の場合には (7.43) 式の関数を見つけることはかなり容易になる：

$$z = z(r), \qquad \rho = \rho(r), \qquad \psi = \phi \qquad (\text{軸対称}) \tag{7.44}$$

(7.44) 式を (7.42) 式に代入し，微分を実行すると埋め込まれた曲面上の線素

$$d\Sigma^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2\right] dr^2 + \rho^2 d\phi^2 \tag{7.45}$$

が得られる．これとスライス上の計量 (7.41) は

$$\rho^2 = r^2 + b^2 \tag{7.46a}$$

および

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 = 1 \tag{7.46b}$$

が成り立てば一致する．ρ に対して (7.46a) 式を使うと (7.46b) 式は $z(r)$ の微分方程式になり，積分すると $z(r) = b\sinh^{-1}(r/b)$ が得られる．積分定数は r が 0 になると z も 0 になるように選んだ．r を消去して ρ で表すと ρ-z 面における曲線の式になる：

$$\rho(z) = b\cosh(z/b) \tag{7.47}$$

図 7.4 は z-ρ 面内の曲線 (7.47) のグラフである．軸対称面はこの曲線を z 軸の周りに回転することでできる（図 7.5 を見よ）．平坦空間との類似で $0 < r < \infty$ と仮定したくなるが，実はこの範囲では $z > 0$ の半分の面しか覆えていない．$r = 0$ は点ではなく，$\rho = b$ または $z = 0$ の円である．$z < 0$ の下半分の面は r を $-\infty$ から 0 に変えることで覆うことができる．3 次元平坦空間のこの面は時間一定のワームホール幾何学の赤道スライスと同じ幾何学をしている．

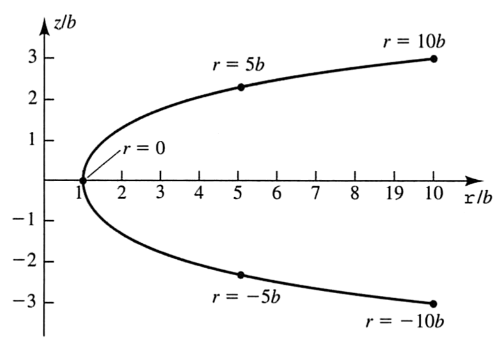


図 7.4 曲線 $\rho = b\cosh(z/b)$．z 軸周りに回転したとき図 7.5 で表される 2 次元曲面ができる．図 7.5 は (7.41) 式と同じ幾何学であり，ワームホール幾何学 (7.39) における (r, ϕ) スライスの 3 次元平坦空間への埋め込みである．

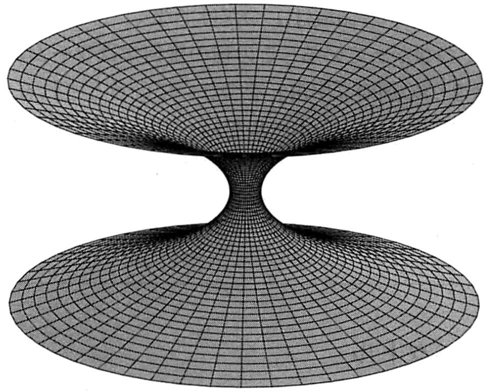
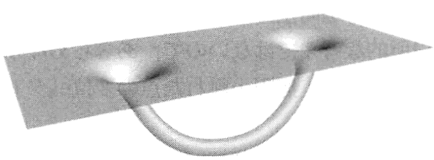


図 7.5 3 次元平坦空間中の 2 次元面として表したワームホール幾何学 (7.39) の (r, ϕ) スライスを埋め込んだところ．この曲面では 2 つの漸近的平坦領域が円周 $2\pi b$ の「喉」でつながっている．したがって「ワームホール」幾何学と呼ばれている．

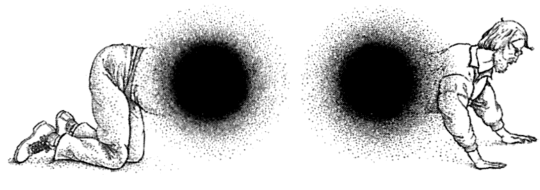
ボックス 7.2 時空のワームホール

ワームホールは図 7.5 に示した (7.39) 式の簡単な幾何学で表され，2 つの異なった漸近的平坦領域をつないでいる．これは SF では 2 つの「宇宙」と呼ばれている．ワームホールが我々の時空の漸近的平坦領域中の二ヶ所をつないでいる場合にはかなり興味深いだろう．以下で定性的に



説明する．漸近的平坦領域のある瞬間で，時空の 2 次元スライスの埋め込み図を示した．ワームホールの「口」は空間中の球形領域に見えるかもしれない．著明な相対論研究者のソーン（Kip Thorne）が彼の書から引用した図でそうしているように (Thorne 1994)，片方の口に潜り込むと別の場所にある口から出られるだろう．ワームホールの喉を通って測った距離は外の領域の口の間の距離よりもずっと短いかもしれず，2 ヵ所の間を速く旅行できるようになるかもしれない．実際，ワームホールをつくって，時空の事象をつなぎ，近似的な慣性系の時刻の方がワームホールに入っていったときよりも早い時刻になるようにすることを想像することができる．もし時間が十分早ければ，外側の領域を歩いて戻って，ワームホールを通過する前の自分自身に会えるかもしれない．時間を遡る機械を想像する 1 つの方法である（時間を進む方法については 178 ページのボックス 9.1 を見よ）．

タイムマシーン時空のようなものから生じる因果律に関するパラドックスを分析する必要はない．ありのままの真実では，既知の物質のエネルギー密度はすべて正であるが，ワームホールを作るためには，古典的アインシュタイン方程式に負のエネルギー密度の物質が必要となる．時空幾何学の量子揺らぎから発生するもの以外，ワームホールが未来の領域を開くというのはたぶん全く架空の話であろう．



ρ が大きくなると（r が大きくなるのと同じ），(7.41) 式から曲面の幾何学が平坦になることがわかっている．しかし，漸近的に平坦な領域は 1 つだけでなく，2 つあるのだ．それらは円周が最小値 $2\pi b$ をもつ曲がった喉でつながっている．この種の幾何学は**ワームホール**と呼ばれている．SF の世界ではワームホールは 2 つの別の「宇宙」をつないでいるとされる．たとえば，2 つのロケットが別々の漸近的平坦空間にあり，ワームホールを回っているところを想像することができる．次章ではこれらの宇宙旅行をより定量的に調べる．別の種類のワームホールがボックス 7.2 にある．

(7.41) 式の曲面は滑らかな変形により平坦面から作ることはできない．計量が違っているだけでなく**トポロジー**も違っているのだ．

7.8 曲がった時空中のベクトル

5.1 節でベクトルを方向のある線分として導入したが，このベクトルの定義は曲がった時空では修正されなければならない[4]．じゃがいもの表面で向きのついた線分を定義することを考えてみよ．曲がった時空でベクトルを考える上で鍵となるのは，ベクトル量すべてが**局所的な**量であることを認識することだ．運動量や速度，電流密度などすべてそうである．これらは時空の小さい領域の中にいる観測者によって測定される．したがって曲がった時空でベクトルを定義する方法は大きさと方向の概念を引き離し，物理学者が局所的に実験室で行っているような厳密さをもって，小さいベクトルによって**局所的に**方向を定義することである．大きなベクトルは，平坦時空の規則にしたがって，代数的にこの小さいベクトルに数値をかけたり，たしたり，引いたりすることで作ることができる．数学者はこの過程を接空間におけるベクトルの定義と呼ぶ（ここでは簡単にしか述べない[5]）．図 7.6 はこのアイディアを図式的に示している．

ベクトルは点で定義され，そこで通常の平坦時空におけるベクトル代数の規則にしたがう．ベクトルを時空の各点に滑らかに割り当て $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ とすると，時空には**ベクトル場**ができる．しかし，**別の**点で定義されたベクトルは**別の**接空間にあり，平坦時空でできていたような，別の点のベクトルとの和はできない．位置ベクトルの概念は局所的な考えではないので，あきらめなければならない．同様に変位ベクトルもあきらめなければならないが，無限小離れた点の変位ベクトルは局所的な量であり例外である．

これからベクトル代数の手続きを復習して，曲がった時空に適用し，さらに少し付け加えよう．すべての点 x^α において，4 元ベクトルの基底 $\mathbf{e}_\alpha(x)$ を与えことができる．その他のベクトルは基底ベクトルの線形結合で表すことができる：

$$\mathbf{a}(x) = a^\alpha(x)\mathbf{e}_\alpha(x) \tag{7.48}$$

数値 a^α は基底 $\mathbf{e}_\alpha$ によるベクトル $\mathbf{a}$ の**成分**と呼ばれる．

スカラー積の考えは平坦空間と同じように導入することができる．同じ点の 2 つのベクトル $\mathbf{a}$

---

[4] ここで意味することは 4 元**ベクトル**の概念は修正されなければならないということだが，我々は一般的に時空中の 4 元ベクトルと 3 次元空間中の 3 次元ベクトルの両方に**ベクトル**という言葉を使い，文脈に頼って区別することを第 5 章で警告したことを思い出そう．

[5] 数学的に厳密な定義をすぐに知りたければ第 20 章を読め．

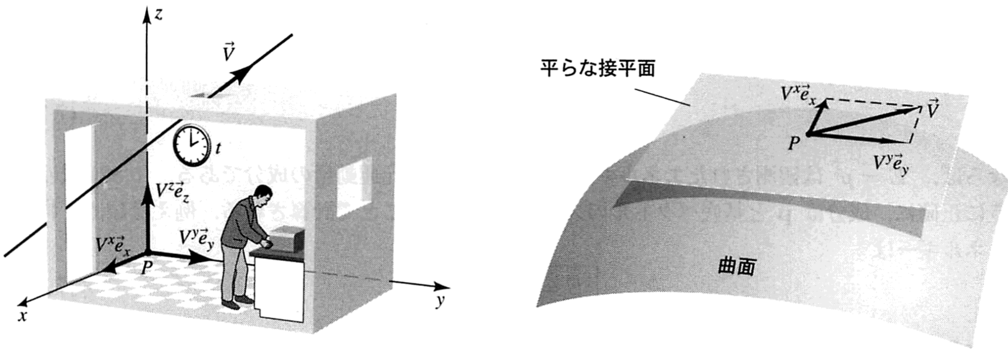


図 7.6 物理学では，大きさと方向を持つ量は一般的に局所的に定義され，時空の一点に置かれた小さな実験室の中で観測者によって測定される．ベクトル $\vec{V}$ の例をこの図に示した．左図の点 P で理想化された実験室の観測者にベクトルは測定されるのだが，それは右図の接平面中の方向を持った線分に対応する．この接空間では，$\vec{V} = V^x\vec{e}_x + V^y\vec{e}_y$ と示されているように，平坦空間の場合と同じように，ベクトルの加減ができ，スカラー量をかけることができる．

と $\mathbf{b}$ のスカラー積は，基底ベクトルのスカラー積がわかれば成分を使って計算できる：

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a^\alpha\mathbf{e}_\alpha)\cdot(b^\beta\mathbf{e}_\beta)\\ &= (\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta)a^\alpha b^\beta\end{aligned} \tag{7.49}$$

スカラー積には好きなものを選んで行えばよいが，基底は 2 つのタイプが特に重要である．

正規直交基底

正規直交基底は単位長さの互いに直交する 4 つのベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$, $\hat{\alpha} = 0, 1, 2, 3$ からなる．5.6 節でみたように，添字の上のハットは正規直交基底とその成分を他の基底と区別するのに使う．時空で直交する単位ベクトルのうち 3 つは空間的でよいが，1 つは時間的でなければならない．したがって正規直交基底であるための要請は習慣的に

$$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}(x)\cdot\mathbf{e}_{\hat{\beta}}(x) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \tag{7.50}$$

正規直交基底

でまとめられる．ここで $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ である．正規直交基底の成分で表すと，ベクトルの間のスカラー積は (7.49) 式から

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}a^{\hat{\alpha}}b^{\hat{\beta}}} \tag{7.51}$$

正規直交基底でのスカラー積

である．図 7.7 に平面で極座標に沿った正規直交基底を示した．

5.6 節で述べたように，観測者の研究室で正規直交基底を定義できると考えてよい．時間的ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ は観測者の 4 元速度 $\mathbf{u}_{\mathrm{obs}}$ であり，$\mathbf{e}_{\hat{\imath}}$ は観測者の実験室の軸で定義される 3 つの単位ベク

トルである．**このタイプの基底は観測者の基底成分が測定可能な物理量を定義できることから重要である．**よって，$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$ が特別な観測者に適した基底であり，$\mathbf{p}$ が観測された粒子の運動量であり，

$$\mathbf{p} = p^{\hat{\alpha}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \tag{7.52}$$

ならば，$E = p^{\hat{t}}$ は観測されたエネルギーであり，$p^{\hat{i}}$ は 3 元運動量の成分である．(5.82) 式のように正確に，成分は $\mathbf{p}$ と基底ベクトルのスカラー積をとることで計算される．例えば観測されたエネルギーは

観測者によって測られるエネルギー

$$\boxed{E = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\mathrm{obs}}} \tag{7.53}$$

となる [(5.83) 式を参照]．

座標基底

4 元速度 $\mathbf{u}$ はベクトルのわかりやすい例である．世界線 $x^\alpha(\tau)$ があると，4 元速度の成分は

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{7.54}$$

であると考えられるかもしれない [(5.25) 式を参照]．だが，成分の基底は何か．(7.8) 式と $d\tau^2 = -ds^2$ から

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 \tag{7.55}$$

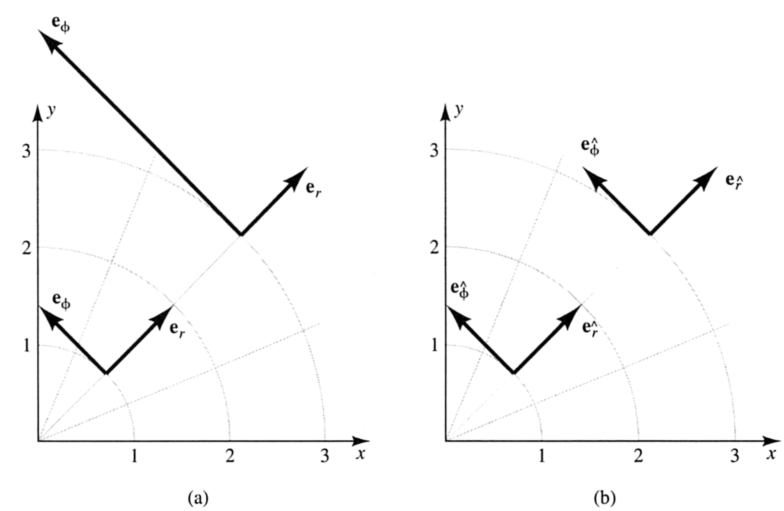


図 7.7　平面の極座標の座標基底と正規直交基底ベクトル．左図では座標基底ベクトルは座標線に沿った方向を向いており，長さは $|\mathbf{e}_r| = 1$, $|\mathbf{e}_\phi| = r$ である．右図では直交基底も同じ座標線を向いているが，長さは 1 である．

であることに気を付けると，左辺で $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ を定義しているが，(7.50) 式が成り立つ正規直交基底の形をしていない．むしろ，(7.54) 式は別の基底における 4 元速度の成分であり，そこでは

$$\mathbf{e}_\alpha(x) \cdot \mathbf{e}_\beta(x) = g_{\alpha\beta}(x) \tag{7.56}$$

座標基底

が成り立っている．これらは**座標基底**の定義式であり，一般的に

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta} \tag{7.57}$$

座標基底中のスカラー積

である．

例 7.8. 平面内の極座標　2 次元平面内で極座標を考える．座標基底は 2 つのベクトル $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ からなり，図 7.7 に示したように座標線に沿う方向を向いている．計量は

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{7.58}$$

である．(7.56) 式から計量の非対角成分が 0 であるため，これらのベクトルは直交している．ベクトルの長さは対角成分の平方根から計算される．$\mathbf{e}_r$ は $|\mathbf{e}_r| = \sqrt{g_{rr}} = 1$ から，単位ベクトルなのだが，$\mathbf{e}_\phi$ の長さは $\sqrt{g_{\phi\phi}} = r$ である．

座標基底ベクトルはこの例で示したように一般的に単位ベクトルではなく，一般的に互いに直交しているわけでもない．しかし，次章でみるように，座標基底は計算するのに便利であり，よく使うことになるだろう．

実際に特殊相対論ではずっと座標基底を使ってきた．(5.12) 式は (7.56) 式と同じである．平坦空間ではたまたま慣性系の計量 $g_{\alpha\beta}$ が $\eta_{\alpha\beta}$ であり，慣性系の座標基底も正規直交基底であっただけである．同じことが局所慣性系の座標基底 [(7.12) 式参照] でも成り立つ．しかし，一般的に曲がった空間では成り立たず，2 つの概念を区別しておくことが重要である．正規直交基底の添字の上にはハットをつけ座標基底の添字には付けないことで，わかりやすくする．座標基底も直交しているときは，どちらの記法が使われているということに意味がなくなる．

座標基底と正規直交基底を使う

曲がった時空を動くテスト粒子と光線を調べることによって曲がった時空を理論的にも実験的にも探査できる．次章でみるように，テスト粒子の運動は 4 元速度のようなベクトルの**座標基底成分**の運動方程式から直接計算できる．しかし一般的に座標基底成分は観測の予言値として解釈することはできない[6]．観測者は**正規直交**基底のベクトルの成分を測定する．したがって，両方の成分を扱えるようにする必要がある．座標基底で**計算し**正規直交基底で結果を**解釈する**ことは，極端ではないにせよ，簡単にまとめすぎだろう．ボックス 7.3 は風変わりな説明となっている．

別の基底をどのように行き来したらよいか知るために，1 つの座標基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ と正規直交基底 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ を考えよう（記号 { } は**集合** を表す）．これらは表し方は似ているのだが，長さと方向が違

[6] 実際，126 ページで考察したように，座標系が特異なところでは，物理量は特異ではないのに座標成分は発散する．

ボックス 7.3　余剰次元

時空の次元が 4 より多いという考えは，基本的な力の統一理論の研究の中に長い歴史がある．しかし余分な次元はなぜ気づかれないのだろうか．1 つの答えは，ミクロな長さスケールで巻きがっている（「コンパクト化」）からだ．最も簡単な例は，第 5 の次元が非常に小さい半径を走っているような 5 次元時空である．このような時空を表す線素の例は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{AB}dx^A dx^B \\ &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + R^2 d\psi^2 \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

である．ここで $0 \le \psi < 2\pi$ であり，$AB, \ldots$ には 0 から 4 が入る．R は円の大きさを固定する定数であり，半径方向の座標ではないことに注意する．

第 5 の次元のようなものを見つけるのがどれだけ難しいことであるかを知るために，質量ゼロの場 $\Phi(x^A)$（電磁場の成分のようなもの）の平面波が時空 (a) 中を伝達しているところを考えよう．波の周波数が十分低ければ，余剰次元はほとんど伝達に影響を与えないだろう．$x^A = (t, \vec{x}, \psi)$ と $k^A = (\omega, \vec{k}, k^4)$ を成分とする 5 次元波数ベクトルを $\mathbf{k}$ としたとき，波の場が

$$\Phi_{\mathbf{k}}(x^A) \propto \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \equiv \cos(g_{AB}k^A x^B) \qquad \text{(b)}$$

の形をしていることを認めてもらう．k^A は $\mathbf{k}$ の**座標基底成分**となっている．(b) 式で $\mathbf{k}$ は (7.57) 式の形のスカラー積で入っているからである．ここで ω は波の周波数で，$\vec{k}$ は 3 次元の波数ベクトル，k^4 は第 5 次元の波数ベクトルの成分である [(5.69) 式を参照]．静止質量ゼロの場では（(5.70) 式を思い出せ）

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} \equiv g_{AB}k^A k^B = 0 \qquad \text{(c)}$$

である．

もし第 5 次元が円をなしているとすると，場 (b) は ψ が周期 2π をもつ周期的な関数になっていなければならない．そうなるのは k^4 の値がとびとびのときだけであり，$\psi = 2\pi$ のときの $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ の値が $\psi = 0$ と 2π の整数倍だけ違う．つまり

$$\begin{aligned} g_{44}k^4(2\pi) &= R^2 k^4(2\pi) \\ &= 2\pi n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(d)} \end{aligned}$$

となる．この周期性の結果 k^4 は

$$k^4 = n/R^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(e)}$$

に制限される．条件 (c) を解くと波の振動数が

$$\omega^2 = \vec{k}^2 + (n/R)^2 \qquad \text{(f)}$$

となる．$n = 0$ でこれは $\omega = |\vec{k}|$ になり，あたかも波が 4 次元時空を伝達しているかのように見える．この関係は大きな n についても使えるが，量子場のエネルギーに対して

$$E = \hbar\omega \ge \hbar R \qquad \text{(g)}$$

となる必要がある．もし R が 10 ページの量子重力の特徴的長さであるプランク長さ $\ell_{Pl} = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ のオーダーであるとすると $c \ne 1$ 単位系で

$$E \ge (\hbar c/\ell_{Pl}) \sim 10^{19}\text{GeV} \qquad \text{(h)}$$

となる．これは現在の加速器の達する最も大きなエネルギーを何桁も超えている．余剰次元がこのような小さなスケールで巻きあがっているとすると，我々がまだ気づかなくてもしかたないかもしれない．

(e) 式は第 5 次元の円が何波長分になっているかという条件であることがわかる．ところが，これは $\mathbf{k}$ の座標基底成分からではそんなに自明なことではない．k^4 は波長の逆数の次元になってすらいない．しかし正規直交基底の $\mathbf{k}$ の成分はそうなっている．第 5 次元を向いた単位長さの基底ベクトルは座標基底成分で

$$(e_{\hat{4}})^A = (0, 0, 0, 0, 1/R) \qquad \text{(i)}$$

となり [(7.61) 式参照]，対応する $\mathbf{k}$ の正規直交基底成分は，(7.60) 式から

$$k^{\hat{4}} = n/R \qquad \text{(j)}$$

となる．第 5 の次元を向いた波長を $2\pi/k^{\hat{4}}$ で定義すれば，(j) 式が円周 $2\pi R$ を波長の整数倍回っていることを表していることがわかる．

う別のベクトルの集合である．ベクトル $\mathbf{a}$ はどちらの基底でも展開することができ

$$\mathbf{a} = a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} = a^{\hat{\beta}}\mathbf{e}_{\hat{\beta}} \tag{7.59}$$

これによって座標基底成分 a^{α} と正規直交基底成分 $a^{\hat{\beta}}$ を定義する．これらの成分の関係を知るためには，正規直交基底ベクトルの座標成分 $(\mathbf{e}_{\hat{\beta}})^{\alpha}$ と座標基底ベクトルの正規直交成分 $(\mathbf{e}_{\alpha})^{\hat{\beta}}$ の両方を知る必要がある[7]．

$$a^{\alpha} = a^{\hat{\beta}}(\mathbf{e}_{\hat{\beta}})^{\alpha}, \qquad a^{\hat{\beta}} = a^{\alpha}(\mathbf{e}_{\alpha})^{\hat{\beta}} \tag{7.60}$$

ここで使われている記法では 2 種類の添字を区別するように意識している．1 つは成分を表し，もう 1 つはベクトルを表している．たとえば，$(\mathbf{e}_{\hat{2}})^{1}$ はベクトル $\mathbf{e}_{\hat{2}}$ の第 1 座標成分であるのだが，$(\mathbf{e}_{3})^{\hat{2}}$ は ベクトル $\mathbf{e}_{3}$ の第二正規直交成分になる．次の例をみればよくわかるだろう．

例 7.9. 直交座標方向に沿った正規直交基底　計量がある座標系で対角化され，(7.27) 式の形をしていたとしよう．4 つの座標方向を向いている 4 元ベクトルの集合はどんなものでも相互に直交していて，正規直交基底を定義する (7.50) 式の 6 つの関係はすぐに満たされる．これらを単位ベクトルにする作業が残っている．正規直交基底の 1 つの例は

$$(\mathbf{e}_{\hat{0}})^{\alpha} = [(-g_{00})^{-1/2}, 0, 0, 0], \tag{7.61a}$$

$$(\mathbf{e}_{\hat{1}})^{\alpha} = [0, (g_{11})^{-1/2}, 0, 0], \ldots \text{など} \tag{7.61b}$$

である．(7.57) 式を使うと (7.50) 式が満たされていることがすぐチェックできる．

例 7.10. 2 次元極座標の異なった基底　図 7.7 の 2 次元の極座標の例で正規直交基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ と $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ は対応する座標基底ベクトル $\mathbf{e}_{r}$ と $\mathbf{e}_{\phi}$ と同じ方向を向いているのだが，すべての場所で単位長さになっている．座標基底ベクトルの成分は定義により

$$(\mathbf{e}_{r})^{A} = (1, 0), \qquad (\mathbf{e}_{\phi})^{A} = (0, 1) \tag{7.62}$$

であり，同じように

$$(\mathbf{e}_{\hat{r}})^{\hat{A}} = (1, 0), \qquad (\mathbf{e}_{\hat{\phi}})^{\hat{A}} = (0, 1) \tag{7.63}$$

ここで添字 A と $\hat{A}$ には 1 と 2 が入る．だが，正規直交ベクトルの座標成分と座標ベクトルの正規直交成分はどうなのか．

$$(\mathbf{e}_{\hat{r}})^{A} = (1, 0), \qquad (\mathbf{e}_{\hat{\phi}})^{A} = (0, 1/r) \tag{7.64}$$

正規直交基底の定義式 (7.50) が成り立っていることは計量 (7.58) を使うと容易にチェックできる．同様に座標基底ベクトルの単位ベクトルの正規直交基底成分は

$$(\mathbf{e}_{r})^{\hat{A}} = (1, 0), \qquad (\mathbf{e}_{\phi})^{\hat{A}} = (0, r) \tag{7.65}$$

---

[7] もしあなたが講義をしていれば，この文章を早口で言う練習をせよ．

である．座標基底の定義式 (7.56) が満たされていることは (7.51) 式と (7.60) 式を使えば容易にチェックできる．

7.9　4 次元時空中の 3 次元曲面

3 次元空間中に 2 次元曲面があるように，4 次元時空中に 3 次元曲面がある．それらは **3 次元曲面**と呼ばれる．**超曲面**ということばもよく使われる．3 次元曲面は 1 つの座標を他の 3 つの座標の関数として与えることで表すことができる．たとえば

$$x^0 = h(x^1, x^2, x^3) \tag{7.66}$$

関数 h は (x^1, x^2, x^3) で指し示された曲面内の点の位置 x^0 を与える．対称性がもっとよくわかるように，3 次元曲面は関数 $f(x^\alpha)$ で表すことができる：

$$f(x^\alpha) = 0 \tag{7.67}$$

(7.66) 式で決められる曲面との関係であるが，左辺と右辺の差が関数 $f(x^\alpha)$ に対応する．

法ベクトルと接ベクトル

3 次元曲面の各点で，曲面**内**に方向が存在する．つまり，曲面に接する方向である．接ベクトル $\mathbf{t}$ は接方向を向き，線形独立な 3 つのベクトルとなる．法方向はその点ですべての接ベクトルと垂直なベクトル $\mathbf{n}$ の方向を向いている．$\mathbf{n}$ はすべての $\mathbf{t}$ に対して

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{7.68}$$

が成り立つ．ベクトル $\mathbf{n}$ は曲面に対して**垂直**である（図 7.8 を見よ）．

3 次元曲面には 3 次元幾何学がある．曲面の内的な幾何学を定義する線素は (7.66) 式のような関係を使って時空の幾何学を定義する線素から 1 つの座標を消去することで求められる．曲面幾何学の重要な分類を以下でいくつか考察する．

空間的曲面

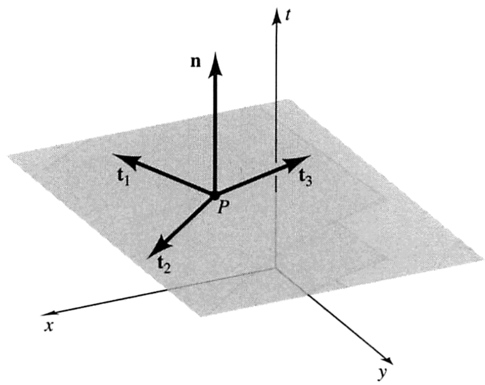
空間的曲面は簡単な例を示すと理解しやすい：

例 7.11．平坦時空中の一定時間 3 次元曲面　ローレンツ系の直交座標 (t, x, y, z) 中の平坦時空を考える．線素は今はもうよく知っている (4.8) 式である（$c = 1$ で）．t を一定にすると，図 7.8 で説明したように，平坦時空中で 3 次元曲面を決めることができる：

$$t = 一定 \tag{7.69}$$

曲面中の点の位置は (x, y, z) で決められ，(7.69) 式を (4.8) 式に代入して得られる計量は

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.70}$$



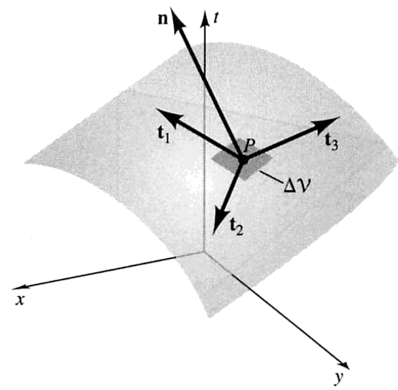


図 7.8 空間的曲面．左は平坦時空における $t = t_*$ 空間的曲面である．右図はある関数 h に対して $t = h(x, y, z)$ によって決められる一般的な例である．$\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ のような空間的接ベクトルは曲面内にあり，時間的法線ベクトルは $\mathbf{n}$ はすべての接方向と垂直である．時空における 3 次元体積素 $\Delta\mathcal{V}$ の向きはその 4 元法ベクトルによって決まる．

であり，平坦 3 次元空間の幾何学を定義する．時間成分が 0 であれば，どんなベクトルでもこの曲面に接する接ベクトル

$$t^\alpha = (0, \vec{t}), \tag{7.71}$$

になる．(7.68) 式を満たす法ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$n^\alpha = (1, 0, 0, 0) \tag{7.72}$$

である．$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$ のため，単位法ベクトルである．

例 7.11 は **時空曲面**の簡単な場合であり，接ベクトルはそれぞれ空間的である．上の例に示したように，空間的曲面には時間的法線

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} < 0 \qquad \text{（空間的曲面）} \tag{7.73}$$

がある．ちょうど 3 次元空間における面積素 ΔA の向きがその法ベクトル $\vec{n}$ によって決まるのと同じように，**時空中の体積** $\Delta\mathcal{V}$ の方向も時空の法線 $\mathbf{n}$ によって決まる．これを図 7.8 に示した．

時空中の空間的曲面に「空間」の一般的概念を与えることができる．各点がたった 1 つの曲面内にあるような空間的曲面の族を見つけることによって，時空を空間と時間に分割することができる．平坦時空おける t 一定の空間的曲面の族の簡単な例を図 7.9 に示した．別の例として，別の慣性系の時間 $t' = \gamma(t - vx)$ が一定の値をもつ曲面の族がある．(t, x) 時空図中で，t 一定面は水平にあり，t' 一定面の傾きは v となる．このような空間的曲面の族のようなものがあるように，ちょうど時空を空間と時間に分割する方法はたくさんある．例 7.12 はあまり自明ではない例である．

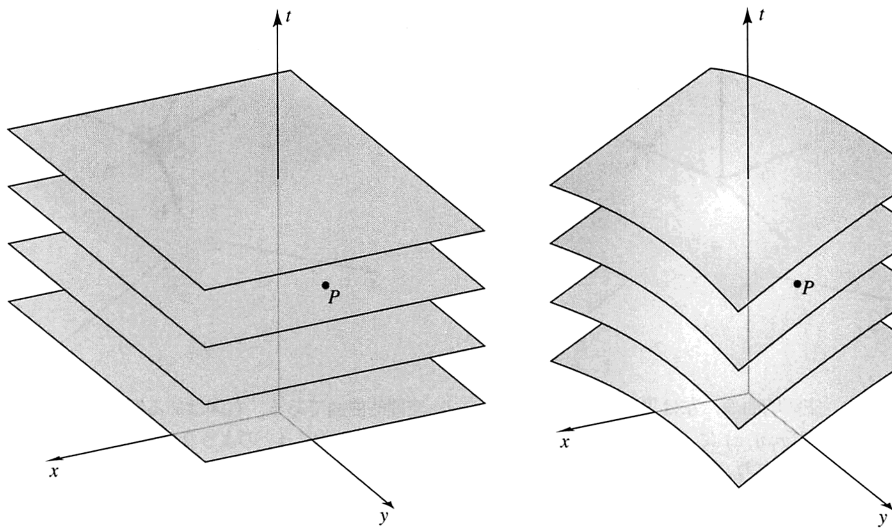


図 7.9　空間と時間．空間的曲面の族によって時空を空間と時間に分割する．左図は $t = t_*$ 一定面の族である．1 つの面内では同じ t_* の値を持っている．時空の各点 P はこのような面 1 枚の上にある．t_* の値はその面の時間とすることができ，面上の位置は空間内の位置を与える．しかし，右図のように空間的曲面にはいろいろなとり方があり，それぞれが時空を時間と空間に分割する方法に対応する．

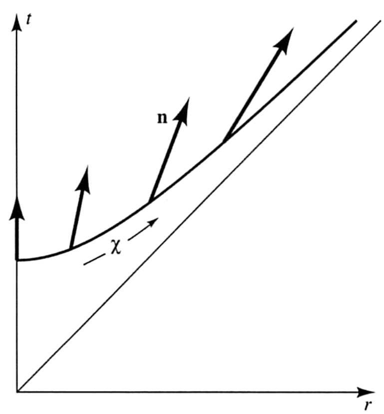


図 7.10　ローレンツ双曲面．この t-r 時空図は (7.74) 式で定義される面の断面を表している．曲線の点は (7.75) 式で定義される座標 χ で名前づけをすることができる．曲線の各点は曲面の他の 2 つの方向 θ, ϕ を含む 2 次元球に対応する．等しい長さの一連の時間的法ベクトルが χ で等しい間隔で示してある．これらは曲面に対して垂直でもないし，長さも面の幾何学中で等しくない．しかし，これらは時空幾何学中ではそうなっているのだ．χ が大きくなると，面は漸近的に光円錐 $t = r$ に近づき，法ベクトルは漸近的に面内に含まれる．

例 7.12. ローレンツ双曲面 4 次元平坦時空中の空間的 3 次元曲面の興味深い例として，(7.4) 式のようなふつうの極座標 (t, r, θ, ϕ) の線素から始め，定数 a で

$$-t^2 + r^2 = -a^2 \tag{7.74}$$

によって定義される曲面を考えよう．断面は図 7.10 の t-r 時空図中で説明された双曲線となる．これは**ローレンツ双曲面**と呼ばれる．この曲面上の点は θ と ϕ, それに

$$t = a\cosh\chi, \qquad r = a\sinh\chi \tag{7.75}$$

で t と r を結びつける半径座標 χ を使うときれいに表される．$0 < \chi < \infty$ の範囲のどんな点でも，(7.74) 式を満たす．この曲面の幾何学を記述する線素は，(7.75) 式を (7.4) 式に代入することで求められる線素の空間部分になっている．明らかに

$$dS^2 = a^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{7.76}$$

であり，実際に空間的であることがわかる．

小さな変化 $\Delta\chi$ による曲面の変位は接ベクトルに沿っている [(7.75) 式参照][8].

$$t^\alpha = (a\ \sinh\chi, a\ \cosh\chi, 0, 0) \tag{7.77}$$

曲面内でこの方向と θ, ϕ 方向に垂直な単位法ベクトルは

$$n^\alpha = (\cosh\chi, \sinh\chi, 0, 0) \tag{7.78}$$

である．空間的曲面に対し単位垂直ベクトルに要請される条件 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = -1$ が満たされていることを確かめておく．

この例は思われるほど抽象的ではない．幾何学 (7.76) は宇宙論モデルの重要な分類の中で空間の幾何学の 1 つの可能性であり，第 18 章で見ることになるだろう．a の値を変えることで得られる空間的双曲面の族を使うと，原点から未来を向く光円錐の内側を空間と時間に分ける方法になる (問題 26).

ヌル曲面

光線で作られる曲面は，**ヌル曲面**と呼ばれる 3 次元曲面の重要な分類に入る．ヌル面の各点で，光線の方向を向いた接ベクトル ℓ がありそれはヌル

$$\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\ell} = 0 \tag{7.79}$$

であり，2 つの空間的方向に垂直である．ヌル方向$\boldsymbol{\ell}$ は，空間的方向と垂直であり (7.79) 式のためにそれ自身とも垂直であるので，ヌル面に垂直である．ヌル曲面に垂直なベクトルはヌル曲面内にあるヌルベクトルである．

---

[8] 接ベクトル t^α を座標時間 t と混同してはいけない．

例 7.13. ヌル曲面としての光円錐 図 7.11 の平坦時空で原点から広がる未来光円錐はヌル曲面の例である．時間と空間極座標 (t, r, θ, ϕ) を使うと，曲面の方程式は

$$t = r \tag{7.80}$$

となる．面内の点は (r, θ, ϕ) で表され，時空中の位置は (7.80) 式で与えられる．

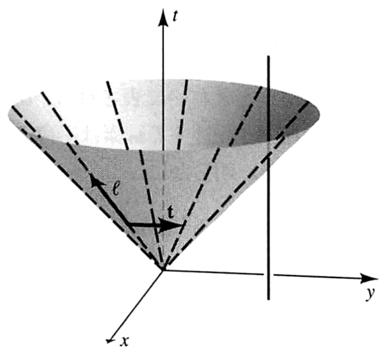


図 7.11 慣性系の原点から出た未来光円錐．このヌル曲面は 1 つの事象から半径方向に広がる光線（面内の直線）によって作られる．面に直交するベクトル $\boldsymbol{\ell}$ は面内で光線に沿って伸びている．接ベクトル $\mathbf{t}$ も示されている．このようなヌル曲面は「一方通行」の性質を持っている．時間的な世界線が一度でもこの面を横切ってしまうと，もう二度と横切ることはできない．

この 3 次元面は原点から外向きに速さ 1 で広がる光線の球面によって作られる．これらの光線に沿ったベクトル $\boldsymbol{\ell}$ の成分 $(\ell^t, \ell^r, \ell^\theta, \ell^\phi)$ は

$$\ell^\alpha = (1, 1, 0, 0) \tag{7.81}$$

であり，これは面に対して垂直なベクトルである．他の線形独立な空間的接ベクトルは $(0, 0, r^{-1}, 0)$ と $(0, 0, 0, (r\sin\theta)^{-1})$ であり，単位長さになるように選んである．

平坦空間の未来光円錐のように，たくさんのヌル曲面は以下の意味で一方通行である．図 7.11 に示したように，粒子の世界線はヌル曲面を通ることができるが，同じヌル曲面をもう一度通ることはできない．動かない物体を外向きの光の球面が通りすぎるところを考えよう．球が通り過ぎた瞬間，ヌル曲面を横切ることになる．しかし世界線の向きを変えることや曲面のどの部分にも追いつくことはできない．面は光速で運動しているからだ．第 12 章と 15 章でみるように，ブラックホールを定義する面は，一方通行のヌル曲面である．落ちることはできるが，決して戻って来ることはできないのだ．

問題

1. (a) (7.7) 式の特異な線素で，$r' = 0$ と他の値 r' との距離が無限大になることを示せ．
   (b) $\phi = 0$ の線に沿って $r' = 5$ と $r' = \infty$ の距離を求めよ．
2. 以下の線素は平坦時空に対応する：

$$ds^2 = -dt^2 + 2dx\,dt + dy^2 + dz^2$$

   (7.1) 式の形をしたふつうの平坦空間の線素への座標変換を求めよ．
3. [C,P]（**サニャック（Sagnac）効果**）　サニャック効果は 32 ページのボックス 3.1 の慣性系で解決できる．回転しているリングの周りを 2 つの光の波が互いに反対方向に進む．リングの周りの距離 S, 時刻 t で振動数 ω の波の位相は $\Psi \equiv -\omega(t - S) +$ 定数である（光の速さは 1 である）．位相差が 2π の整数倍で波は強め合うが，それはどの場所で起きるか．
   サニャック効果は干渉計とともに回っている系でも解決できる．その系で平坦時空の線素は新しい座標 $\phi = \phi' + \Omega t$ を定義することで求めることができる．この系における強め合う条件を求めよ．
4. [B] 座標 (t', r') で張られる平坦時空のペンローズ図において次の曲線について略図を描け．
   (a) r 一定の曲線，(b) t 一定の曲線．
5. 線素

$$ds^2 = -x dv^2 + 2dvdx$$

   の座標 (v, x) によって張られる 2 次元時空を考えよう．
   (a) 点 (v, x) の光円錐を計算せよ．
   (b) 光円錐が x とともにどのように変わるかを示す (v, x) 時空図を描け．
   (c) 粒子は x の正の値から負の値に行くことはできるが，負の値から正の値へ行くことができないことを示せ．
   （**コメント**：この時空モデルの時空光円錐は第 12 章で考えるブラックホール時空のものと多くの類似点がある．特に，$x = 0$ のような面がそうで，ここから外に出ることはできない．）
6. [B] ペンローズ図を構成するのに平坦時空の線素を使い，127 ページのボックス 7.1 の (a) 式と (c) 式で定義した．(t', r', θ, ϕ) の座標で表せ．
7. [S] **計量の変換則**　一般座標変換は 4 つの関数 $x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta})$ で表される．
   (a) 連鎖律は

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} dx'^{\gamma}$$

   によって表せることを示せ．
   (b) これを線素 (7.8) に代入し，変換された計量 $g'_{\gamma\delta}$ が

$$g'_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}}$$

   で表されることを示せ．

答えが和の記法にかなっているか確かめよ．

8. (a) どんな実対称行列も直交行列で対角化できるという数学的事実を使い，どんな計量でも点 P で

$$x'^{\alpha} = M^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$$

の形の線形変換で対角化できることを示せ．特に，定理の直交行列と $g_{\alpha\beta}(x_P)$ の間，M^{α}_{β} と 対角化行列の成分の間の関係を明らかにせよ．

(b) 軌道 $x_s(t)$ に沿った点でワープ航法計量 (7.25) を対角化する線形変換を求めよ．

9. [C] 7.4 節の議論から点 P で，計量が平坦空間の形 $\eta_{\alpha\beta}$ をとるような座標が存在することがわかった．しかし，計量の 1 階微分が P で 0 になるような座標は存在するのだろうか．2 階微分はどうか．以下の かず数えの議論によって我々がどこまで進めるかを明らかにできる．ただし結論まではいきつけない．

1 つの座標系から別の座標系に計量を変換する規則を問題 7 で調べた．それを x_P の周りにべきで（テイラー）展開することができる．

$$\begin{aligned} x^{\alpha}(x'^{\beta}) =& x^{\alpha}(x'^{\beta}_P) + \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}\right)_{x_P} (x'^{\beta} - x'^{\beta}_P) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}}\right)_{x_P} (x'^{\beta} - x'^{\beta}_P)(x'^{\gamma} - x'^{\gamma}_P) \\ &+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}\partial x'^{\delta}}\right)_{x_P} (x'^{\beta} - x'^{\beta}_P)(x'^{\gamma} - x'^{\gamma}_P)(x'^{\delta} - x'^{\delta}_P) + \cdots \end{aligned}$$

点 x^{α}_P には，一般的な計量 $g'_{\alpha\beta}$ を $\eta_{\alpha\beta}$ に変換させるための 16 個の数 $(\partial x^{\alpha}/\partial x'^{\beta})$ がある．$g'_{\alpha\beta}$ は 10 個あるので，このような変換をしても自由度が 6 個残る．これらの 6 個の自由度は厳密に 3 通りの回転と 3 通りのローレンツブーストに対応し，これらは $\eta_{\alpha\beta}$ を変えない．こうした考えにしたがい，以下の表の空いたところを埋めて，(7.12) 式に加え，計量の 1 階微分を 0 にするような座標変換の自由度が十分あること，さらに 2 階微分はそうではないことを示せ．

	条件	数
$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$	10	16
$\partial g'_{\alpha\beta}/\partial x'^{\gamma} = 0$	?	?
$\partial^2 g'_{\alpha\beta}/\partial x'^{\gamma}\partial x'^{\delta} = 0$	?	?

第 22 章でみるように，正しく体系づけると，変換で消せない 2 階微分は時空曲率の測定量であることがわかる．そのうちのどれくらいが 2 階微分にあるか．

10. ある観測者が計量 (7.20) の 2 次元幾何学中で曲線 $X = 2T$ （$T > 1$） 上を運動している．

(a) この観測者の 4 元速度の成分を求めよ．この曲線は時間的か．

(b) この観測者の直交基底 $\mathbf{e}_{\hat{0}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{1}}$ の成分を求めよ．

11. [S] 例 7.4 のワープ航法時空について，曲線 $x_s(t)$ に沿うすべての点で，宇宙船の 4 元速度が未来光円錐の**内側**にあることを示せ．

12. 例 7.4 のワープ航法時空で，宇宙船が宇宙ステーションの間を進むのに，座標時間 T を使うとどれくらいの時間がかかるか.
13. [S] 計量 $g_{\alpha\beta}$ の時空中の 2 つのベクトル場 $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{b}(x)$ と世界線 $x^\alpha(\tau)$ を考えよう．$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の座標基底成分の偏微分と $g_{\alpha\beta}$ の偏微分，4 元速度 $\mathbf{u}$ の成分で $d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/d\tau$ を表せ.
14. ある時空幾何学の計量

$$ds^2 = -(1-Ar^2)^2 dt^2 + (1-Ar^2)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

がある.

(a) 中心 $r = 0$ から座標半径 $r = R$ まで半径方向に伸びた t 一定の直線に沿って固有時を計算せよ.

(b) 座標半径 $r = R$ の球の面積を計算せよ.

(c) 座標半径 $r = R$ の球の 3 次元体積を計算せよ.

(d) 座標半径 R の球と時間 T 離れた 2 枚の t 一定面を境界とする 4 次元チューブの 4 次元体積を計算せよ.

15. [S] 図 2.7 に示したピーナッツの面積を求めよ.
16. [B] あなたは 22 ページのボックス 2.3 に示したようなメルカトル図法の世界地図を持っているとする．この地図は幅 1m である．ボックスで表した直交座標 (x, y) を使って地図上に点をおく．グリーンランドは $x = -5$cm から $x = -14$cm, $y = -21$cm から $y = 38$cm まで広がる長方形で近似できる．アメリカ合衆国は $x = -21$cm から $x = -34$cm, $y = 8$cm から $y = 12$cm まで広がる長方形として近似できる．地図上で，グリーンランドはアメリカの約 3 倍の面積を持っている．ボックスの（f）式と（i）式によって表される線素を使い，これらの長方形の面積の本当の比を求めよ．注意：これらの長方形はグリーンランドとアメリカの実際の面積を正確には表していない.
17. [S] ワームホール幾何学 (7.39) の喉の両側で座標半径 R の 2 つの球を境界とする t 一定スライスの 3 次元体積を求めよ.
18. 線素

$$dS^2 = \frac{dr^2}{(1-2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

の 3 次元空間を考える.

(a) $r = 2M$ の球と $r = 3M$ の球の間の半径方向の距離を求めよ.

(b)（a）の 2 つの球の間の空間体積を計算せよ.

19. 4 次元ユークリッド空間で半径 R の球面は

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = R^2$$

である.

(a) 次の場合に，球面上の点が座標 (χ, θ, ϕ) で表せることを示せ．ここで

$$X = R\sin\chi\sin\theta\cos\phi, \quad Z = R\sin\chi\cos\theta$$
$$Y = R\sin\chi\sin\theta\sin\phi, \quad W = R\cos\chi$$

(b) これらの座標で球面上の幾何学を表す計量を求めよ.

20. **表紙の図を描け** 線素

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{(1-2M/r)} + r^2 d\phi^2$$

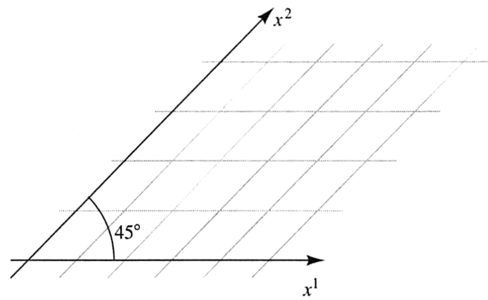
の2次元幾何学を考える. このスライスと同じ内的幾何学をもつ3次元平坦空間中で2次元面を見つけ, その絵を描け.（**コメント:** これは, 第12章で考察するシュワルツシルトブラックホール計量であり, また本書の表紙の幾何学でもある）

21. x^1, x^2 の軸が互いに 45° の角度でひしゃいだ座標系をもつ2次元平坦空間を考えよう.

(a) 座標の枡目をつくり, x^1, x^2 の座標基底の基底ベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を描け.

(b) 基底ベクトルのスカラー積から計量 g_{AB} の成分（A と B には 1, 2 が入る）を計算せよ.

(c) 座標格子上で x^1 軸と 30° をなす長さ2のベクトル $\mathbf{V}$ を描け. このベクトルの V^A 成分を計算せよ. V^A を見つけるための幾何学的な構成法を発見できるか.



22. [S] (a) ワームホール計量 (7.39) の座標軸に沿う正規直交基底の座標基底成分を求めよ.

(b) 正規直交基底における座標基底ベクトルの成分を求めよ.

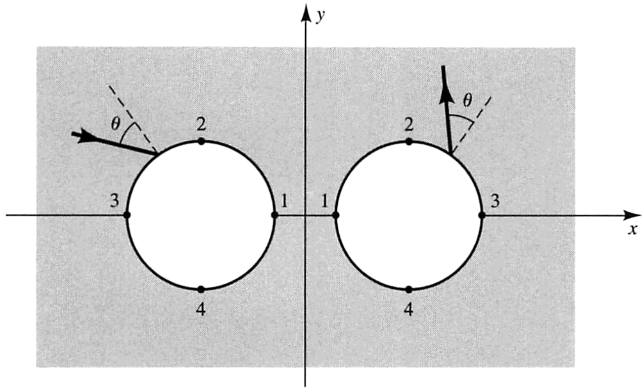
23. どんな2つの正規直交基底もローレンツ変換で結びつくことを示せ. より正確には, 1つの基底ベクトルが, ローレンツ変換を定義する係数行列を使って他のベクトルの線形結合になることを示せ.

24. 慣性系 (t, x, y, z) で, x 軸方向に速度 v で運動する別の系の一定時間 t' の空間的超曲面を考えよう.

(a) t' が同じ値になる曲面の族の概形を (t, x) 時空図中に描け. 平坦時空のすべての点はこれらの曲面に乗っているか.

(b) これらの空間的曲面に垂直な単位ベクトルの (t, x, y, z) 座標成分を求めよ.

25. [C] **空間の2つの領域をつなぐワームホールのトーイモデル** 平面をもってきて, 距離 d 離れた半径 R の2つの円の領域を取り除き, 1つの円の端の点をもう1つの円の端の点と同一視する. 図に示したように, 1と記してある点はすべて同一視され, 2と記してある点もすべて同一視され, 他も同様である. 自由粒子または光線の直線経路が左の円上の点を交差すると, 右の円上の同一視された点から現れ, 図に示したように法方向と入射方向がなす角度はどちらも同じになる.



(a) 粒子の直線軌道が示されたように同一視されることについて議論せよ.

(b) 2 つの点が x 軸上の $x = +L$ と $x = -L$,（$L > R + d/2$）の位置にある．粒子は x 軸に沿って 1 つの点からもう 1 つの点に移動し始めた．もう 1 つの点に着いたとき，移動距離はいくらか.

(c) この幾何学中で閉じた軌道を探せ．その軌道は摂動に対して安定か.

(d) 3 次元平坦空間から 2 つの球が取り除かれ，同じように同一視が行われたとする．x 軸に沿ってある距離離れた観測者は，ワームホールの口の中を覗いたときどんな景色をみることになるか.

26. **空間と時間の別の分離法**　原点から発生した前方光円錐の内側の各点（$-t^2 + r^2 < 0$）が，ある a の値に対して (7.74) 式の形のローレンツ双曲面上にあることを示せ．内側の点は a を時間座標，(χ, θ, ϕ) を空間座標として (7.75) 式のように表すことができる．これらの新しい座標で平坦時空の線素を求めよ．(t, r) 時空図の空間的曲面の族として略図を描け.

第 8 章

測地線

実験的にも理論的にも，一般相対性理論の曲がった時空は，テスト粒子と光線がその中でどのように運動するのかを調べることによって研究される．「テスト」物体の質量が小さいとそれ自身のつくる時空曲率は無視できるが，別の非常に大きな質量がつくる曲率に反応して運動する．地球を回る人工衛星は地球がつくるわずかな曲率によって決められる軌道にしたがって運動している．人工衛星自身の質量は地球よりかなり小さく，衛星のつくる曲率は無視できる．これがテスト質量である．

この章では，一般的な曲がった時空中でテスト粒子と光線の運動を支配する方程式を求め分析する．時空曲率以外（たとえば電気力）のどんな影響も受けないテスト粒子だけを考える．このような粒子は一般相対性理論では**自由**である，または**自由落下**していると呼ばれる．一般相対性理論で使われる**自由**ということばはニュートン力学で使われるものとはニュアンスが違う．ニュートン力学では自由粒子は重力を含めどんな力からも影響を受けない．一般相対論では重力は力ではなく時空の性質である．一般相対論では自由は時空曲率**以外の**どんな影響からも解放されていることを意味する．いずれにしても，自由粒子は単に時空幾何学だけに反応して運動している．時間的世界線上を運動するテスト粒子の運動方程式から始めて，8.3 節で光線の運動方程式を調べる．

8.1　測地線方程式

曲がった時空中の自由テスト粒子の一般原理は 5.4 節の平坦時空の場合と同じである．

> **自由テスト粒子の運動の変分原理**
> 時間的に離れた 2 点間を運動する自由テスト粒子の世界線は
> その間の固有時が極値をとるものである．

5.4 節の平坦空間における自由粒子の変分原理とは 2 つの違いがある．(1) **テスト**ということばは，曲率の重要な発生源とならない物体の運動に使っていることをはっきりさせるためにつけられている．(2) 固有時は (7.19) 式を通じて一般的な計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ によって決まり，平坦時空の計量 $\eta_{\alpha\beta}$ ではない．これまでの章ではこの変分原理を既知の運動方程式の便利なまとめとして使った．一般相対性理論では変分原理**から**運動方程式を導き出すことになるだろう．固有時が極値をとる世界線は**測地線**と呼ばれ，それを決める運動方程式が**測地線方程式**である．

表 8.1 極値的固有時 $\delta\int d\tau=0$ と運動方程式

	変分原理	運動方程式
平坦時空中の粒子	$\delta\int(-\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}=0$	$\dfrac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0$
幾何学的ニュートン力学	$\delta\int\left[(1+2\Phi/c^2)(cdt)^2-(1-2\Phi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2)\right]^{1/2}=0$ ($1/c^2$ の初めの項)	$\dfrac{d^2x^i}{dt^2}=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i}$ ($1/c^2$ の初めの項)
一般計量	$\delta\int(-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}=0$	$\dfrac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}\dfrac{dx^\gamma}{d\tau}$

これまでの章では極値的固有時の原理を使い，特別な時空幾何学中のテスト粒子に対して測地線方程式を導出した．5.4 節で，極値的固有時の原理から，特殊相対論の平坦時空で慣性系のテスト粒子の座標に対する運動方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0 \tag{8.1}$$

が導出できることを示した．6.6 節で，非相対論的粒子のニュートンの運動方程式が幾何学 (6.20) の中で，$1/c^2$ のオーダーで極値的固有時の原理にしたがうことを示した．この章では計量 $g_{\alpha\beta}$ と線素 (7.8) で表される一般的な時空幾何学中で運動するテスト粒子を調べる．これらの間の相異点を表 8.1 に示した．

我々の目的は一般性にあるのだが，まずは簡単な例から始めるのがよいだろう．極値をとる曲線としてみたときの平坦 2 次元面内の測地線である．これは時空中の時間的測地線ではなく空間の空間的測地線であるが，類似しているところが多い．言うまでもなく，平坦空間の 2 点間距離が極値をとる曲線は直線である．しかしまず，平面の測地線を支配する方程式を見つけ，それを解く過程から既知の結果が得られることを確かめるのは教育的である．例 8.1 で方程式を求め，次節でそれを解く．方程式は直交座標で最も簡単になるが，最も簡単な式を解くことがよい例題になるとは限らない（問題 1)．図 2.5 で説明したように，平面の測地線を極座標で調べる．

例 8.1. 極座標の平面の測地線方程式 極座標 r と ϕ で表された平面の計量は

$$dS^2=dr^2+r^2d\phi^2 \tag{8.2}$$

である [(2.8) 式を参照]．2 点 A, B をつなぐ曲線は，パラメータ σ の関数として r と ϕ を与え，A で $\sigma=0$ をとり，B で $\sigma=1$ をとるようにすることで表すことができる．この性質をもつパラメータの選び方はたくさんあるが，どれを使っても構わない．どんなパラメータでも曲線は 2 つの関数 $r(\sigma)$ と $\phi(\sigma)$ によって表される．A と B の間の距離は

$$S_{AB} = \int_A^B dS = \int_A^B (dr^2 + r^2 d\phi^2)^{1/2}$$
$$= \int_0^1 d\sigma \left[\left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{8.3}$$

である．この距離が極値をとる必要条件はラグランジアン

$$L\left(\frac{dr}{d\sigma}, \frac{d\phi}{d\sigma}, r\right) = \left[\left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{8.4}$$

に対するラグランジュ方程式である．これらは

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L}\frac{dr}{d\sigma}\right) = \frac{r}{L}\left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2, \qquad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L}r^2\frac{d\phi}{d\sigma}\right) = 0 \tag{8.5}$$

である．しかし (8.3) 式で示したように，L の値は単に $dS/d\sigma$ である．したがって，(8.5) 式に $d\sigma/dS$ をかけ，曲線に沿ったパラメータとして距離 S を使うことにより，測地線方程式は簡単な形

$$\frac{d^2r}{dS^2} = r\left(\frac{d\phi}{dS}\right)^2 \tag{8.6a}$$

$$\frac{d}{dS}\left(r^2\frac{d\phi}{dS}\right) = 0 \tag{8.6b}$$

になる．次節でこれらの式を解く．

時空中で時間的測地線方程式を求める手続きは例 8.1 をそのまま一般化することである．時空中の時間的世界線に沿った AB 間の固有時は (7.19) 式から

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B [-g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} \tag{8.7}$$

である．世界線は 4 つの座標 x^α をパラメータ σ の関数として表すことができる．端点 A で $\sigma = 0$ となり，端点 B で $\sigma = 1$ となる．A と B をつなぐ固有時は

$$\tau_{AB} = \int_0^1 d\sigma \left(-g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} \right)^{1/2} \tag{8.8}$$

となる．AB 間をつなぐ固有時が極値をとる世界線はラグランジュ方程式

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/d\sigma)}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{8.9}$$

を満たすものである．このときのラグランジアンは

$$L\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha\right) = \left(-g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} \right)^{1/2} \tag{8.10}$$

である．これらは計量 $g_{\alpha\beta}$ の時空中の測地線方程式である．137 ページの例 7.7 で考察したワームホール計量を例にして方程式のつくりかたを説明する．

例 8.2. **ワームホール幾何学の測地線方程式**　ワームホール幾何学の線素 (7.39) は

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{8.11}$$

であり，測地線のラグランジアン (8.10) は

$$L\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha\right) = \left\{\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - (b^2 + r^2)\left[\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{8.12}$$

である．ラグランジュ方程式を書き下すときに (8.12) 式の平方根を微分すると，$1/L$ の因子が現れる．しかし (8.8) 式から L は $d\tau/d\sigma$ である．したがって L の逆数は σ による微分を τ による微分と交換するのに使える．その結果，以下の 4 つの方程式が得られる：

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \tag{8.13a}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = r\left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right] \tag{8.13b}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[(b^2 + r^2)\frac{d\theta}{d\tau}\right] = (b^2 + r^2)\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \tag{8.13c}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[(b^2 + r^2)\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\tau}\right] = 0 \tag{8.13d}$$

次節でこれらの方程式をワームホール測地線の性質を理解するために使う．

少し考えて，これまでの例の結果を使うと，任意の曲がった時空中で測地線方程式の一般的な形が

時間的測地線の測地線方程式

$$\boxed{\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}} \tag{8.14}$$

になることは明らかである．自由な添字 α の値に対応して 4 つの方程式がある．係数 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は**クリストフェル記号**と呼ばれ，これは計量とその 1 階微分から構成されている．これらの 4 つの方程式をまとめて (8.14) 式は**測地線方程式**と呼ばれる．測地線方程式は曲がった時空におけるテスト粒子の基礎運動方程式である．同じようなことだが，4 元速度 $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ の**座標基底**成分を使うと

時間的測地線の測地線方程式

$$\boxed{\frac{du^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma} \tag{8.15}$$

と書かれる．

クリストフェル記号の下の 2 つの添字は対称にとることができる．

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \tag{8.16}$$

(8.14) 式の β と γ の和をとるとき対称的にとらなければならず，非対称部分は何の寄与もしないからだ．本書で使われる簡単な例では，これまで例で説明したように，線素から測地線の方程式を求め，クリストフェル記号を読み取ることが最も容易であることが多い．この本のウェブサイトにある *Mathematica* プログラムを使うともっと容易である．重要な計量について計算結果は付録 B にある．

例 8.3. 測地線方程式からクリストフェル記号を求める　一般的な測地線方程式 (8.14) を (8.6) 式の形と比較すると，極座標で平面の計量 (8.2) によるクリストフェル記号の成分で 0 でないものは

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = 1/r \tag{8.17}$$

である．同じように (8.13) 式からワームホール計量 (8.11) のクリストフェル記号のうち 0 でないものは

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r\sin^2\theta \\ \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{r}{b^2+r^2}, & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{r}{b^2+r^2}, & \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \cot\theta \end{aligned} \tag{8.18}$$

であることがわかる．これらの答えは (5.7) 式で述べた記法を使い，成分の番号の代わりに座標の名前を使って表されている．例えば，(8.18) 式では，$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^3_{13}$ であり，(8.11) 式において $x^1 = r$, $x^3 = \phi$ である．ϕ が上下にあるが，この場合は和をとらない．これは和の記法を破っているが，これも標準的で便利な慣例である．

ラグランジアン (8.10) の一般的な形に対してラグランジュ方程式を求めることにより，計量とその微分で表されたクリストフェル記号の公式を求めることができる．ただし，これを我々はほとんど使う必要はないだろう．これは十分ややこしいので，ウェイブサイトの補足にまで遅らせておくが，答えは

$$\boxed{g_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right)} \tag{8.19}$$

クリストフェル記号

である．もし使われている座標系で計量がたまたま対角化されているとすると，(8.19) 式を使った Γ の計算は容易である．例 8.4 で説明するように，左辺の和には 1 つの項しかないからだ．もし対角化されていなければ，$g_{\alpha\beta}$ の逆行列を計算して Γ の 1 次方程式 (8.19) を解かなければならない．

例 8.4. 公式からクリストフェル記号を求める　公式 (8.19) がどのように使えるか示すために，2 次元平面の極座標の計量 (8.2) から $\Gamma^r_{\phi\phi}$ を計算しよう．$x^1 = r$ と $x^2 = \phi$ を動く添字 A と B を使う．これによると計量は $g_{AB} = \mathrm{diag}\,(1, r^2)$ となる．(8.19) 式で $\alpha = r$, $\beta = \gamma = \phi$ とし，計量が対角化されていることから，1 つの項だけが左辺の和に寄与することに気を付けると

$$g_{rr}\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r}\right) = -r \tag{8.20}$$

が得られる．$g_{rr}=1$ なので，(8.17) 式で求めたように，$\Gamma^r_{\phi\phi}=-r$ である．

8.2　対称性と保存則で測地線方程式を解く

測地線方程式 (8.14) は，時空中のテスト粒子の位置を固有時の関数として決める 4 連立 2 階常微分方程式である．時空で初期位置と初期 4 元速度が決まると，標準的な手法を使って数値的に積分し，その後の固有時の各瞬間における位置と 4 元速度が求まる．非常に簡単な場合，解析的に解けることがあり，例 8.5 に示す．

例 8.5. ワームホールを通る時間旅行　137 ページの例 7.7 と図 7.5 で説明したワームホール幾何学を考えよう．旅行者は座標半径 $r=R$ のところから出発し，ワームホールの喉を半径方向に自由落下する．初期半径方向 4 元速度を $u^r\equiv U$ とすると，ワームホールの喉を通り，ちょうど反対に対応する点 $r=-R$ にたどり着くまでに旅行者が身に着けた時計でどれくらいの時間がかかるのだろうか．

自由落下している旅行者は，線素 (8.11) によって決まる測地線上を半径方向に運動している．初期の 4 元速度は

$$u^\alpha=[(1+U^2)^{1/2},U,0,0] \tag{8.21}$$

である．ここで (8.11) 式の座標を (t,r,θ,ϕ) の順で並べ，正規直交条件 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=-1$ [(7.55) 式を参照] が満たされるように u^t を選んである．球対称であることから，半径方向に動いてしまうと，ずっと半径方向に運動し続けることになる．4 元速度成分 $u^\theta(\tau)$ と $u^\phi(\tau)$ は世界線に沿ってずっと 0 であり続ける．半径方向の成分は (8.13) 式の $d^2r/d\tau^2$ の式にしたがって変化する．θ と ϕ を一定として評価すると

$$\frac{du^r}{d\tau}=0 \tag{8.22}$$

となる．よって $u^r(\tau)$ は世界線上で一定で，初期値 U をとり続ける．$u^r\equiv dr/d\tau=U$ を積分すると

$$r(\tau)=U\tau \tag{8.23}$$

となる．旅行者が $r=0$（喉）にいるとき固有時が 0 になるように選んだ．$r=-R$ と $r=+R$ の間の経過固有時は

$$\Delta\tau=2R/U \tag{8.24}$$

となる．

例 8.5 は例外的に計算しやすいものである．もっと一般的な状況では，ニュートン力学のときのように，エネルギーや角運動量のような保存則を使うことにより問題が解きやすくなる．保存則は運動方程式の第一積分を与え，解くべき方程式の数と次数を減らす．

つねに使える第一積分は 4 元速度の規格化から得られる．座標基底でこれは一般の計量に対して

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=-1 \tag{8.25}$$

であり [(7.55) 式を参照]，これが第一積分になるだろう[1]．他にも保存則は対称性からでてくる．

ニュートン力学で保存則は対称性とつながっていた．たとえば，エネルギーが保存するために，力はポテンシャルから導かれる保存力でなければならず，そのポテンシャルは時間に依存してはいけない．特別な方向の線形運動量が保存するためにはポテンシャルはその方向に沿って一定でなければならない．角運動量が保存するためには，ポテンシャルは球対称でなければならない．要するに，時間変位のもとで対称であればエネルギーが保存し，空間変位のもとで対称なら線形運動量が保存し，角運動量は回転変位のもとで対称なら保存する．

テスト粒子の運動の保存量が，対称性をもたない一般時空で存在することを期待することはできない．一般時空計量は時間に依存し，角度に依存し，位置などに依存する．しかし時空が対称性をもつとき，それに関する保存則が存在する．たとえば，時空幾何学が時間に依存しなければテスト粒子のエネルギーが保存する．

時空幾何が対称性をもつかどうかをどのように言ったらよいのだろうか．簡単な例は，計量が座標の 1 つ，例えば x^1 に依存しない場合である．そのとき，変換

$$x^1\to x^1+\text{定数} \tag{8.26}$$

により計量は変わらない．成分が

$$\xi^\alpha=(0,1,0,0) \tag{8.27}$$

のベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の方向に移動しても計量は変らない．(8.27) 式は対称性 (8.26) に関係する**キリングベクトル**と呼ばれ，ドイツの数学者キリング（Wilhelm Killing 1847-1923）にちなんだものである（killing に「ひどく疲れる」という意味があるということから，特別難しい概念であるというわけではない）．キリングベクトルはどんな座標系でも対称性を特徴づける一般的な方法である．以下の例 8.6 ではそれをよく表している．

キリングベクトル

例 8.6. 平坦空間のキリングベクトル　平坦 3 次元空間の計量が通常の直交座標

$$dS^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{8.28}$$

で書かれているとき，3 つの明白なキリングベクトル $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ があり，平坦空間の 3 つの変位対称性に対応する．しかし，極座標のとき

$$dS^2=dr^2+rd\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{8.29}$$

別のキリングベクトルが現れる．計量が，z 軸回りの回転対称性に対応する ϕ と独立であるためである．このキリングベクトルの成分は極座標で $(0,0,1)$ であり，直交座標で $(-y,x,0)$ である．

[1] ニュートン力学の通常の用語で**第一積分**は座標と時間の 1 階微分の関数であり，2 階微分方程式である運動方程式のためには，定数になる．エネルギーと角運動量の保存則はその例である．第一積分は**運動の定数**とも呼ばれる．

平坦空間には他の 2 つの軸についての回転対称性に対応する 2 つのキリングベクトルも存在する．あなたはそれらに対応する直交座標成分を推測できるだろうか？

対称性は測地線に沿った保存量の存在を意味する．これをみるために，測地線の方程式が極値的固有時の原理とラグランジュ方程式 (8.9) にしたがうことを思い出そう．計量，つまり L が座標 x^1 に独立ならば，$\partial L/\partial x^1 = 0$ となる．$\alpha = 1$ の (8.9) 式は

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)}\right] = 0 \tag{8.30}$$

となり，

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)} = -g_{1\beta}\frac{1}{L}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = -g_{1\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau} = -g_{\alpha\beta}\xi^\alpha u^\beta = -\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u} \tag{8.31}$$

が測地線に沿って保存することがわかる．任意の座標系では，計量に沿った保存量は

測地線に沿った保存量

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u} = 一定} \qquad (\boldsymbol{\xi}\text{キリングベクトル}) \tag{8.32}$$

となる．同じ意味で，$\mathbf{p}$ を粒子の運動量として，$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}$ が保存すると言うこともできる．これらの保存則の使い方を説明する例を以下に挙げる：

例 8.7. 極座標を使った平面内の測地線　運動の積分をすると，(8.2) 式の極座標で表した平面内のすべての測地線に対して (8.6) 式を解くことが容易になる．2 次元の例で，添字 $A, B, \cdots$ が値 1,2 をとり，2 つの極座標で $x^1 = r$, $x^2 = \phi$ にとる．接ベクトル $\vec{u}$ の成分は $u^A = dx^A/dS$ である．$\vec{u}\cdot\vec{u} = 1$ に対応する第一積分は線素 (8.2) の両辺を dS^2 で割ることで得られる：

$$\left(\frac{dr}{dS}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dS}\right)^2 = 1 \tag{8.33}$$

別の第一積分は，計量 (8.2) が ϕ と独立であることから得られる．これにともなうキリングベクトル $\vec{\xi}$ は座標基底成分 $\xi^r = 0, \xi^\phi = 1$ をもつ．保存量はしたがって

$$\ell \equiv \vec{\xi}\cdot\vec{u} = g_{AB}\xi^A u^B = r^2\frac{d\phi}{dS} \tag{8.34}$$

であるが，この保存則も測地線方程式 (8.6b) から直接得られる．

これを (8.33) 式に代入すると

$$\frac{dr}{dS} = \left(1 - \frac{\ell^2}{r^2}\right)^{1/2} \tag{8.35}$$

となる．この積分は容易に行えて，r が S の関数として求められるが，我々が本当に知りたい測地線の形は，ϕ の関数で表した r, または r の関数で表した ϕ である．(8.34) 式を (8.35) 式で割ると

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/dS}{dr/dS} = \frac{\ell}{r^2}\left(1 - \frac{\ell^2}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{8.36}$$

が得られる．これは積分すると

$$\phi = \phi_* + \cos^{-1}\left(\frac{\ell}{r}\right) \tag{8.37}$$

となる．ここで ϕ_* は積分定数である．よって測地線の形は

$$r\cos(\phi - \phi_*) = \ell \tag{8.38}$$

となる．(8.38) 式のコサインを $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ で展開すると

$$x\cos\phi_* + y\sin\phi_* = \ell \tag{8.39}$$

となる．これは直線の一般形である．よって，既知の直線が平坦における最小距離曲線として再導出できた．

8.3 ヌル測地線

この章の前節では，曲がった時空中で自由粒子がしたがう経路を調べてきた．これらは時間的測地線である．光線も時空幾何学を調べるのに重要である．光線は $ds^2 = 0$ を満たすヌル世界線上を運動する．具体的には，もし $x^\alpha(x)$ があるパラメータ λ によって表される時空を通る曲線の軌道で，$u^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$ が接ベクトルならば，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{8.40}$$

である．この式だけでは軌道を完全に決めるのに十分ではない．未知数 4 つに対して，方程式が 1 つしかないからだ．測地線方程式 (8.14) に対応するものが必要である．極端な話，この方程式は曲がった時空に一般化した電磁気の法則から求めるべきであろうが，等価原理を使ってこの種の議論をすることができる．

平坦時空中の光線の運動方程式 (5.66) は

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = 0 \tag{8.41}$$

と書くことができる．λ はアフィンパラメータである．以下の 2 つの性質をもつ法則を曲がった時空へ一般化したものを探す．(1) 局所慣性系でこの形になる．(2) すべての座標系で同じ形になる．座標系は任意なので，第二の要請を満たさなければならない．我々はすでにこれを行うための法則をもっている．それは測地線方程式 (8.14) である．(1) と (2) の要請を満たす (8.41) 式の自然な一般化は

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} \tag{8.42}$$

ヌル測地線の測地線方程式

である．(8.42) 式を満たすヌル曲線は**ヌル測地線**と呼ばれる．光線はヌル測地線上を運動する．アフィンパラメータ λ は (8.42) 式が測地線方程式の形をとるように選ばれたパラメータで，光線に沿った距離はゼロになり，時空距離ではない．

8.4　局所慣性系と自由落下系

リーマン正規座標系

7.4 節で局所慣性系のアイディアを導入した．それは時空の点 P を中心とする座標で，その点では $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ であり，計量の 1 階微分がゼロになる [(7.13) 式を参照]．こうした座標ではクリストフェル記号は P で 0 になり，測地線方程式 (8.14) が平坦空間の自由粒子と同じ形をとる [(5.62) 式を参照]:

$$\left.\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}\right|_P = 0 \tag{8.43}$$

したがって，座標系の広がりが小さければ小さいほど近似はよくなる．自由粒子はしばらく直線上を運動する．したがってこれらの座標はニュートン力学の慣性系と似ているが，その点の近くだけしか使えない．

第 7 章で，局所慣性系を定義する座標を少なくとも 1 つ構成することができると述べたがこの章で測地線の理解が成し遂げられれば，ここでそれを示すことができる．

時空の 1 点 P をとり座標原点とする．その点で 4 つの正規直交ベクトルの基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ を選ぶ（正規直交基底を座標基底から区別するための添字であるハットをつけない．ここで作られる座標の基底がこの直交基底と一致することがこれからわかるだろう）．例えば，P にいる観測者の実験室の直交基底ベクトルでもよい（5.6 節を参照）．P において単位ベクトル $\mathbf{n}$ で定義される方向を選び，距離 s 進んで到達した点（測地線が空間的ならば）を座標値とすることができる：

$$x^\alpha \equiv sn^\alpha \tag{8.44}$$

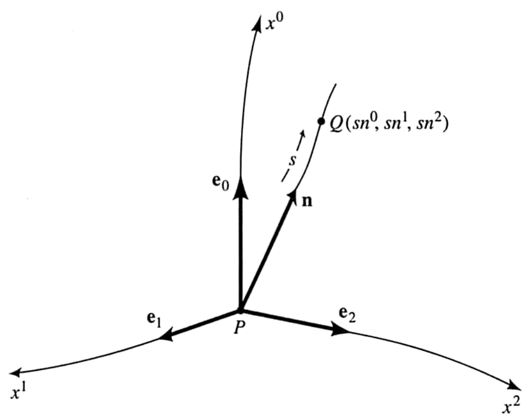


図 8.1　リーマン直交座標は局所慣性系（Local Inertial Frame, LIF）を定義する．P 点の 4 つの正規直交ベクトル $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ を選ぶことから局所慣性系の構成を始める．方向 $\mathbf{n}$ に伸びている測地線に沿って距離 s のところにある点 Q に座標 $x^\alpha = sn^\alpha$ を割り当てる．LIF の 4 つの座標軸は 4 つの直交方向の測地線に沿って伸びている．そのまま伸ばすと，時空曲率のために測地線が交わったり，座標系が特異になることがある．

ここで n^α は基底 $\{_\alpha\}$ における $\mathbf{n}$ の成分である（図 8.1 を見よ）．これをすべての方向 $\mathbf{n}$ で繰り返す（方向が時間的なら s の代わりに固有時 τ を使い，ヌルなら連続性により埋めていく）．その結果できた座標は P に十分近い点を一意的に番号づけができ，時空曲率があってもその中では測地線は交わらない．**リーマン正規座標**はこの座標系につけられた名前である．これらで局所慣性系を構成できることを今から示す．

リーマン正規座標

正規直交ベクトル $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ は P の局所慣性系の座標基底ベクトルであり，したがって

$$g_{\alpha\beta}(x_P) = \eta_{\alpha\beta} \tag{8.45}$$

である [(7.56) 式を参照]．これは局所慣性系に対する要請 (7.13) の 1 つ目である．第二に，P で計量の微分が 0 になることは以下でわかる．

P を通るすべての測地線はある固定された方向 $\mathbf{n}$ によって座標値がつけられ，時間的ならば測地線方程式 (8.14) にしたがい，空間的ならば同じ方程式で τ の代わりに s を使う．P で (8.44) 式を使い (8.14) 式を評価すると

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big|_P n^\beta n^\gamma = 0 \tag{8.46}$$

が得られる．しかし，この式はすべての単位ベクトル $\mathbf{n}$ で成り立たなければならなず，

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big|_P = 0 \tag{8.47}$$

となる．計量のすべての微分が 0 になるときだけすべてのクリストフェル記号は 0 になる [(8.19) 式を参照]．したがってリーマン正規座標は局所慣性系を定義する．

例 8.8. 球面の北極のリーマン正規座標 円周 $2\pi a$ の球の幾何学の線素は，よく使われる極座標 (θ, ϕ) で

$$dS^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{8.48}$$

の形をしている [(2.15) 式を参照]．北極でリーマン正規座標を構成するためには以下のようにする．$\phi = 0$ と $\phi = \pi/2$ の方向を向いている単位ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ で正規直交基底を構成する．角度 ϕ の方向を向いている単位ベクトル $\vec{n}$ の成分はこの基底で，$n^A = (\cos\phi, \sin\phi)$ である．点 (θ, ϕ) を考えよう．この点と北極を結ぶ測地線は，経線が ϕ に等しい大円の一部となる．(θ, ϕ) と北極の間の測地線距離は $s = a\theta$ である．したがって点 (θ, ϕ) のリーマン正規座標は

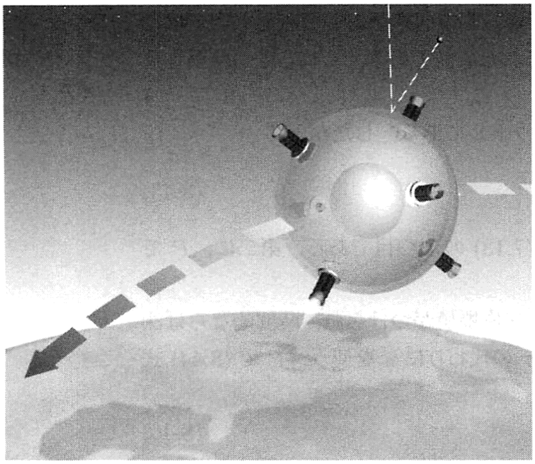
$$x^A = (sn^1, sn^2) = (a\theta\cos\phi, a\theta\sin\phi) \tag{8.49}$$

である．例 7.2 はこれらの座標で，計量が $g_{AB} = \mathrm{diag}(1,1)$ の形をとり，そこでは 1 階微分が 0 になる．

自由落下系

リーマン正規座標が局所慣性系を定義する唯一の方法ではない．実際，等価原理にしたがって，一点だけでクリストフェル記号を 0 にすることからさらに進めることができる．測地線方程式は自

ボックス 8.1 Drag-free 衛星



自由落下系を現実に張ることは原理的には容易だ．人工衛星を真空宇宙に打ち上げ，回転しない状態で漂わせ，ほら，これで人工衛星の内側の系は自由落下系になった．しかし，実際には空間はそんなに真空ではない．残存する大気の摩擦や放射圧，その他の力によって小さな人工衛星（$\sim$ 1000kg）はズレて行き，正確な重力物理の実験に大きな影響が現れる．（283 ページのボックス 14.1）GP-B 実験はジャイロスコープの運動に対して一般相対論の予言を検証するものであるが，そこでは非重力加速度は $\sim 10^{-13}\mathrm{m/s^2}$ より小さくなければならない．これからの 10 年で重力質量と慣性質量の等価性を宇宙で検証することが計画されているのだが，非重力加速度は $\sim 10^{-14}\mathrm{m/s^2}$ より小さくなければならないし，宇宙における重力波検出器ではそれよりも小さくなければならない．地球付近の軌道における残存大気の引きずりは $\sim 10^{-6}\mathrm{m/s^2}$ になる．

drag free 衛星は自由落下系を実現することの実際的な方法である．アイディアはここの図にある．実験台は人工衛星の内側で自由に揺れ動き，上で述べたような，擾乱する力から守ってくれる．隔離された実験台は時空の測地線にしたがっている．正確なセンサーが人工衛星の保護用の系に対して実験台の位置を検出し，衛星が軌道修正用小型ロケットエンジンを絶えず操作して実験室が中心になるようにしている．実際，エンジンは小さな揺れ動きによって生じる加速度を打ち消すことができる．明らかにセンサーは，ここで述べているような小さな揺れまで人工衛星の加速度を検出できるようなものでなければならなず，衛星自身も実験台の運動を大きく揺らしてはいけない．しかし，ここは技術的な問題を巧妙に解決するための場ではない．drag free 衛星は自由落下系に対して現実的な近似装置となる．

由落下する十分小さな実験室系の中で**ある期間**，(8.43) 式になることを示唆している．112 ページの例 6.3 で述べた軌道上にあるスペースシャトルの実験室はほぼ自由落下している実験室の 1 つの例である．ボックス 8.1 の Drag-free 衛星はもう 1 つの例である．

自由落下実験室を数学的に理想すれば，1 点だけでなく測地線に沿ってずっとクリストフェル記号がゼロになっている座標系になる．我々はこのような座標系を**自由落下系**[2]と呼ぶことにする．自由落下系は測地線に沿ってずっと局所慣性系になっている．

自由落下系の構成は，ニュートン力学（3.1 節）と特殊相対論（4.3 節）の慣性系の構成（図 3.3 を思い出せ）と平行して行える．測地線を運動する自由なテスト粒子を考えよう．測地線に沿う固有時 τ は時間座標として，テスト粒子の位置は空間座標の原点として使える．固有時のある瞬間に，3 つのジャイロスコープをそれぞれ直交する 3 つの方向に向ける．その後に，これらのジャイ

[2] もう少しよく使われている名称は，**フェルミ正規座標系**または**自由落下観測者の固有座標系**である．自由落下系は本質を捉えるのに最も適した用語であるが，我々は通常の用語から外れている．しかし，どの局所慣性系でもその系が定義されている時空点 P で原点における加速度が 0 になるので，局所慣性系は「自由落下」しているということができる [(8.43) 式を参照]．時空のある一点で定義される局所慣性系は自由落下系と呼ばれる．ここでは，測地線に沿って定義される系のことについて述べている．

ロスコープによって向きづけられた方向から，リーマン正規座標を張るときに行ったのと同じ要領で空間座標 x^i を構成する．その結果できた座標 (τ, x^i) は，原点 $x^i = 0$ から測地線に沿ってクリストフェル記号が 0 になる自由落下系を構成する．今この時点でジャイロスコープが曲がった時空でどのように運動するのかを表す法則を知らないので，ここで座標系がどうなるのかを示すことはしない．そのことは第 14 章で行い，第 20 章で自由落下系に戻る．

自由落下系は曲がった時空中におけるニュートン力学と特殊相対論の慣性系に近い．しかし例 6.2 で示したように，自由落下しているスペースシャトルの中の宇宙飛行士は，長い時間かけて大きな空間距離に渡って実験を行うことで，時空曲率の効果を検出することができる．自由落下系と類似して，その測地線上でだけクリストフェル記号は 0 になるが，座標で覆われるすべての点ではそうならない．

問題

1. [S] 直交座標を使い，2 次元平坦面の測地線方程式を書いて解き，解が直線であることを示せ．
2. 通常の球座標で 2 次元球の計量は

$$dS^2 = a^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

である [(2.15) 式を参照]．a は定数である．

(a) クリストフェル記号を「手で」計算せよ．

(b) 大円が測地線方程式の解であることを示せ（**ヒント**:大円の方程式が簡単になるような方向に座標を向けられるという自由度を使え）．

3. 線素

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

をもつ 3 次元時空がある．

(a) この時空で，測地線の変分原理に対するラグランジアンを求めよ．

(b) (a) の結果を使って，ラグランジアンから測地線方程式を計算しその成分を書き下せ．

(c) (b) の結果から，この計量に対する 0 でないクリストフェル記号を書け．

4. [A] **回転系** 慣性系の z 軸まわりを角速度 Ω で回転している座標系 (t, x, y, z) で **平坦時空**の線素は

$$ds^2 = -[1 - \Omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

である．

(a) 極座標に変換して，線素が (7.4) 式において $\phi \to \phi - \Omega t$ の置き換えをしたものになっていることをチェックすることで上の計量を確かめよ．

(b) 回転系で x, y, z の測地線方程式を求めよ．

(c) 非相対論的極限においてこれらが，回転する座標中における遠心力とコリオリ力を含む自由粒子のニュートン力学の運動方程式になることを示せ．

5. 極値的固有時の変分原理を使わず，ワームホール計量 (7.39) のクリストフェル記号 $\Gamma^{\phi}_{r\phi}$ と $\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}$ を一般的な公式 (8.19) から直接求めよ．
6. 4 元速度 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ のノルムが測地線上で一定であることを測地線 (8.15) を直接計算することで示せ．
7. [S] 中心力のポテンシャル $V(r)$ 中で運動する質量 m の粒子を非相対論的ニュートン力学で考えよ．この系におけるラグランジアンを極座標で書け．8.2 節の方法を使って，z 軸まわりの回転のもとで不変であれば，角運動量の z 成分が保存することを示せ．
8. 平坦空間の z 軸まわりの回転対称性に対応するキリングベクトルの直交座標の成分が $(-y, x, 0)$ に対応するという，例 8.6 で述べた主張を確かめよ．同じ座標系で，y 軸まわりと z 軸まわりの平坦空間の回転対称性に対応するキリングベクトルの成分を求めよ．
9. 線素

$$ds^2 = -X^2dT^2 + dX^2$$

の 2 次元時空を考えよう．この時空で，すべての時間的測地線の形 $X(T)$ を求めよ．

10. 慣性系の 4 つの直交座標のどの 1 つを選んでも，それが平坦時空の光線のアフィンパラメータになることを示せ．
11. 極座標を使った 3 次元平坦時空の線素は $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\phi^2$ である．**ヌル**測地線を解け．光線は直線上を進むか．
12. **双曲面** 計量が

$$dS^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2), \qquad y \geq 0$$

によって定義される双曲面は曲がった 2 次元面の古典的な例である．

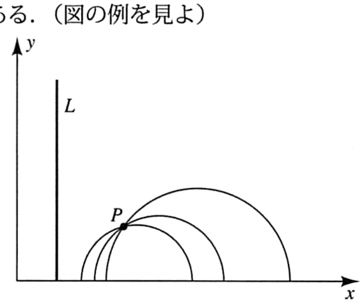
(a) x 軸上の点は上半面のどんな点 (x, y) からも無限の距離になることを示せ．

(b) 測地線方程式を書け．

(c) 測地線が，図に示したように，x 軸を中心とする半円または鉛直方向の線であることを示せ．

(d) 測地線方程式を解いて，これらの曲線に沿う長さ S の関数として x と y を表せ．

注意：この例は幾何学の歴史において重要である．ユークリッドの第 5 の要請は，直線 L と点 P に対して，P を通り L と交わらない直線が 1 本だけ存在することである（その直線は L に平行である）．球は，P を通るこのような直線が存在しない例である（すべての大円は交わる）．双曲面は一定の負の曲率をもち（第 21 章を見よ），そこでは，P を通り L と交わらない直線が**無数**にある．（図の例を見よ）



13. [S] 慣性系の原点を点 P とし，軸に沿った 4 つの単位ベクトルを使って 8.4 節で議論した方法により平坦空間のリーマン正規座標を構成せよ．できあがった座標系は慣性系座標と一致するか．

14. [C] **最小時間のフェルマの原理** 屈折率 $n(x^i)$ が位置の関数となっている媒質を考えよう．媒質中の光の速度は位置とともに変化し，$c/n(x^i)$ となる．フェルマの原理は，光線が**空間**（時空ではない！）の 2 点間を進むとき到達時間が最小となるような経路をとることを述べている．

 (a) 最小時間の経路が線素

$$dS^2_{\text{fermat}} = n^2(x^i)dS^2$$

の 3 次元空間中の測地線となることを示せ．ここで dS^2 はふつうの 3 次元空間の線素である．たとえば

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

とせよ．

 (b) (x, y, z) 直交座標で極値をとる測地線方程式を書き下せ．

15. [C] **ルーネベルグレンズ** 屈折率が

$$n(r) = \left[2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}$$

のように半径距離とともに変わる半径 R の球はルーネベルグレンズと呼ばれる．問題 14 の結果を使い，一方向から入射した平行光線の束が球の表面上の一点を焦点として集まるという性質をもつことを示せ．

第9章

球対称星外部の幾何学

一般相対性理論において最も単純な曲がった時空は，最も多くの対称性を持っているが，そのうちで最も有益なものは，球対称曲率源の外側にある真空空間の幾何学であり，その例が球対称星である．これはシュワルツシルト（Karl Schwarzschild 1873-1916）にちなんで**シュワルツシルト幾何学**と呼ばれている．彼はアインシュタイン方程式を解き 1916 年この幾何学を見つけた．これは太陽の外側の曲がった時空の優れた近似で，アインシュタイン理論の予言の実験的検証として最も実行しやすい．第 21 章でシュワルツシルト幾何学が真空アインシュタイン方程式（物質のない曲がった時空のアインシュタイン方程式）の解であることを示す．この章ではシュワルツシルト解が与えられたと仮定してその幾何学を調べる．一般相対性理論の有名な効果のいくつか ——重力赤方偏移，惑星の近日点移動，重力による光の湾曲，光の遅延 —— が球対称星の曲がった時空で現れるが，その中におけるテスト粒子と光線の軌道を予測することに専念する．次章ではこれらの予測をチェックし，アインシュタイン理論を検証する実験や観測について述べる．

9.1 シュワルツシルト幾何学

特別に適した座標系を使うと，シュワルツシルト幾何学を集約する線素は（$c \neq 1$ 単位系で）

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{9.1}$$

シュワルツシルト計量

である．この座標は**シュワルツシルト座標**と呼ばれ，計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ は**シュワルツシルト計量**と呼ばれる．以下の重要な性質をもつ：

- **時間独立**　計量は t と独立である．座標時間 t の変位の対称性に関するキリングベクトル$\boldsymbol{\xi}$が存在する．その成分は (9.1) 式の座標基底で

$$\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0) \tag{9.2}$$

である（(t, r, θ, ϕ) の順）[(8.27) 式を参照].

- **球対称**　4 次元幾何学 (9.1) の t 一定，r 一定の 2 次元面の幾何学は線素

$$d\Sigma^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{9.3}$$

に集約される．これは平坦 3 次元空間における半径 r の球の幾何学を表す [(2.15) 式を参照]．シュワルツシルト幾何学は，角度 θ, ϕ の変位について球対称性をもつ．このことは，

(9.1) 式または (9.3) 式で明らかである．計量が ϕ について独立であり，つまり z 軸について回転不変であるからだ．この対称性に関するキリングベクトルは

$$\eta^{\alpha} = (0,0,0,1) \tag{9.4}$$

である [(8.27) 式を参照]．他にも回転対称性に関するキリングベクトルがあるが，我々は必要としない．

シュワルツシルト座標 r には回転対称性から生じる簡単な幾何学的解釈ができる．それは「中心」からの距離では**なく**，むしろ，r と t を固定した 2 次元球の面積 A についての標準的な公式

$$r = (A/4\pi)^{1/2} \tag{9.5}$$

によって関係づけられている．これは (9.3) 式と (7.28) 式，(7.37) 式から得られる．

- **質量** M　もし GM/c^2r が小さいと，線素 (9.1) 中の dr^2 の係数を展開することができ

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)(cdt)^2 + \left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{9.6}$$

となる．これは厳密にニュートンポテンシャルを含む静的な弱い場の計量 (6.20) の形であり，ニュートンポテンシャル Φ は

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \tag{9.7}$$

で与えられる．これはシュワルツシルト計量 (9.1) の定数 M が曲率源の**全質量**であることを明らかにしている．

ニュートン物理学で，太陽の質量は，テスト物体（地球）の軌道周期と軌道の大きさを測定し，ケプラーの法則 [(3.24) 式を参照] を使い，これらを重力源の質量と関係付けることにより求められる．一般相対論では，静止した時空曲率源の質量はこの種の実験によって**定義される**．エネルギーのどんな形も時空曲率源になり，電磁場のエネルギーや原子核相互作用エネルギーなど，また，後に明らかになるが，大雑把な言い方をすれば時空曲率それ自身も曲率源になる．非常に大きな軌道の極限を使って**全質量**を定義するが，その質量にはこれらのエネルギーすべてが含まれている．(9.6) 式と 6.6 節の考察で示したように，軌道が大きければ大きいほど，ニュートン近似によってその性質は正確に決められる．静止物体の全質量は非常に大きな軌道に対してケプラーの法則によって定義することができ，それはニュートンポテンシャル (9.7) によって決められるので，シュワルツシルト計量 (9.1) の定数 M は全質量である．

球対称源の外側の幾何学は 1 つの数値，全質量 M によって特徴づけられ，その質量が曲率源の内側で半径方向にどのように分布しているのかにはよらない．これが，例 3.1 で考察したニュートン重力ポテンシャルのニュートンの定理を相対論版としたものである．

- **シュワルツシルト半径**　半径 $r=0$ と $r=2GM/c^2$ で計量に何か興味深いことが起きている．$r=2GM/c^2$ は**シュワルツシルト半径**と呼ばれ，シュワルツシルト幾何学の曲率を特徴づける長さのスケールである．しかし，静止星の表面は常にこの半径よりも外側にあることがわかっている．たとえば太陽のシュワルツシルト半径は $2GM_{\odot}/c^2 = 2.95\text{km}$ で

あり，太陽の表面の半径 6.96×10^5km よりもかなり小さい．表面で，シュワルツシルト幾何学は星の内側を表す別の幾何学につながる．変化しない星の外側を考える限り，半径 $r = 2GM/c^2$ と $r = 0$ について憂慮する必要はない．しかし，第 12 章で星が重力崩壊して半径 0 になり，ブラックホールの形成を考えるとき，この 2 つの半径に立ち向かわなければならなくなるだろう．

(9.1) 式では質量-長さ-時間（$\mathcal{MLT}$）単位でシュワルツシルト幾何学を表している．特殊相対論で便利な $\mathcal{ML}$ 単位でこの式はもう少し簡単になる．その単位で系は $c = 1$ で，時間と空間の次元がともに長さになる．一般相対論で便利な単位系は $G = 1$ を加え，質量を以下の換算式を使い，長さの単位で測定したものである：

$$M(\text{in cm}) = \frac{G}{c^2} M(\text{in g}) = 0.742 \times 10^{-28} \left(\frac{\text{cm}}{\text{g}}\right) M(\text{in g}) \tag{9.8}$$

この単位系で，たとえば，太陽の質量は $M_\odot = 1.47$km で地球の質量は $M_\oplus = 0.44$cm である．この $\mathcal{L}$ 単位系は**幾何学単位系**または $c = G = 1$ 単位系と呼ばれる．幾何学単位系の式を $\mathcal{MLT}$ 単位系に戻すためには，G と c を正しい位置に付け加えるだけよい．たとえば，M を GM/c^2 に，τ は $c\tau$ に，$dx^i/d\tau$ は $(1/c)(dx^i/d\tau)$ にする．付録 A に，このような変換則のリストを，単位系の一般的な短い考察とともにつけてある[1]．

幾何学単位系

幾何学単位系で，シュワルツシルト線素は

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)} \tag{9.9}$$

シュワルツシルト計量（幾何学単位系）

の形になる．計量 $g_{\alpha\beta}$ を具体的に示すと

$$g_{\alpha\beta} = \begin{array}{c} \\ t \\ r \\ \theta \\ \phi \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & r & \theta & \phi \end{array} \\ \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - 2M/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{array} \tag{9.10}$$

である．

理論的にも実験的にもシュワルツシルト幾何学は，テスト粒子と光線の軌道を通じて研究されている．太陽系で惑星や光線の軌道の観測に生じる小さな効果が一般相対論によって予言され，それが理論の重要な検証となっている．以下では，重力赤方偏移を始めとする実験的検証につながる効果の考察に専念する．

---

[1] この考察は，c の値と同じようにニュートンの重力定数の値が定義されていることを意味しているのだろうか．現時点では違う．重力質量の単位は慣性質量の単位— 標準キログラム—で定義されているからで，その重力的な性質は測定によって決められる．付録 A の考察をみよ．

9.2　重力赤方偏移

シュワルツシルト座標半径 R で静止している観測者がいて，光信号を放っているところを考えよう．発信時，静止観測者に対して信号の振動数は ω_* である．光信号は必ずしも半径方向に進む必要はないが，無限遠に到達し，そこで振動数が別の静止観測者に測定される（図 9.1 を見よ）．無限遠の観測者が受信した振動数 ω_∞ は ω_* よりも小さくなっている．これが重力赤方偏移であり，例 6.2 で $1/c^2$ の 1 次のオーダーで等価原理から求めたものである．以下で，重力赤方偏移をシュワルツシルト幾何学から正確に導出する．

どんな観測者に対しても $E = \hbar\omega$ が成り立つので，振動数の変化は放出された光子のエネルギーの変化と関係する．ニュートン物理学では時間に依存しないポテンシャル中で運動する粒子の運動エネルギーの変化は，時間変位不変から生じるエネルギー保存から容易に計算できる．このことから得られる教訓は，時間に依存しないシュワルツシルト幾何学中を運動する光子の振動数の変化を計算する効率のよい方法は，時間変位不変性によって生じる保存量を使うことである．この保存量は，光子の 4 元運動量を $\mathbf{p}$, キリングベクトルを$\boldsymbol{\xi}$(9.2) としたとき，$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}$ [(8.32) 式を参照] である．キリングベクトルは時間変位対称性に関係して現れる．どのように使うかをみてみよう．

4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm obs}$ の観測者に測定される光子のエネルギーは (7.53) 式に述べたように

$$E = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\rm obs} \tag{9.11}$$

であり，これを以下で考察する．光子のエネルギーと振動数は $E = \hbar\omega$ の関係にあるため

$$\hbar\omega = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\rm obs} \tag{9.12}$$

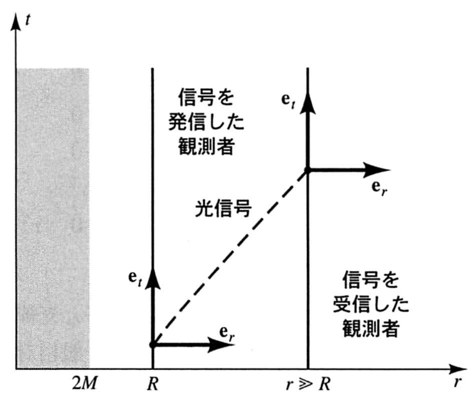


図 9.1　球対称質量の外側にいる静止観測者 2 人の世界線を表した時空図．1 人は R に留まり，もう 1 人は「無限遠」($r \gg R$) にいる．R の静止観測者の実験室で測って振動数が ω_* の光子が半径 R から放たれる．光子は破線の世界線を伝わり，無限遠の観測者に振動数 ω で観測される．各々の実験室の正規直交ベクトルを 2 つ示した．振動数 ω_∞ は ω_* よりも小さい．中心の質量のつくる重力ポテンシャルを這い上がってくるときにエネルギーを失うからだ．これが重力赤方偏移である．

が成り立ち，これは 4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm obs}$ の観測者に測定される振動数になる．静止観測者の 4 元速度の空間成分 $u^i_{\rm obs}$ は 0 である．半径 r の観測者の時間成分 $u^t_{\rm obs}(r)$ は規格化条件 [(8.25) 式を参照]

$$\mathbf{u}_{\rm obs}(r)\cdot\mathbf{u}_{\rm obs}(r) = g_{\alpha\beta}u^\alpha_{\rm obs}(r)u^\beta_{\rm obs}(r) = -1 \tag{9.13}$$

によって決まる．$u^t_{\rm obs}(r) = 0$ なので，これは

$$g_{tt}(r)[u^t_{\rm obs}(r)]^2 = -1 \tag{9.14}$$

となり，計量 (9.10) を使うと

$$u^t_{\rm obs}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \tag{9.15}$$

が得られる．したがって

$$u^\alpha_{\rm obs}(r) = [(1-2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0] = (1-2M/r)^{-1/2}\xi^\alpha \tag{9.16}$$

となる．ここで $\boldsymbol{\xi}$ はキリングベクトル (9.2) であり，シュワルツシルト計量が時間依存しないことから現れる．半径 r の静止観測者に対しては

$$\mathbf{u}_{\rm obs}(r) = (1-2M/r)^{-1/2}\boldsymbol{\xi} \tag{9.17}$$

である．

(9.17) 式を (9.12) 式に使うと，半径 R の静止観測者によって測られる光子の振動数は

$$\hbar\omega_* = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}(-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p})_R \tag{9.18}$$

となる．ここで添字 R はシュワルツシルト座標半径 $r = R$ で評価された量であることを表している．同様に，無限遠で

$$\hbar\omega_\infty = (-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p})_\infty \tag{9.19}$$

となる．しかし，(8.32) 式から $\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}$ は光子の測地線上で**保存する**．無限遠でも半径 R でも同じ値である．したがって振動数には

$$\boxed{\omega_\infty = \omega_*\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}} \tag{9.20}$$

重力赤方偏移

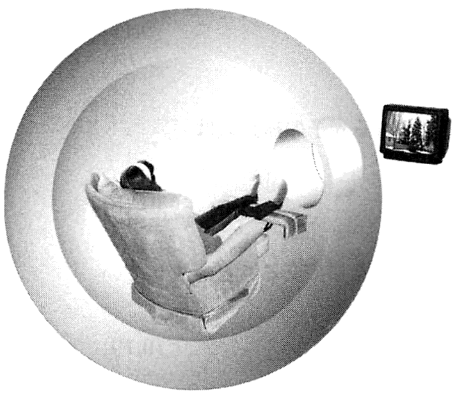
の関係が成り立つ．無限遠の振動数は R における振動数よりも $(1-2M/R)^{1/2}$ 倍だけ小さい．つまり光子は重力赤方偏移を受けたことになる．

(9.20) 式は $2M/R$ が太陽程度に小さいとき $2M/R$ のべきで展開してもよい．展開の最初の 2 項から，等価原理を使った結果 (6.14) が再導出される．

ボックス 9.1　タイムマシーン

SF の世界で，タイムマシーンは時間を過去や未来に進む．一般相対論– 空間と時間の理論–はタイムマシーンが可能で実現できるかを分析する原理を提供する．

ある観測者が他の観測者に比べ速く未来の事象に移動するタイムマシーンの例を相対論からいくつか挙げることができる．57 ページの双子のパラドックスは最も簡単な例である．平坦時空の慣性系から見ると，双子の一方は静止しているもう一人の双子から加速して離れて，光速に近い速さに達し，戻ってくる．加速した方の双子は戻ってくると，固有時が**最も長い**曲線である測地線上にいたもう一人よりも若くなっている．十分速い速度まで加速すれば，戻った双子は，静止した観測者の寿命よりもずっと先の事象に遭遇することができる．未来への移動である．どんな時空にも，未来に進むタイムマシーンがあふれており，長さの違う時間的曲線が 2 点を結んでいる．



曲がった時空には別の種類のタイムマシーンがある．質量 M, 半径 R の球殻を造り，中で住む．外側の時空はシュワルツシルトで，内側は平坦時空である（球の内側には質量がないため，ニュートン重力では力がはたらかない．このことは相対論でも成り立つ）．球殻の内部の時計は無限遠の時計よりも重力赤方偏移によって $(1-2M/R)^{1/2}$ 倍ゆっくり進んでいるだろう [(9.20) 式を参照]．たとえば，あなたのラップトップコンピュータで実行するのに 1000 年かかる計算の結果をその日のうちに知りたいとしよう．または，テレビの 1000 年分を 1 日で見たいとしよう．ラップトップとテレビを球殻の外側に置き，球殻の中に入り，そこから見ればよい．どれくらい大きな，またはどれくらい重い球殻をつくる必要があるだろうか．$(1-2M/R)^{1/2} = 1/(100 \times 365) \approx 3 \times 10^{-5}$ になるような M と R が必要になるだろう．つまり，球殻の半径 R は質量の 2 倍よりも**わずかに**大きいだろう．常識的な大きさの居間 $R \sim 10\mathrm{m}$ を必要とするなら，必要な質量は $M \approx 5\mathrm{m} \approx (1/300)M_{\odot}$ または木星の質量の 4 倍の質量が必要となるだろう．このような圧力を支えられる材質は存在しないし，球殻は圧力を下げるためにはかなり大きく，そして重くなければならない（問題 4）．

第 12 章で，本当は未来に進むタイムマシーンをつくるために球殻は必要ないことを学ぶだろう．ブラックホールの外側で $R=2M$ の近くにいることで同じ効果が得られる．しかしそうするためには，ブラックホールの引力とバランスをとるための推進力を生み出すために，エネルギーを消費しなければならない．費用がかからないようにするためにはブラックホールへ自由落下するしかない．しかし，そうすると戻ってくることができず，現在知られている最大のブラックホールでさえも未来を見る時間は特異点で潰れる前の約 3 時間でしかない．

過去に戻る旅行はどうか．観測者の世界線は時間を戻ることができない．もしそうするためにはある点で光速よりも速く運動しなければならないだろう．もし時空中に閉じた時間的曲線があれば，過去に時間を遡る方法は 1 つだがある．この性質をもった時空をでっちあげることが可能である．ある特別なローレンツ系の中で平坦時空をとり，$t=0$ 面上の点と $t=T$ 面上の点を同一視する．そうすると，時空は円筒のように t 方向に巻上がり，$\vec{x}$ 一定の閉じた時間的曲線がぐるっと回れる．しかし我々の宇宙にこのような奇妙なトポロジー的構造があるという証拠はなく，エネルギーが正ならば，我々が住んでいると信じている空間のような単純なトポロジー的構造をもつ空間中で時間的閉曲線が進化することを一般相対論は禁じている．したがって，原理的に未来にいくことは可能だけれども，少なくとも重力の古典論にしたがうかぎり，過去を再訪問することはたぶんできないだろう．

9.3 粒子軌道–近日点移動

さて，ここからシュワルツシルト幾何学中で時間的測地線にしたがうテスト粒子の軌道を調べよう．これらのテスト粒子は太陽の周りを軌道運動する惑星であってもよいし，中性子星またはブラックホールを軌道回転する降着円盤でもよい．

保存量

シュワルツシルト幾何学の測地線の研究では，エネルギーと角運動量の保存則が大いに助けとなる．これらが成り立つのは計量が時間に依存せず球対称だからだ．特に，計量は t と ϕ に依存しないので，$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}$ と $\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{u}$ が保存する [(8.32) 式を参照]．$\mathbf{u}$ は粒子の 4 元速度で，$\boldsymbol{\xi}$ と$\boldsymbol{\eta}$ は (9.2) 式と (9.4) 式である．これらの量は非常に重要なので，特別な名前をつけておく．それら[2]を $-e$ と ℓ と呼ぶ．その具体的な形は

$$\boxed{e=-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}} \tag{9.21}$$

単位質量当たりの保存エネルギー

$$\boxed{\ell=\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{u}=r^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\tau}} \tag{9.22}$$

単位質量当たりの保存角運動量

である．大きな r で定数 e は静止質量当たりのエネルギーになる．平坦空間では $E=\mu^t=m(dt/d\tau)$ だからだ [(5.41) 式を参照]．単位静止質量当たりのエネルギーはどこでもそう呼ぶことにする．保存量 ℓ を単位静止質量当たりの角運動量と呼ぶ．低速でそうなるからだ．よって，粒子軌道にはエネルギーと角運動量が保存量として存在する．

有効ポテンシャルと半径方程式

角運動量保存から，ニュートン理論の軌道がそうであるように，軌道は「面」内にあることになる．これを見るために，関心を特別な瞬間に留め，$\vec{u}$ で粒子の 4 元速度の空間成分を表すことにしよう．その瞬間に $d\phi/d\tau=0$ となるように座標を向け，粒子は $\phi=0$ にいるようにしよう．つまり $\vec{u}$ は子午「面」 $\phi=0$ にいることになる．(9.22) 式にしたがうと $\ell=0$ となり，$d\phi/d\tau$ が測地線のどこでも 0 になる．よって子午「面」$\phi=0$ にい続ける．一度こうすると，子午「面」にある粒子の軌道が赤道「面」にあるように，座標の向きを再度変え直すのは容易である．したがって以降の考察で，$\theta=\pi/2$ で $u^\theta=0$ とする．

面内の軌道

エネルギーの積分 (9.21) と角運動量の積分 (9.22) に加え，4 元速度の規格化があるため，測地線方程式とは別の積分が得られる．明らかに第三の積分は

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta=-1 \tag{9.23}$$

である．3 つの積分を使って，4 元速度のゼロでない 3 つの成分を運動の定数 e,ℓ で表すことができる．シュワルツシルト計量 (9.10) の場合に (9.23) 式を書き下し，赤道面の条件 $u^\theta=0,\theta=\pi/2$

---
[2] e を軌道の離心率と混同してはいけない．離心率は ϵ と記すことにする．

を考慮すると

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)(u^r)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(u^t)^2+r^2(u^\phi)^2=-1 \tag{9.24}$$

が得られる．$u^t=dt/d\tau$, $u^r=dr/d\tau$, $u^\phi=d\phi/d\tau$ と書き，(9.21) 式と (9.22) 式を使って $dt/d\tau$ と $d\phi/d\tau$ を消去すると (9.24) 式は

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}e^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{\ell^2}{r^2}=-1 \tag{9.25}$$

のように書き換えられる．さらに書き換えると

$$\frac{e^2-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right] \tag{9.26}$$

となる．我々はニュートン力学のエネルギー積分との対応を示すために，この形で表した．定数

$$\mathcal{E}\equiv(e^2-1)/2 \tag{9.27}$$

と有効ポテンシャル

粒子の半径方向の有効ポテンシャル

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r)\equiv\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right]=-\frac{M}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{M\ell^2}{r^3}} \tag{9.28}$$

を定義することにより，対応する式は正確に

$$\boxed{\mathcal{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+V_{\text{eff}}(r)} \tag{9.29}$$

になる．したがって，ニュートン力学の有効ポテンシャルによる軌道の分析のテクニックがシュワルツシルト幾何学の軌道にも使える．実際，有効ポテンシャル (9.28) の形は，ニュートンの中心力ポテンシャル $-M/r$ とは $-M\ell^2/r^3$ の項だけしか違わない．しかしその項は軌道に重要な影響を及ぼす．早速調べることにしよう．

非相対論的極限を考えることにより，(9.29) 式に大きな洞察が得られる．そうするためにまず c と G の因子を戻し，τ を $c\tau$ に置き換え，M を GM/c^2 に置き換える．保存量 ℓ は ℓ/c に置き換える．引き続き，ℓ は $r^2(d\phi/d\tau)$ を意味する．有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ は

$$V_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{c^2}\left(-\frac{GM}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{GM\ell^2}{c^2r^3}\right) \tag{9.30}$$

となる．無次元定数 e は単位静止質量当たりの全エネルギーである．通常のニュートンエネルギーに対応する量を予期して，E_{Newt} を

$$e\equiv\frac{mc^2+E_{\text{Newt}}}{mc^2} \tag{9.31}$$

で定義する．(9.30) 式と (9.31) 式を使うと，(9.29) 式は

$$E_{\rm Newt}\left(1+\frac{E_{\rm Newt}}{2mc^2}\right)=\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}-\frac{GML^2}{c^2mr^3} \tag{9.32}$$

となる．ここで $L=m\ell$ である．これは，右辺に $1/r^3$ に比例するポテンシャルと，左辺にエネルギーの相対論的補正を加えたニュートン重力のエネルギー積分と同じ形である．ニュートン極限へは，これらの相対論的補正項がなくなり，τ 微分が t 微分に置き換えわれば回復する．

相対論的軌道の分析に戻って，有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(r)$ の性質を考えよう．単純な性質がその定義 (9.28) からすぐ得られる:

$$V_{\rm eff}(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}-\frac{M}{r},\qquad V_{\rm eff}(2M)=-\frac{1}{2} \tag{9.33}$$

図 9.2 で説明したように，大きな r でポテンシャルはニュートン有効ポテンシャルに近くなる．これは (9.28) 式の最初の 2 つの項がニュートン理論のものと同じだからだ．しかし，r が小さくなると，一般相対論による $1/r^3$ の補正項が重要性を帯びてくる．

有効ポテンシャルの極値は $dV_{\rm eff}/dr=0$ を解くことから得られる．1 つの極小と 1 つの極大があり，その半径 $r_{\rm min}, r_{\rm max}$ は

$$r_{\substack{\rm min\\ \rm max}}=\frac{\ell^2}{2M}\left[1\pm\sqrt{1-12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\,\right] \tag{9.34}$$

である．図 9.3 は ℓ の値をかえて $V_{\rm eff}$ をプロットしたものである．$\ell/M<\sqrt{12}=3.46$ ならば，最大も最小も存在せず，すべての r で有効ポテンシャルは負になる．$\ell/M>\sqrt{12}$ のときは極大が

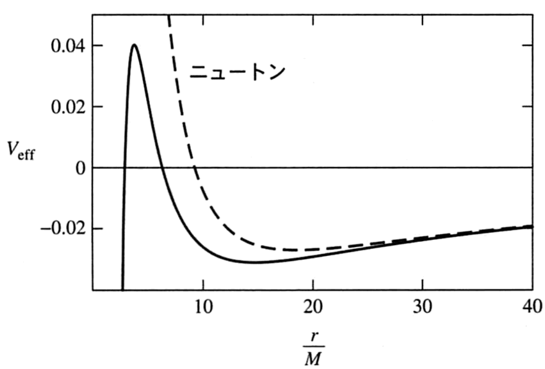


図 9.2 $\ell/M=4.3$ で比較した，半径運動の相対論的有効ポテンシャルとニュートン有効ポテンシャル．相対論的有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(r)$ は (9.28) 式で定義され，そのうちの最初の 2 つの項をニュートンポテンシャルとする．その 2 つのポテンシャルは r が大きくなると同じになるが，r が小さくなると大きく異なり，そこでは (9.28) 式の $1/r^3$ の項が重要になってくる．特にニュートン理論における遠心力は無限大のバリアになるが，相対論では有限の高さになる．太陽を回る軌道上にある地球では $\ell/M\sim10^9$ であり，その軌道上でニュートンポテンシャルと相対論的ポテンシャル差は小さいが，正確な測定をすれば検出可能である．第 10 章を見よ．

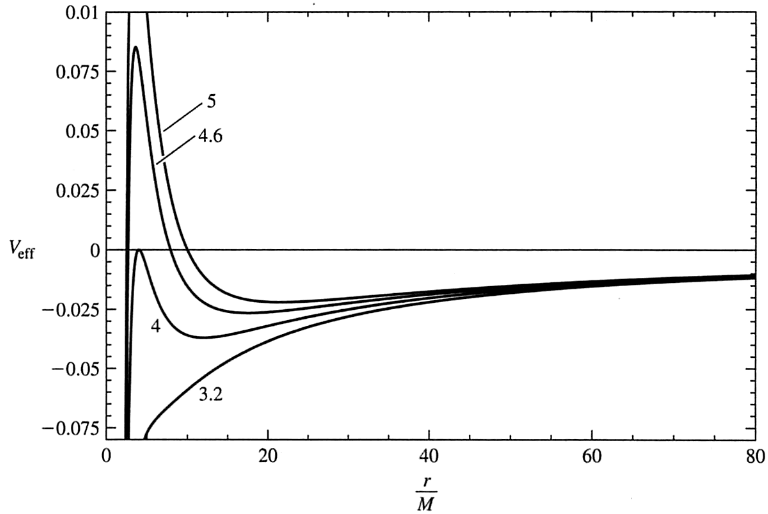


図 9.3　ℓ の値をいくつか変えて描いた半径方向の有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(r)$．ℓ/M の値が曲線につけてある．

1 つ，極小が 1 つある．$\ell/M > 4$ で最大値は $V_{\rm eff} = 0$ より上にあり，ℓ/M がそれ以下なら下になる．遠心力のバリアが存在するが，ニュートン理論では無限大の高さがあるのに対して，ここには最大値がある（図 9.2 を見よ）．

軌道の定性的な振る舞いは，ニュートンの中心力の問題と同じように，$\mathcal{E} \equiv (e^2 - 1)/2$ と (9.29) 式の有効ポテンシャルの関係に依存する．$\mathcal{E} = V_{\rm eff}(r_{\rm tp})$ となる半径 $r_{\rm tp}$ は転回点になる．ここでは半径速度が 0 になるからである．$\ell/M < \sqrt{12}$ ならば，$\mathcal{E}$ が正の値のときは転回点は存在しない．内向きの粒子はずっと原点に向かって落ち込んでいく．これはニュートン理論とは対照的であり，$\ell \neq 0$ である限り，粒子を跳ね返す正の遠心力のバリアが存在する（図 9.2 を見よ）．図 9.4 は $\ell/M > \sqrt{12}$ の 4 種類の軌道をその定性的な形とともに示している．円軌道は半径 (9.34) のとき可能である．この半径では有効ポテンシャルが最大または最小になる．最大値の軌道では $\mathcal{E}$ が少し増えると無限遠に脱出するか，$r = 0$ に落ち込むため不安定である．極小値の軌道は安定である．$\mathcal{E} < 0$ では 2 つの転回点を振動する軌道がある（惑星は太陽の時空幾何学中を非常によい近似として，この軌道上を動いている）．$\mathcal{E}$ が正の値だけれども有効ポテンシャルの最大値よりも小さい軌道は無限遠からきて，中心に引かれ，戻っていく．$\mathcal{E}$ の値が最大値よりも大きいと中心に突っ込む．以下では，今後の応用として最も重要になる軌道のいろいろな性質を計算することにする．

半径突入軌道

軌道の最も簡単な例は無限遠から半径方向への自由落下であり，このときは $\ell = 0$ である．粒子は無限遠でいろいろな運動エネルギーで出発することができる．この場合運動エネルギーは $\mathcal{E}$ に対応するが，静止から出発することが最も簡単な場合になる．(9.21) 式から，無限遠で $dt/d\tau = 1$，$e = 1$ または同じであるが，(9.27) 式から $\mathcal{E} = 0$ である．

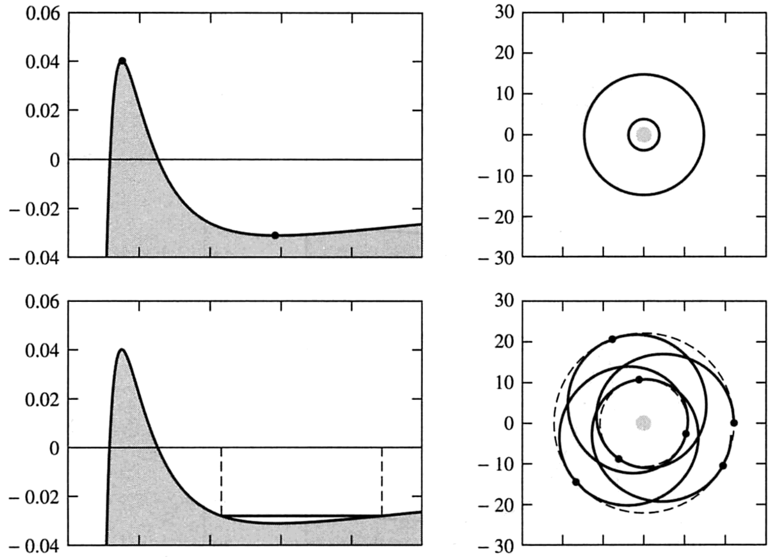


図 9.4 シュワルツシルト幾何学の 4 種類の軌道．このページと次のページの左右の組合せは $\ell/M = 4.3$ に対して $\mathcal{E}$ の 4 つの値に対応する軌道を表している．ポテンシャルと $\mathcal{E}$ の関係が左に示されている．このプロットの横軸は r/M であり，縦軸は $V_{\rm eff}(r)$ である．水平線は $\mathcal{E}$ の値である．縦の破線は転回点を表す．ドットは円軌道が可能な位置を表している．対応する軌道の形が右図に示されており，シュワルツシルト座標 r, ϕ が平面の極座標としてプロットされている．各プロットの中心付近の影のついた領域は $r < 2M$ に対応する．このページの上の図は 2 つの円軌道を表し，外の方が安定で，内側が不安定である．次の図は境界内を動く軌道であり，そこで粒子は 2 つのドットで示された転回点の間を移動する．最も近い点（近日点）と遠い点（遠日点）の位置をドットで表した．近日点の移動はこの相対論的軌道では大きい．

$e = 1$, $\ell = 0$ と (9.26) 式から

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{M}{r} \tag{9.35}$$

となり，これから 4 元速度の半径成分 $dr/d\tau$ が決まる．これと (9.21) 式の時間成分 $dt/d\tau$ から，4 元速度は

$$u^\alpha = ((1 - 2M/r)^{-1}, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0) \tag{9.36}$$

である．(9.35) 式を

$$r^{1/2}dr = -(2M)^{1/2}d\tau \tag{9.37}$$

と書き換えると，両辺は積分することができ r を τ の関数としても表すことができる．右辺の負の符号は測地線に沿って落ちていくことを表し，式が正しいことがわかる．積分の結果

$$r(\tau) = (3/2)^{2/3}(2M)^{1/3}(\tau_* - \tau)^{2/3} \tag{9.38}$$

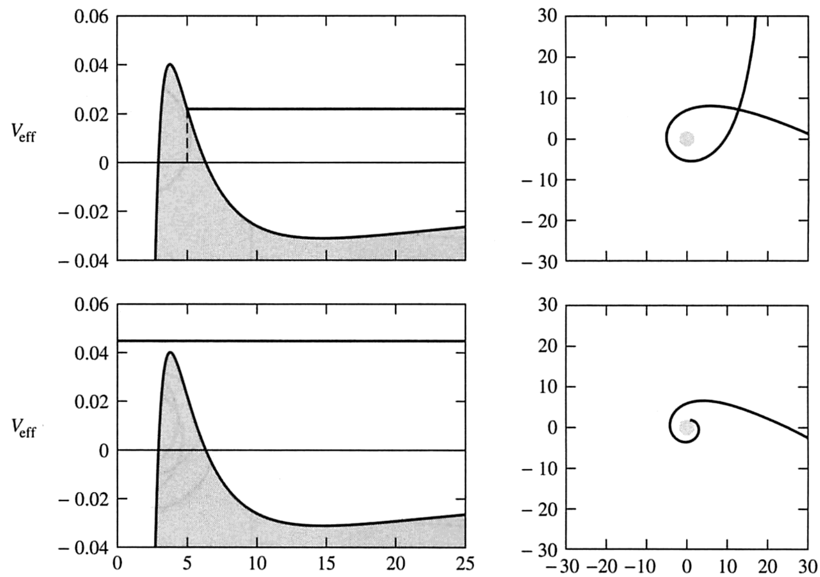


図 9.4　このページの一番上の図は散乱軌道を表している．粒子は無限遠から来て，中心の周りを通り，再び無限遠に戻る．この高度に相対論的な軌道はニュートンの双曲線とはかなり違っている．最後の組は突入軌道であり，粒子は無限遠からきて，中心質量の周りをぐるっと回り，中心に飛び込む．この種の軌道は粒子が $1/r$ の中心ポテンシャル中を動くニュートン力学では不可能である．

である．ここで τ_* は任意の積分定数であるが，$r=0$ に達したときの固有時で決める．シュワルツシルト時間を求めるには，まず r の関数として t を計算し，それから (9.38) 式を使って τ の関数として表す．

(9.21) 式に $e=1$ を代入し，(9.35) 式から微分 dt/dr を計算すると

$$\frac{dt}{dr} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{9.39}$$

が得られ，積分すると

$$t = t_* + 2M\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + \log\left|\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}\right|\right] \tag{9.40}$$

が得られる．t_* は積分定数である．したがって無限遠から静止して自由落下する観測者の族が存在する．ある特別な半径を通過する時刻によって番号をつけるか，ある特別な時刻にどの半径にいるのかで番号をつけることで t_* を指定できる．(9.40) 式に (9.38) 式を代入することによって $t=t(\tau)$ の関係式を求めることができる．

半径突入軌道のいくつかの特徴が (9.38) 式と (9.40) 式からわかる．(9.40) 式から，$t\to-\infty$ になると，$r\to\infty$ になり，粒子は無限遠から下に落下することがわかる．たとえ (9.40) 式から座標

時間 t が無限大になったとしても，(9.38) 式をみると，軌道上のどんな r の値からでも有限の固有時で $r = 2M$ にたどり着けることがわかる．このことは，シュワルツシルト座標が $r = 2M$ で破綻をきたしていることの 1 つの現れである．実際には有限の距離に無限個の座標点を割り当てているためである．このことについて第 12 章でより詳しく学ぶ．

例 9.1. 脱出速度. シュワルツシルト座標半径 R の位置に留まり続ける観測者が，自分の慣性系で半径方向に向けて速度 V で発射物を発射する．発射物が無限遠にたどり着いたとき，速度 0 になっているためには， V はどんな大きさでなければならないか．この速度が脱出速度 $V_{\rm escape}$ である．

発射物には力がはたらかないので，半径方向の測地線にしたがう．無限遠で静止する発射物は $e = 1$ である．e は保存するので，観測者は最小値 $e = 1$ で発射物を打ち上げなければならない．そのためには，4 元速度 $\mathbf{u}$ は (9.36) 式と同じであるが，u^r の符号が逆でなければならない．観測者に測定されるエネルギー E は (5.87) 式から $-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\rm obs}$ である．ここで $\mathbf{u}_{\rm obs}$ は静止観測者の 4 元速度であり，$\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ は m が静止質量ならば発射物の 4 元運動量である．半径 R の静止観測者の 4 元速度は (9.16) 式で与えられる．したがって，脱出するために発射時に必要とするエネルギーは

$$
\begin{aligned}
E &= -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\rm obs} = -m\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_{\rm obs} = -mg_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta_{\rm obs} \\
&= -mg_{tt}u^t u^t_{\rm obs} = m\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{9.41}
$$

である．4 番目の等号は，静止観測者の 4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm obs}$ が t 成分しかないこと，シュワルツシルト計量が対角であることを使った．5 番目では計量 (9.10) の値と (9.36) 式と (9.16) 式の 4 元速度を代入した．観測者の系で，粒子のエネルギー E と速さ V は $E = m/\sqrt{1-V^2}$ の関係がある [(5.46) 式を参照]．したがって脱出速度は

$$
V_{\rm escape} = \left(\frac{2M}{R}\right)^{1/2} \tag{9.42}
$$

である．これは偶然にもニュートン理論と同じ公式である．R が $2M$ に近づくと，脱出に必要な速度は光速に近づかなければならない．

安定円軌道

安定円軌道は (9.34) 式の有効ポテンシャルが極小となる半径 $r = r_{\rm min}$ にある．ℓ/M が小さくなると，この半径も小さくなるが，安定円軌道はいくらでも小さくなれるわけではない．(9.34) 式からシュワルツシルト幾何学で最も内側の安定円軌道（innermost stable circular orbit，宇宙物理学では ISCO と呼ばれる）は $\ell/M = \sqrt{12}$ のとき，半径

$$
\boxed{r_{\rm ISCO} = 6M} \tag{9.43}
$$

最も内側の安定円軌道

にある．この事実は X 線源の構造を論じるときに重要であり，第 11 章でみる．

円軌道上の粒子の角速度は軌道上の角度位置が変化する時間的割合のことをいう．無限遠では t と時計の固有時が一致することから，シュワルツシルト座標時間 t で表した Ω は無限遠の静止時計で測った角度の時間変化になる．どんな赤道面軌道でも

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\ell}{e}\right) \tag{9.44}$$

となる．最後の等号は (9.21) 式と (9.22) 式を使った．半径 r の円軌道の ℓ と e は 2 つの要請によって決められる．第一に，ポテンシャルはその半径で極小値をとる．第二に，$\mathcal{E}$ の値は有効ポテンシャルの極小値と等しい．(9.26) 式または (9.29) 式から $e^2 = (1 - 2M/r)(1 + \ell^2/r^2)$ である．これらの 2 つの要請を ℓ/e について解くと

$$\frac{\ell}{e} = (Mr)^{1/2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad \text{(円軌道)} \tag{9.45}$$

が得られる．これを (9.44) 式に代入すると

安定円軌道の角速度

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{M}{r^3} \qquad \text{(円軌道)}} \tag{9.46}$$

が得られる．これは非相対論的ケプラー則と同じ形をしている．シュワルツシルト座標時間の周期は $2\pi/\Omega$ であり，(9.46) 式は，周期の 2 乗が軌道半径の 3 乗に比例することを表してる．相対論と非相対論が一致したのは，角速度を測定するためにシュワルツシルト座標時間，軌道の位置を測定するためにシュワルツシルト半径を選んだことによる偶然だ．たとえば，固有時に対する角度変化はもっと複雑な公式になる（問題 9)．

円軌道における粒子の 4 元速度の成分は，(9.46) 式の角速度 Ω を使うと

$$u^\alpha = u^t(1, 0, 0, \Omega) \tag{9.47}$$

となる．成分 u^t は静止観測者の (9.15) 式と同じ方法で規格化条件 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ によって決まる．しかし，この場合，角速度からの寄与があり，同じ計算から

$$u^t = \left(1 - \frac{2M}{r} - r^2\Omega^2\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} \qquad \text{(円軌道)} \tag{9.48}$$

を得る．

束縛軌道の形

軌道の形を見つけることは，r を ϕ の関数または同じことだが，ϕ を r の関数として求めることである．(9.29) 式を $dr/d\tau$ について解き，(9.22) 式を $\theta = \pi/2$ として $d\phi/d\tau$ について解き，$d\phi/d\tau$ を $dr/d\tau$ で割ると

$$\frac{d\phi}{dr} = -\pm\frac{\ell}{r^2}\frac{1}{[2(\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r))]^{1/2}} = \pm\frac{\ell}{r^2}\left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2} \tag{9.49}$$

が得られる．この符号は，r が増えるときに粒子が運動する ϕ の方向に対応する．関数 $\phi(r)$ は右辺を積分することですぐに求められる．結果は楕円関数で表されるが，これは馴染み深いものではなく理解しにくい．特に重要な性質は軌道が閉じるかどうかである．我々が 1 **軌道**に言及するとき，内側の転回点（または同じだが，外側の転回点）からもう 1 度転回点を通る道のりのこととする．この道のりで掃かれる角度の大きさ $\Delta\phi$ が 2π であるとき，軌道は**閉じている**と言われる．2π でなければ，内側の転回点は**歳差している**と言われ，軌道当たりの歳差量は図 9.6 に説明したように

$$\delta\phi_{\text{prec}} = \Delta\phi - 2\pi \tag{9.50}$$

である．

2 度内側の転回点を通り過ぎるときに，掃かれる角度 $\Delta\phi$ は転回点 r_1 と r_2 の間に掃かれる角度のちょうど 2 倍である．よって

$$\Delta\phi = 2\ell \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2} \tag{9.51}$$

である．転回点 r_1 と r_2 は軌道上で $dr/d\tau$ が 0 になる場所であり，(9.26) 式から (9.51) 式の分母が 0 になるところである．これらのことから，$\Delta\phi$ を求めるためには，分母が 0 になる 2 つの半径の間で (9.51) 式の積分を実行するだけでよい．図 9.5 は数値計算によるプロットである．

太陽系に応用するには，$\Delta\phi$ をニュートン近似の $1/c^2$ で次のオーダーまで評価する必要がある．それを行うため，(9.32) 式にたどり着くまでに行った考察で述べたように，まず，G と c^2 の因子を (9.51) 式に戻し，括弧を展開すると

$$\Delta\phi = 2\ell \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} \left[c^2(e^2 - 1) + \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{2MG\ell^2}{c^2 r^3}\right]^{-1/2} \tag{9.52}$$

になる．括弧の中の定数項は c^2 のオーダーではなく，1 のオーダーである．なぜなら (9.31) 式を $1/c^2$ で展開すると

$$e^2 = 1 + \frac{2E_{\text{Newt}}}{mc^2} + \cdots \tag{9.53}$$

となるからである．(9.30) 式で見たように，括弧の中の最初の 3 つの項は，ニュートンエネルギー，重力ポテンシャル，遠心ポテンシャルを表す．このうちの最後の項は相対論的補正を表しており，これはニュートンポテンシャルに $1/r^3$ 次の小さい付加項があるかのように軌道に影響を及ぼす．

ニュートン近似では (9.52) 式の分母の最後の項は無視し，正確に $\Delta\phi = 2\pi$ となるのだが，そのことを確かめるのは難しくない．括弧の最後の項を無視し，新しい変数 $u = 1/r$ を導入すると，(9.52) 式の積分は

$$\Delta\phi = 2\int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{[(u_1 - u)(u - u_2)]^{1/2}} \tag{9.54}$$

の形で書かれる．ここで $u_1 = 1/r_1$, $u_2 = 1/r_2$ $(u_1 > u_2)$ は (9.52) 式の分母を 0 にした 2 次方程式の解である．この積分は容易に積分表で調べられ u_1 と u_2 のすべての値で $\Delta\phi = 2\pi$ になる．

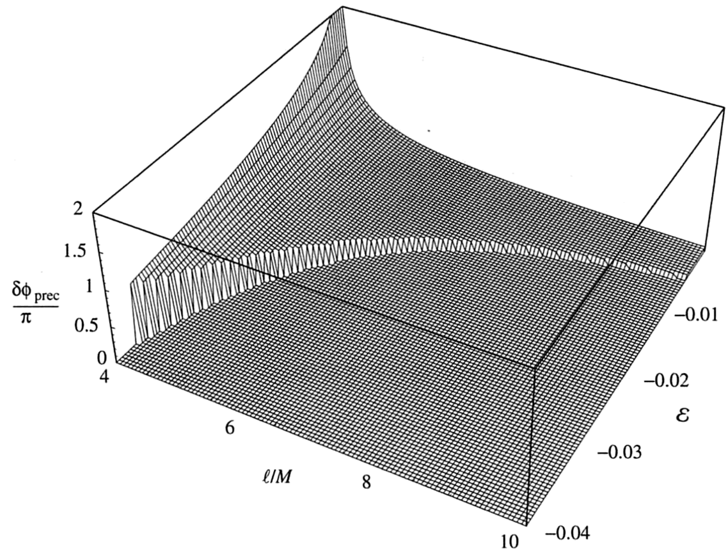


図 9.5　シュワルツシルト幾何学中での近日点の歳差 $\delta\phi_{\rm prec}$．束縛軌道はパラメータ $\mathcal{E}=(e^2-1)/2$ と ℓ によって特徴づけられている．(9.50) 式と積分 (9.51) によって定義される $\delta\phi_{\rm prec}$ のプロットである．前景の平坦領域には束縛軌道はなく，そこでは $\delta\phi_{\rm prec}$ が 0 としてプロットされている．平坦領域との境界は ℓ-$\mathcal{E}$ 曲線における円軌道にあたる．ℓ が大きくなると，星から離れる軌道になり，相対論的効果が小さい．[ℓ と円軌道の半径の関係については，(9.45) 式を見よ．] これは (9.57) 式がよい近似とみなせる極限であり，太陽系の惑星に対して重要な場合である．

積分 (9.52) を展開して，ニュートンの結果に対して 1 次の相対論的補正を求めるのは少しトリックが必要だ．問題 15 は 1 つの方法である．問題 15 を解くことにより，1 軌道分で

$$\delta\phi_{\rm prec}=6\pi\left(\frac{GM}{c\ell}\right)^2 \qquad (1/c^2 \text{ の 1 次}) \tag{9.55}$$

が求められる．この精度までで，ニュートン軌道を使って，通常のパラメータ（離心率 ϵ, 長軸半径 a）で ℓ を評価することができる．中級の力学の教科書にニュートン力学では

$$\ell^2=\left(r^2\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\approx\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right)^2=GMa\left(1-\epsilon^2\right) \tag{9.56}$$

となっていることを思い出せ．

したがって

転回点の歳差

$$\boxed{\delta\phi_{\rm prec}=\frac{6\pi G}{c^2}\frac{M}{a(1-\epsilon^2)}} \qquad \begin{pmatrix}\text{1 軌道当たりの}\\ \text{小さい } GM/c^2a\end{pmatrix} \tag{9.57}$$

となる．これはケプラー楕円軌道の内側の転回点における 1 周期当たりの相対論的歳差である．太

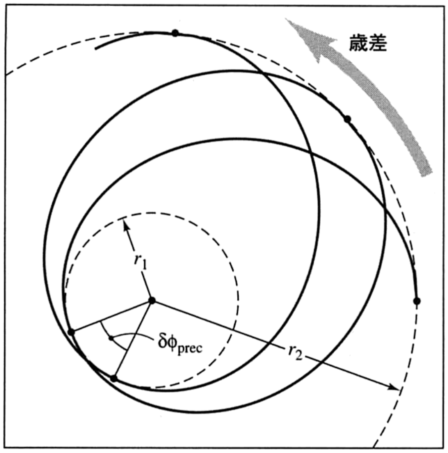


図 9.6 球対称星の外側の束縛軌道の形．これは，束縛軌道の軌道面の図であり，半径方向が図 9.4 の 2 番目のプロットで説明した種類に属する軌道である．惑星は最小半径 r_1 から最大半径 r_2 に移動し，再び同じ最小半径に戻ってくる．しかし，ニュートン重力理論にしたがうケプラーの楕円軌道と違い，軌道は閉じない．最も近づくときの角度位置は，戻ってくるたびに少しずつずれ，太陽の周りにおける惑星の近日点移動と呼ばれる．図は時計の 3 時の位置から出発したテスト質量の 2 軌道分を示している．最も近づく内側の転回半径の 2 点をドットで示した．それらの間の角度が 1 軌道当たりの近日点移動である．

陽に適用すると，内側の転回点は近日点と呼ばれ，これは惑星の近日点の歳差運動である[3]．最も大きな効果は最も小さい a で起きる．つまり太陽に近い惑星で起きる．水星では歳差の予測値が 1 世紀当たり約 43 秒であり，これは小さい数値であるが，次章でみるように，精密な測定で検出できる．

9.4 光線軌道—光の曲がりと時間の遅れ

シュワルツシルト幾何学の光線軌道の計算は粒子の軌道の場合と平行に行えるが，重要な差がある．5.5 節と 8.3 節で考察したように，光線の世界線は座標 x^α をアフィンパラメータ λ の族の 1 つの関数として与えることにより記述できる．ヌルベクトル $u^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$ は世界線の接ベクトルである．シュワルツシルト計量は t と ϕ と独立なので

$$e \equiv -\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \tag{9.58}$$

$$\ell \equiv \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{u} = r^2\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{d\lambda} \tag{9.59}$$

は光線軌道に沿って保存する．これらは粒子の場合の (9.21) 式と (9.22) 式に対応する．実際，λ の規格化がヌル測地線上で運動する光子の $\mathbf{u}$ が運動量 $\mathbf{p}$ と一致するように選ばれると，e と ℓ は

[3] 連星系では内側の転回点は近星点と呼ばれる．

無限遠での光子のエネルギーと角運動量になる．3 番目の積分は接ベクトルがヌルであることから得られる [(8.40) 式を参照]：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{9.60}$$

この式の右辺が (9.23) 式では -1 であったのが 0 になっているところが粒子と光線の場合における本当の唯一の差である．

光線の半径方向についてのエネルギー積分は (9.23) 式から (9.29) 式に進むステップと平行して導出できる．赤道面 $\theta = \pi/2$ の光線軌道について，(9.60) 式を書き下すと

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \tag{9.61}$$

となる．(9.58) 式と (9.59) 式を使って， それぞれ $dt/d\lambda$ と $d\phi/d\lambda$ を消去すると

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} = 0 \tag{9.62}$$

となる．$(1-2M/r)/\ell^2$ をかけると，これは

$$\boxed{\frac{1}{b^2} = \frac{1}{\ell^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{\text{eff}}(r)} \tag{9.63}$$

の形にすることができる．ここで

$$b^2 \equiv \ell^2/e^2 \tag{9.64}$$

および

光子軌道の有効ポテンシャル

$$\boxed{W_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)} \tag{9.65}$$

である．

(9.63) 式は半径方向のエネルギー積分の形をしていて，$W_{\text{eff}}(r)$ は有効ポテンシャルの役割を果たし，b^{-2} はエネルギーの役割を果たしている．この関係は，(9.29) 式が粒子の軌道を分析するのに使われていたのと同じように，光線の軌道を分析するのに使われる．しかしながら，粒子の場合は e と ℓ が違えば軌道も違っていたが，光線軌道の物理的な性質は比 ℓ/e にのみに依存する．これは，アフィンパラメータ λ を規格化する自由度があるためである．もし λ を K 倍しても，(9.60) 式と測地線方程式 (8.42) が満たされるので，それもよいアフィンパラメータとなり，アフィンパラメータを変えても物理的な予測を変えることはできない．しかし e と ℓ はそれぞれ K で割られる．したがって，比 ℓ/e にのみ物理的な意義があり，これが光線軌道の性質を決める．軌道の形のような，光線の場合，軌道の物理的な計算は，自動的に比 ℓ/e にのみ依存する結果になる．もしそうならなければ，計算は間違っていることになるのだ．

ℓ の符号は，光線がどっち向きに中心を回るかを表している．$b \equiv |\ell/e|$ を定義する．これに軌道の形が依存するからだ．b が何であるかを知るために，無限遠に到達する軌道を考えよう．無限遠

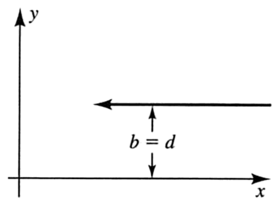


図 9.7　重力源からかなり離れた内向きの光線軌道の一部を，(9.66) 式で定義される直交座標を使って示した．光線が球対称の中心を通る x 軸から距離 d のところを速さ 1 で直線を内向きに運動している．この距離は**衝突パラメータ**であり，本文で説明したように $b \equiv |\ell/e|$ である．

で空間は平坦になり，直交座標を導入して通常のシュワルツシルト極座標に関係づけることができる．たとえば，赤道面で

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \tag{9.66}$$

である．図 9.7 に示したように，x 軸と距離 d 離れて平行に運動している光線を考えよう．曲率の発生源から離れると，光線は直線上を運動する．$r \gg 2M$ で，b は

$$b \equiv \left|\frac{\ell}{e}\right| \approx \frac{r^2 d\phi/d\lambda}{dt/d\lambda} = r^2\frac{d\phi}{dt} \tag{9.67}$$

である．大きな r で $\phi \approx d/r$ および $dr/dt \approx -1$ となり，

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{r^2} \tag{9.68}$$

したがって

$$b = d \tag{9.69}$$

となる．b は無限遠にたどり着く光線の**衝突パラメータ**であり，正であると定義されている．(9.67) 式から，幾何学的単位で b の次元は長さである．衝突パラメータとしてふさわしくなるように，どんな単位系でも長さの次元を持つように定義することにしよう．したがって，ℓ が単位質量当たりの角運動量の単位をもっていれば，$c \neq 1$ 単位系では，$b \equiv |\ell/(ce)|$ となる．

図 9.8 の左図は，E_{eff} の形を表している．大きな r で 0 になり，$r = 3M$ で最大になる．最大の高さは

$$W_{\text{eff}}(3M) = \frac{1}{27M^2} \qquad (W_{\text{eff}} \text{ の最大値}) \tag{9.70}$$

となる．半径 $r = 3M$ の光線の円軌道は $b^2 = 27M^2$ ならば最大値のところで可能である．しかしながら，これらの円軌道は不安定で，b が少しでも変化すれば，軌道は最大値から遠く離れる．光線円軌道は太陽の周りでは不可能である．太陽の半径は $3M_{\odot} \approx 4.5\text{km}$ よりもかなり大きいからである．しかし第 12 章でみるが，ブラックホールの外側には光線円軌道ができる．

光線軌道に見られるその他の定性的な特徴は，図 9.8 に示したように $1/b^2$ が W_{eff} の最高点よりも大きいか小さいかによる．まず，無限遠から始まる軌道を考えよう．$1/b^2 < (27M^2)$ ならば，図 9.8 の例の 2 つ目の場合のように，軌道は転回点をもち，再び無限遠に脱出する．太陽の周りで

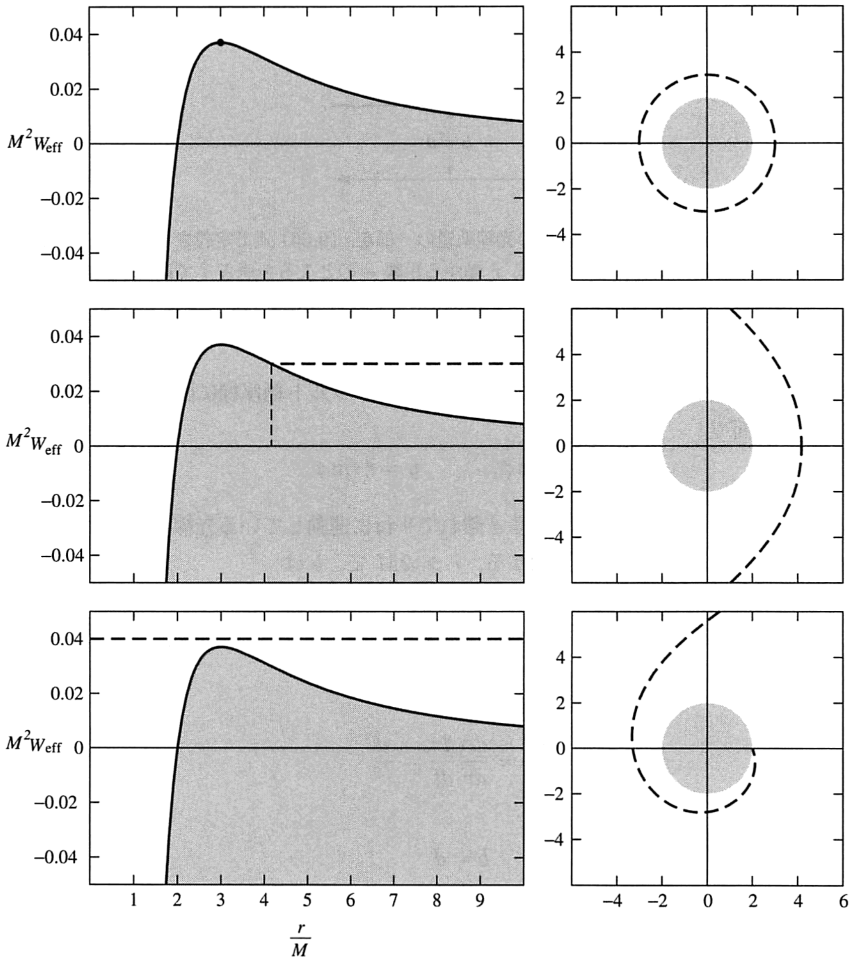


図 9.8　シュワルツシルト幾何学における 3 種類の光線軌道．図は，3 つの b の値に対応する軌道を示している．ポテンシャルと，$1/b^2$ との関係が左にある．横軸は r/M であり，縦軸は $W_{\rm eff}(r)$ である．太い破線は $1/b^2$ の値である．軌道の形は右にある．上から下に，円軌道，散乱軌道，突入軌道である．

曲がる星の光は散乱軌道の 1 つにしたがい，これらすぐ述べるように，曲がりの量を測定することは一般相対論の重要な検証となる．$1/b^2 > 1/(27M^2)$ ならば，光線は図 9.8 の一番下の左右の図に示したように，光線はすべて原点に落ち込み，捕えられる．

同じような考え方が，図 9.9 に示したように，$r = 2M$ と $r = 3M$ の間の小さい半径で始まる軌道にも成り立つ．もし $1/b^2 > 1/(27M^2)$ なら，光線は脱出する．もし $1/b^2 < 1/(27M^2)$ なら，転回点が存在し，光線は重力中心に落ち込む．$b^2 = \ell^2/e^2$ なので，これらの基準によると，光線が十分小さな角運動量で始まれば，つまり，十分半径方向に近い方向を向いていれば，脱出できるだ

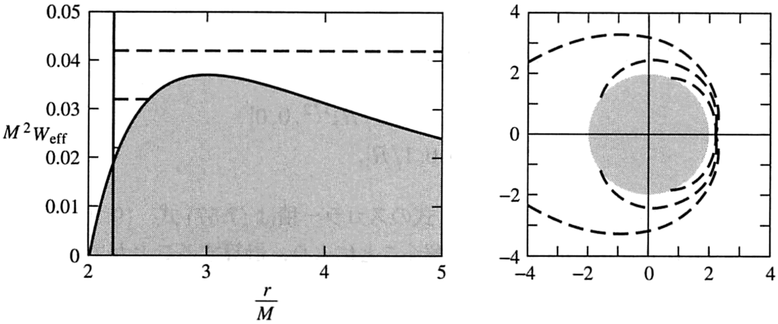


図 9.9 $r = 2M$ と $r = 3M$ の間で放たれた光線．半径 $r = R = 2.2M$ で静止している観測者が外側のいろいろな方向（いろいろな b^2 の値）に光線を放つ．この図は，3 つの場合 $(M/b)^2 = 0.022,\ 0.032,\ 0.042$ に何が起きるかを表している．プロットがわかりやすくなるように数値を選んだ．左図は有効ポテンシャル $W_{\rm eff}(r)$ を詳しく表しており，縦の線は $r = 2.2M$ で，水平線は b^{-2} いろんな値である．右図は (9.66) 式で定義される直交座標 (x, y) によって張られる赤道面であり，b^{-2} の値で x 軸の上下の方向に放たれた光線の軌道を示した．$b \equiv |\ell/e| = 0$ または b^{-2} が無限大になる半径方向の光線は脱出できる（図にない）．$1/(27M^2) = 0.037/M^2$ のバリアの最大値よりも大きな b^{-2} の光線は半径方向に対して小さい角度をなしているが，これも，図に示した $(M/b)^2 = 0.042$ の値のものと同様に脱出する．バリアの高さよりも低い b^{-2} の値の光線は脱出できない．少し外側に進んでから，半径 $r = 2M$ を通過して落下していく．これは $(M/b)^2 = 0.022,\ 0.032$ の値のときと同じようになる．半径方向に対して，これよりも小さい角度で放たれると脱出でき，大きい角度では脱出できないような臨界角度 $\psi_{\rm crit}$ がある．その値は (9.74) 式にある．$R \to 2M$ になると，脱出光線に対する開口角は 0 になり，実質的に光は脱出できなくなる．

ろう．そうなっていなければ，引力源に戻され落ち込むだろう．状況を図 9.9 に示し，例 9.2 で定量的に考察する．

例 9.2. どれだけの光が無限遠に脱出できるか． 半径 $R < 3M$ の静止観測者が光線を赤道面 $\theta = \pi/2$ に半径方向から角度 ψ をなすいろいろな方向に送る．$\psi = 0$ の半径方向の光線は $b = 0$ であり脱出できる．図 9.9 に示したように，これを越えれば中心に落ち込んでしまうという臨界角 $\psi_{\rm crit}$ はどうなるだろうか．その答えは，b と ψ の関係に依存するが，これは観測者の実験室の直交基底 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ における光線の初期速度を分析することで求められる．ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ は観測者の時間的 4 元速度であり，t の方向を向いている．3 つの空間的基底ベクトルが観測者の位置で直交座標軸の方向を向くように選ぶのがもっとも簡単である．これらを $\mathbf{e}_{\hat{r}},\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}},\ \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ で表わす．この正規直交基底において，光線の方向と半径方向の間の角度は

$$\tan\psi = \frac{u^{\hat{\phi}}}{u^{\hat{r}}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\phi}}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{\hat{r}}} \tag{9.71}$$

である．ここで正規直交基底成分と基底ベクトルとの内積の関係 (5.82) を使った．(9.71) 式の内積を計算するために，基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ と $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ の座標 $\mathbf{u}$ の座標基底成分は赤道面内で (9.59) 式と

(9.63) 式を $u^r = dr/d\lambda$ と $u^\phi = d\phi/d\lambda$ について解くことで得られるが，それとともに基底成分も必要である．基底ベクトルの成分は例 7.9 にしたがって求められ，それらは

$$(\mathbf{e}_{\hat{r}})^\alpha = [0, (1-2M/R)^{1/2}, 0, 0] \tag{9.72a}$$
$$(\mathbf{e}_{\hat{\phi}})^\alpha = [0, 0, 0, 1/R], \tag{9.72b}$$

ここで成分は (t, r, θ, ϕ) の順に並べた．(9.71) 式のスカラー積は (7.57) 式，(9.10) 式，(9.60) 式，(9.72) 式を使い，(9.63) 式を $dr/d\lambda$ について解くことにより，計算することができ，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = g_{\phi\phi}(\mathbf{e}_{\hat{\phi}})^\phi u^\phi = \frac{\ell}{R} \tag{9.73a}$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{\hat{r}} = g_{rr}(\mathbf{e}_{\hat{r}})^r u^r = \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \ell \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right]^{1/2} \tag{9.73b}$$

となる．(9.71) 式にしたがってこれらの比から $\tan\psi$ が求まる．これ以下なら光線が無限遠に脱出できる臨界開口角 ψ_{crit} は $b^2 = 27M^2$ である：

$$\tan\psi_{\mathrm{crit}} = \frac{1}{R}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{27M^2} - \frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right]^{-1/2} \tag{9.74}$$

($2M < R < 3M$ を思い出せ)

$R = 3M$ で大括弧の中は 0 になる．有効ポテンシャルの最大値 $1/(27M^2)$ であるからで，そこでは $\psi_{\mathrm{crit}} = \pi/2$ となる．この半径で円軌道が存在していることからこれは期待されることであろう．円軌道する光線は，無限遠に脱出する軌道と中心に落ち込む軌道のちょうど境界線上にある．R が $3M$ より小さくなると，臨界角度はどんどん小さくなり，ついには，$R = 2M$ で 0 になる．この点では，厳密に半径方向の光線を除き，光は出られない．外部から見ると，半径 R で静止している観測者がもつフラッシュライトがすべての方向に放たれていると，R が $2M$ に近づくにつれて，ライトは，どんどん暗くなっていく．ここでは第 12 章で考察されるブラックホール現象を先取りして論じた．

光の湾曲

無限遠から大きな衝突パラメータで進んでくる光線の議論から，すべての物体はいくらか光の軌道を曲げられることが明らかになっただろう．この効果は重要である．太陽による光の湾曲が一般相対論の最も重要な検証の 1 つであり，銀河による光の曲がりが次章で考察する重力レンズの背後にある機構だからだ．興味のある角度は曲がり角 $\delta\phi_{\mathrm{def}}$ であり，図 9.10 で定義した．この角度は光線軌道の形の特性である．光線軌道の形は粒子の軌道の形と同じ方法で計算できる．$d\phi/d\lambda$ に対して (9.59) 式を解き，$dr/d\lambda$ について (9.63) 式を解き，$d\phi/d\lambda$ を $dr/d\lambda$ で割り，(9.64) 式と (9.65) 式を使ってまとめると

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - W_{\mathrm{eff}}(r)\right]^{-1/2} \tag{9.75}$$

が得られる．符号は軌道の方向を表し，積分すると軌道の形がわかる．特に，光線が無限遠からやってきて再び戻るとき掃かれる全角度の大きさ $\Delta\phi$ は転回点 $r = r_1$ から無限遠へいくときに掃かれる角度の 2 倍である．よって

$$\Delta\phi = 2\int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{-1/2} \tag{9.76}$$

である．転回点 r_1 は $1/b^2 = W_{\text{eff}}(r_1)$ となる半径であり，つまり上式の大括弧が 0 になる半径である．新しい変数 w を

$$r = (b/w) \tag{9.77}$$

によって定義すると $\Delta\phi$ の式は

$$\Delta\phi = 2\int_0^{w_1} dw\left[1 - w^2\left(1 - \frac{2M}{b}w\right)\right]^{-1/2} \tag{9.78}$$

になる．ここで w_1 は大括弧が 0 になる w の値である．1 回の通過で掃かれる角度 $\Delta\phi$ は M/b だけに依存する．この比が大きな値のときの振る舞いを図 9.11 に示した．

太陽による光の湾曲で，最も小さい b の値は太陽の半径 $R_\odot = 6.96 \times 10^5$km であり，これに対して $M_\odot = 1.47$km である．$2M/b$ の値は $\sim 10^{-6}$ である．積分 (9.78) は $2M/b$ のべきで展開され，このような小さい値ならば湾曲の解析的な解を求めるのに十分である．積分を展開するには (9.52) 式の展開に必要とされたものと似たトリックが必要だが，代数計算はそれほどややこしくないので，どのようにしたらよいのかを数段階だけで示せる．まず，(9.78) 式を

$$\Delta\phi = 2\int_0^{w_1} dw\left(1 - \frac{2M}{b}w\right)^{-1/2}\left[\left(1 - \frac{2M}{b}w\right)^{-1} - w^2\right]^{-1/2} \tag{9.79}$$

の形に書き直す．次に，$1 - (2M/b)w$ の逆数の部分を $2M/b$ のべきで展開し，1 次の項だけ残す．その結果

$$\Delta\phi = 2\int_0^{w_1} dw \frac{1 + (M/b)w}{[1 + (2M/b)w - w^2]^{1/2}} \tag{9.80}$$

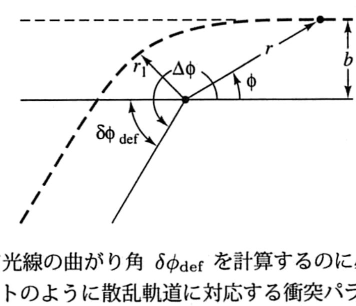


図 9.10 球対称星によって光線の曲がり角 $\delta\phi_{\text{def}}$ を計算するのに必要な量．この略図で，光線は図 9.8 の 2 回目のプロットのように散乱軌道に対応する衝突パラメータ b で直角に入射する．転回点 $r = r_1$ に来るまで，重力中心に近づき，その後，無限遠に進み，角度 $\delta\phi_{\text{def}}$ をなす．この曲がり角は軌道で掃かれる全角度 $\Delta\phi$ であり，π よりも小さい．（要確認！）

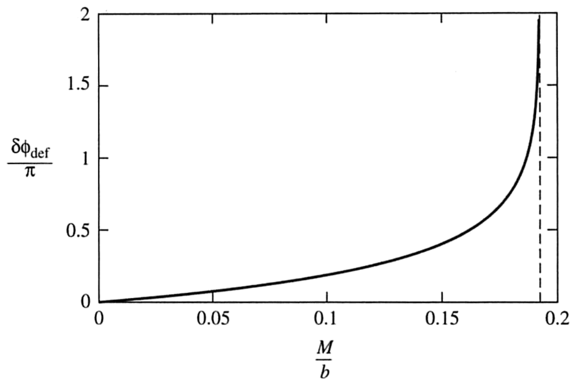


図 9.11　衝突パラメータの関数として表した光の湾曲．これは，(9.82) 式と積分 (9.78) によって定義され，M/b の関数として表された角度 $\delta\phi_{\rm def}$ の粗いプロットである．太陽による光の湾曲に対応する $M/b < 2\times 10^{-6}$ に対して，線形近似 (9.83) は十分すぎる．湾曲角は b が小さくなると大きくなり，$\sqrt{27}\,M$ で無限大になる．このとき，入射光子は円軌道に入る．

となる．w_1 はこれまでずっと分母が 0 となる方程式の解である．この積分はもう積分表で見つけられるし，代数積分ソフトを使っても求められる形になっている．その結果は M/b が小さいとき

$$\Delta\phi \approx \pi + \frac{4M}{b} \tag{9.81}$$

となる．図 9.10 から，湾曲角 $\delta\phi_{\rm def}$ は $\Delta\phi$ と

$$\delta\phi_{\rm def} = \Delta\phi - \pi \tag{9.82}$$

の関係がある．したがって

$$\delta\phi_{\rm def} = \frac{4M}{b} \qquad (\text{小さい } M/b) \tag{9.83}$$

となる．これは，M/b が小さいときの光の相対論的湾曲である．G と c をもとに戻すと（b が長さの次元を持つことを思い出せ）

光の湾曲

$$\boxed{\delta\phi_{\rm def} = \frac{4GM}{c^2 b}} \qquad (\text{小さい } GM/c^2 b) \tag{9.84}$$

とも書ける．ちょうど太陽の端をかすめる光線に対して，湾曲角は 1.7″（″ は秒角の標準的記法である）となる．この測定方法を次章で議論する．

光の遅延

光線の伝達で見つかる興味深い相対論的効果は太陽付近を通過する光信号の伝達時間が見かけ上遅れる現象である．レーダー測距法（radar-ranging technique）でこの遅れが測定できることから，一般相対論の別のテストとなり別の観測に対する補正ともなるため重要である．この効果はシャピロ（Irwin Shapiro, 1929–）にちなみ**シャピロ遅延**と呼ばれる．シャピロはこの効果を予言

し，初めて測定し一般相対論の検証をした．これがどんなものかということを知るために，以下の実験を想像しよう．地球からレーダー信号を送って太陽の近くを通過させ，他の惑星や宇宙船で反射させ，パルスの発信と反射パルスの受信の時間差を測定する．相対論からどんな数値が予言されるのだろうか．我々はすでにこの質問に答える手続きを持っている．

この状況の幾何学を図 9.12 に示した．レーダー信号の経路は太陽のため曲がるだろう．ただし，図中ではこの効果を大きく強調してある．$r_\oplus$ と r_R はそれぞれ太陽を中心としたシュワルツシルト座標における地球と反射体の軌道半径位置である．太陽に対する惑星の方向を固定していないので，軌道を決めたとは言えない．そうするためには別の距離が必要となるが，それを光が最も近づくシュワルツシルト座標半径 r_1 に選ぶ．

地球はパルスの往復時間（約 41 分）の間静止していると考えることができる．地球の時計で測った発信と受信の全時間間隔は，時空とその他の効果における地球の影響を補正した事象間のシュワルツシルト時間間隔 $(\Delta t)_{\text{total}}$ である.$(\Delta t)_{\text{total}}$ を計算するために，パルスの経路に沿った r の関数として t を表す必要がある．これは t-r 面内で軌道の形を見つけることと似ていて，湾曲問題で r の関数として ϕ を求めるのと同じ方法で求められる．(9.58) 式を $dt/d\lambda$ について解き，$dr/d\lambda$ に対して (9.63) 式を解き，$dr/d\lambda$ を $dt/d\lambda$ で割ると

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{b}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\frac{1}{b^2}-W_{\text{eff}}(r)\right]^{-1/2} \tag{9.85}$$

が求められる．ここで + の符号は半径が増える場合で，− の符号は減る場合である．パルスの軌跡全体で，半径は $r_\oplus$ から最小値で転回点 r_1 に減り，再び r_R へ増加する．復路でパルスは逆順でこれを繰り返す．全経過時間は

$$(\Delta t)_{\text{total}} = 2t(r_\oplus, r_1) + 2t(r_R, r_1) \tag{9.86}$$

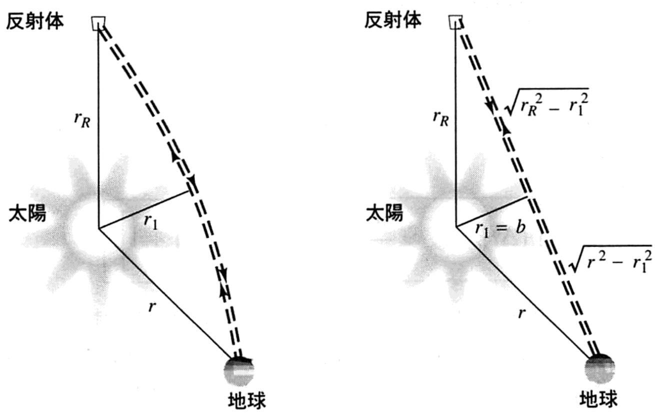


図 9.12　左図はレーダー測距遅延実験の略図である．レーダ波は太陽の近くを通るように，地球から遠くの反射体に送られ，すべての電磁波と同じように反射される．発信と戻りの間の時間差は，右図に示したように，信号が平坦時空における直線を伝わっていると仮定したものに比べ大きくなる．太陽の近くにおける時空曲率による遅延は一般相対論の重要な検証になる．

となり，ここで $t(r,r_1)$ は転回点 r_1 から半径 r までの時間で

$$t(r,r_1)=\int_{r_1}^{r}dr\frac{1}{b}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\frac{1}{b^2}-W_{\mathrm{eff}}(r)\right]^{-1/2} \tag{9.87}$$

である．パラメータ b と r_1 は

$$\frac{1}{b^2}=W_{\mathrm{eff}}(r_1) \tag{9.88}$$

の関係がある．太陽系の実験では (9.87) 式の積分を M の 1 次でのみ評価する必要がある．(9.79) 式の光の湾曲の場合と同じようにして，被積分関数を展開し近似して積分を実行することができる．(9.88) 式は M の 1 次で

$$b=r_1+M+\cdots \tag{9.89}$$

となる． $M(M/r_1)$ 以上のオーダーの項を無視した．その結果を使い，答えから b を消去する．結果は

$$t(r,r_1)=\sqrt{r^2-r_1^2}+2M\log\left[\frac{r+\sqrt{r^2+r_1^2}}{r_1}\right]+M\left(\frac{r-r_1}{r+r_1}\right)^{1/2} \tag{9.90}$$

となる．この式の最初の項は，図 9.12 の右図でみられるような伝達時間のニュートンの式である．次の 2 つの項は相対論的な補正を表し，ニュートンの値よりも伝達時間は増加する．全時間の遅れは (9.90) 式を (9.86) 式を代入することで得られる．

光の遅延がニュートン的な部分と相対論的な補正に分けられたことは (9.90) 式でシュワルツシルト半径座標を使ったことに強く関係する．M に比例する量によって半径座標に小さな変化が起き，分離の仕方は変わるだろう．測定される全経過時間だけが物理量である．それにもかかわらず，実験結果は通常，シュワルツシルト座標と (9.90) 式を使って（図 9.12 を見よ）ニュートン理論で期待される値よりも**過剰な遅延**として示される：

$$(\Delta t)_{\mathrm{excess}}\equiv(\Delta t)_{\mathrm{total}}-2\sqrt{r_\oplus^2-r_1^2}-2\sqrt{r_R^2-r_1^2} \tag{9.91}$$

r_1 が太陽の半径に近づいたときに大きな効果が起きる．$r_1/r_R\ll 1$ と $r_1/r_\oplus\ll 1$ のとき，(9.91) 式は近似により簡単な形

光の遅延

$$\boxed{(\Delta t)_{\mathrm{excess}}\approx\frac{4GM}{c^3}\left[\log\left(\frac{4r_R r_\oplus}{r_1^2}\right)+1\right]} \tag{9.92}$$

になる．ここで G と c を再びもとに戻した．この式を次章で実験と比較する．

遠い距離を進んでくる光の時間間隔を特別な観測者が測定した結果から，一般相対論で光速が c と違っていることにはならない．あなたがアメリカを 10 日で横断したとすると，あなたの速度が進んだ距離を 10 日で割ったものになることはない．速度はニュートン力学でも特殊相対論でも一般相対論でも軌道中の**各点の**性質である．7.5 節で考察したように，世界線の各点に沿って光線の 4 元速度がヌル（$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$）であるという条件によってまとめられ，時空の局所光円錐の構造は光速がつねに c であることを保証している．

問題

1. [S] 質量 M の球形中性子星の外側に住む先進の人々が星を中心とする質量 0 の球殻を建設した．球殻の内側の面積が $144\pi M^2$ で外側の面積が $400\pi M^2$ である．球殻の物理的厚さはいくらか．
2. 中性子星が伴星から物質を降着させ，その周りに高密度のプラズマが発生し，その中で陽電子が作られている．電子と陽電子が対消滅しガンマ線を放出している．中性子星の質量が $2.5M_\odot$（$M_\odot$ は太陽質量）であり，半径が 10km であると仮定すると，遠方の観測者は，この過程で星から放出されているガンマ線を探すためにはどんなエネルギー帯を調べればよいか．対消滅が起きるとき，電子と陽電子はともに星に対して静止していると仮定せよ．
3. 質量 M の球対称星によって作られるシュワルツシルト幾何学の半径 R に観測者が留まっている．星から半径方向に遠ざかる陽子が観測者の実験室を通過した．その陽子のエネルギー E と運動量 $|\vec{P}|$ を測定した．
   (a) E と $|\vec{P}|$ の関係を求めよ．
   (b) シュワルツシルト座標基底の陽子の 4 元運動量の成分を E と $|\vec{P}|$ で表せ．
4. [B,E] 178 ページのボックス 9.1 で考察した球殻について考える．そこに落下する観測者が経験する g が $20g$ より小さくなるようにできていると仮定する．$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ である．観測者がまず足から球殻に落下したとすると，この g の力は観測者の頭と足で単位質量当たりの力で差ができるため生じる．ニュートン理論を使って，この基準にあうようにするためには球殻がどれだけ重くそして大きくなければならないか評価せよ．
5. 有効ポテンシャル V_{eff} の最大値と厳密に等しい $\mathcal{E}$ で粒子が無限遠から落下するとき，その軌道の定性的な振る舞いの略図を描け．$\mathcal{E}$ の値が有効ポテンシャルの最大値よりも少しだけ大きいとき，または小さいとき，この図はどう変わるか．
6. [S] 観測者が，無限遠で運動エネルギー 0 で，質量 M のブラックホールに向かって落下する（その内部の幾何学はシュワルツシルト幾何学である）．観測者の時計で測ると，半径 $6M$ から $2M$ の間を通過するのにどれだけの時間がかかるか．
7. シュワルツシルト幾何学で，2 つの粒子が無限遠から中心めがけて落下する．1 つが $e = 1$ で，もう 1 つが $e = 2$ である．$r = 6M$ の静止観測者は目の前を粒子が通り過ぎるとき，2 つの粒子の速さを測定する．その点で，1 つ目の粒子の速さに比べ 2 つ目の粒子はどれくらい速いか．
8. 宇宙船が，質量 M のブラックホールの周りの円軌道を推進力なしで運動している．（外側の幾何学はシュワルツシルト幾何学である）軌道のシュワルツシルト半径は $7M$ である．
   (a) 無限遠の観測者が測った軌道の周期はいくらか．
   (b) 宇宙船の時計で測った軌道の周期はいくらか．
9. 円軌道における粒子の角度位置の，固有時に対する変化率と軌道のシュワルツシルト半径の間の関係を求め (9.46) 式と比較せよ．
10. 観測者がシュワルツシルト幾何学の半径 R で静止している．その半径を円軌道とする粒子の線形速度を観測者が測定したときのその値を求めよ．ISCO で速度はどうなるか．

11. 不安定円軌道の小さな摂動は時間とともに指数的に成長するだろう．有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ の最大値にある不安定円軌道から半径方向変位 δr は初め小さいが

$$\delta r \propto e^{\tau/\tau_*}$$

のように成長することを示せ．ここで τ は粒子の軌跡に沿った固有時であり，τ_* は定数である．τ_* を評価せよ．軌道半径が $6M$ に近づくとき粒子の振る舞いを説明せよ．

12. 彗星が無限遠から出発し，質量 M の相対論星の周りをぐるっと回り無限遠に戻る．無限遠における衝突パラメータは b である．最も近づいたときのシュワルツシルト座標半径は R である．最も近づいた点で静止した観測者が測ると，そこでの彗星の速さはどうなるか．

13. [N,C] シュワルツシルト幾何学の粒子軌道は 1 回転した後閉じない．大きな回転数のとき，軌道が閉じる $\mathcal{E}(\ell)$ の値の集合が存在することを説明せよ．本書のウェブサイトにある *Mathematica* プログラムなどを使うと，$\ell/M = 4.6$ のとき，クローバの葉のようになり，4 回転後に軌道が閉じるような $\mathcal{E}$ があることがわかる．そのときの $\mathcal{E}$ の値を求めよ．

14. ニュートン力学におけるケプラーの法則の 1 つは，$1/r$ ポテンシャルの中で楕円軌道上を粒子が運動するとき，同じ時間内に同じ面積が掃かれるというものである．シュワルツシルト幾何学中の軌道によって掃かれる面積を考えよう．その面積は $R > 2M$ の外側にい続けるとする．ケプラーの法則は固有時またはシュワルツシルト時間のどちらを使っても正しく成り立つか．

15. [A] **惑星の近日点移動**　束縛軌道を 1 週するときに掃かれる角度 $\Delta\phi$ に対して $1/c^2$ の 1 次の相対論的補正を求めるために，積分 (9.52) を小さい量 $2GM\ell^2/c^2r^3$ で展開して最初の 2 項だけを残そうとするかもしれない．しかしそうすると，積分は $\int^{r_2} dr/(r_2 - r)^{3/2}$ のように転回点付近で発散することになるが，もとの積分は値をもつため，計算は間違っている．積分を書き直して展開できるようにする方法はいくつか存在する．1 つのトリックは分母から $(1 - 2GM/c^2r)$ をくくりだし，

$$\Delta\phi = 2\ell \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1/2}\left[c^2e^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} - \left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

とすることである．括弧の中の因子はまだ $1/c^2$ のオーダーで $1/r$ の 2 次の平方根である．(9.55) 式を導出するために，この式を以下にしたがって評価する．

(a) ニュートン的な量に対する $1/c^2$ の補正だけを残し，(9.53) 式を使うことにより上の積分の $(1 - 2GM/c^2r)$ を $1/c^2$ で展開せよ．

(b) 積分変数 $u = 1/r$ を導入し，積分を

$$\Delta\phi = \left[1 + 2\left(\frac{GM}{c\ell}\right)^2\right] 2\int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{[(u_1 - u)(u - u_2)]^{1/2}} + \frac{2GM}{c^2}\int_{u_2}^{u_1} \frac{udu}{[(u_1 - u)(u - u_2)]^{1/2}} + (1/c^2 \text{ の高次})$$

の形に表せ．

(c) 最初の積分（定数 2 も含む）は (9.54) 式であり，2π になる．2 番目の積分が $(\pi/2)(u_1 + u_2)$ になり，これが $1/c^2$ についての最低次で $\pi GM/\ell^2$ に等しいことを示せ．

(d) 以上の結果をまとめて (9.55) 式を導出せよ．

16. 半径 a の円形の断面をもつ光子ビームが遠方から質量 M のブラックホールに向けられている．ビームの中心はブラックホールの中心を向いている．ビームの光子すべてがブラックホールに捕えられるビームの最大半径 $a = a_{\max}$ を求めよ．捕獲断面積は $\pi a_{\max}^2$ である．

17. 光子があらゆる重力源から離れたとき，速さ c で運動する「非相対論的」粒子であると仮定して，ニュートン重力理論における光の湾曲を計算せよ．答えを一般相対論の結果と比較せよ．

18. 重力の別の理論（アインシュタインの一般相対論ではない）で球対称星の外側の計量が

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

であると仮定する．光子がこの計量中のヌル測地線上を運動すると仮定し，(9.78) 式に至るステップにしたがい，この理論で球対称星による光の湾曲を計算せよ．答えが得られたとき，この問題を解くためにもっと簡単な方法があるかどうか考えよ．

19. [N] 粒子測地線に対するウェブサイトのプログラムを参考にして，シュワルツシルト幾何学中でのヌル測地線の *Mathematica* プログラムを書け．このプログラムを使って，円軌道の臨界衝突パラメータより少し上と少し下の衝突パラメータをもつ軌道を図を描いて説明せよ．

20. (a) シュワルツシルト幾何学の最も小さい不安定円軌道で運動する粒子の速さをその半径上の静止観測者が測るとどうなるか．

(b) シュワルツシルト幾何学において，この軌道と光子の不安定円軌道の関係はどうなっているか．

21. [E] 中性子星は十分明るく，その表面にある特徴的なものが望遠鏡で見えると仮定する．光が重力によって曲げられると，我々の方を向いている半球だけでなく，反対側の半球も見えていることになる．反対側がなぜ見えるか説明し，視線方向から表面がどこまで見えているか角度を評価せよ．もし曲げられていなければ角度は $\pi/2$ になるだろうし，曲がっていればそれよりも小さくなる．典型的な中性子星の質量は $\sim 1M_{\odot}$, 半径は $\sim 10\mathrm{km}$ である．

22. [N,C] **レーザーでブラックホールを探す**　質量 $\sim 10^{15}\mathrm{g}$ の原初のブラックホールが初期宇宙で作られ，現在，空間全体に分布しているとする．ブラックホールにレーザーを照射すると，散乱されて，観測者に戻されることがある．このような原初のブラックホールの探査は原理的にレーザーを空間に照射し，散乱されて戻ってきた光を探すことで行うことができる．

(a) なぜ戻される光が存在するのか説明せよ．

(b) レーザービームの光子のフラックス [(個数)/$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}$] が f_* であり，ブラックホールの質量は M, ブラックホールまでの距離は R であるとする．原点で半径 d の集光面積に戻される 1 秒当たりの光子数の公式を導出せよ．ビーム幅はブラックホールの大きさよりもずっと大きいと仮定せよ（**ヒント:** この問題の正確な答えを得るためには，ちょっと

した数値積分をする必要がある).

(c) 12 ページのボックス 2.1 で述べたレーザーを使えばこのようなブラックホールを検出できる可能性があるか.

第 10 章

一般相対性理論の太陽系実験

前章では，シュワルツシルト幾何学中でテスト粒子と光線の軌道を分析することにより一般相対論には太陽系で検証可能な 4 つの効果があることを示した．それらは重力赤方偏移，太陽による光の湾曲，惑星軌道の近日点移動，光の遅延であった．太陽系で実行できるテストをすべて挙げたわけではなく，その中で重要なものを列挙しただけのことである．この章ではこれらの効果を測定する実験を述べ，典型的に 1% の精度で太陽系で一般相対論の予言を検証する．

この章の議論は，過去または執筆時の一般相対論の実験状況のレビューでは決してない．むしろ，ここで議論するのは**代表的な**実験であり，現在最も正確な実験の部類の 1 つに属するが，必ずしも最も正確なものだとは言えない．

実験は概略的ではあるが，誤差の主な原因を述べられるほど十分詳しく議論する．実験に対する創意と努力を本当に味わうために，参考文献に挙げた原論文にあたってほしい．

10.1　重力赤方偏移

等価原理を含む重力理論は第 6 章で見たように，重力赤方偏移を予言する．$1/c^2$ の最初のオーダーで，重力赤方偏移の値は等価原理だけに依存し，重力理論の詳細には依存しない．重力赤方偏移のテストは，一般相対性理論の詳細な検証というよりも，この原理の検証という意味合いが強い．

重力赤方偏移を容易に探せるものは，星のような重い物体の重力ポテンシャルの奥深くにある原子から放出された輝線である．この効果は太陽や白色矮星，ある活動銀河核で見られる．しかしながら，執筆時において重力赤方偏移の最も正確なテストは重い物体の深い重力ポテンシャル中でなく，地表近くで行われていた．赤方偏移はかなり小さいが，実験を制御する能力はずっと高い．

1976 年 R. Vessot and M. Levine（1979）の実験で，正確な水素-レーザー原子時計を搭載したロケットが打ち上げられ，地上 10^4km の軌道に到達した．実験の間，ロケットの位置は，地上から監視されたが，実際には軌道時計にしたがってある一定の振動数で放出された信号の振動数 f_0' を監視した．図 10.1 はこの信号がどのように分析されるのかを示した概略図である（この考察では図と対応させるために振動数に f を使う）．実験を分析するために必要な $1/c^2$ の精度で，観測される振動数 f_0' は発信する時計の振動数から，特殊相対論的偏移[1](5.73) と一般相対論的偏移 (6.12) の和の分だけずれる．ドップラー偏移 (5.73) はロケットの速度のべきで展開される．最初の 2 つ

[1] 時間の遅れの効果も同様に含まれるべきであると思うかもしれない．　だが (5.73) 式はすべての特殊相対論的効果を含んでいる．時間の遅れは本質的に分子の因子である．

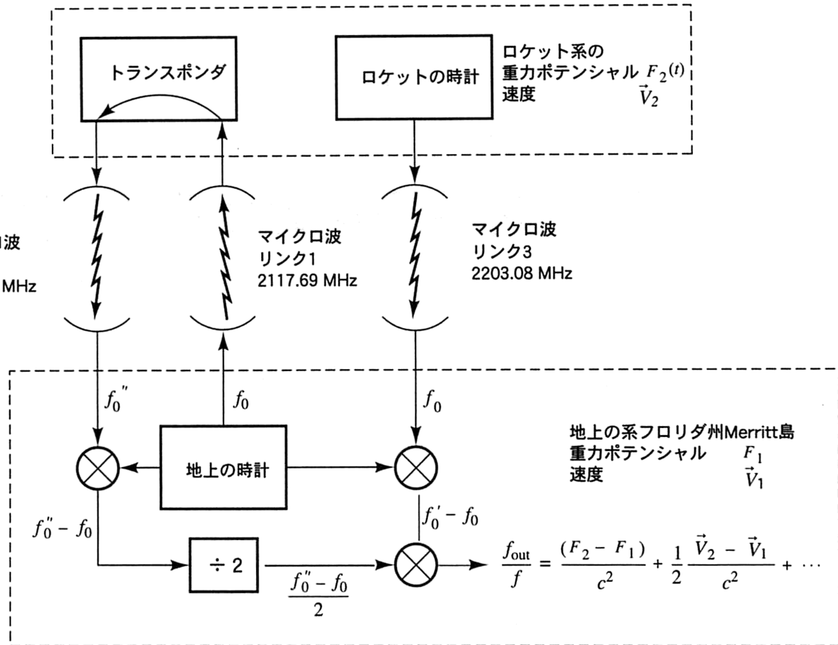


図 10.1　重力赤方偏移を測定する Vessot and Levine (1979) のロケット実験の概略図．上の破線の囲みの部分はロケットに運ばれるパッケージで，下の破線の囲みの部分は地上のパッケージである．振動数 f_0' のロケット時計からの信号を示した．振動数 f_0 のアップリンク信号も示した．f_0 はダウンリンク信号に f_0'' で応答される．これらの振動数の差の半分がロケットの速度による 1 次のドップラー偏移に比例する．時計の信号から引かれると，$1/c$ 近似の最初の項が重力赤方偏移と 2 次のドップラー偏移で，その値が $(f_0 - f_0'')/2$ から求められる．

の項だけがこの実験に関係し，それらは 1 次と 2 次のドップラー偏移と呼ばれる．振動数 f_* で発信される信号の 1 次ドップラー偏移の大きさのオーダーは

$$\frac{\Delta f_{\rm Doppler}}{f_*} \approx \frac{V}{c} \sim \left(\frac{gh}{c^2}\right)^{1/2} \sim 10^{-5} \tag{10.1}$$

である．ここで V はロケットの速度であり，その評価値は 10^4km の高度 h に到達するのに必要な速度を使って得られた（この章の実験では $c \neq 1$ 単位系に戻る）．2 次のドップラー偏移はこの 2 乗のオーダーである．重力赤方偏移は

$$\frac{\Delta f_{\rm grav}}{f_*} \approx \frac{gh}{c^2} \sim 10^{-10} \tag{10.2}$$

である [(6.12) 式を参照]．主要な実験の問題は今や明らかになった．測定される効果は，競合する 1 次のドップラー効果よりも 10 の 5 乗も小さい．

創意に富む実験的解決法（図 10.1）はロケットの応答機に既知の振動数 f_0 の信号を送り，受信された振動数 f_0' でロケットが送り返すことである．上方と下方の信号の 1 次のドップラー偏移は

加えられるだろう．どちらの場合も発信源は受信機から離れて運動している．しかしながら，重力偏移と 2 次のドップラー偏移は，上方と下方で同じなので，打ち消し合う．応答された信号は振動数 f_0'' で表面にたどり着く．f_0'' は f_0 から 1 次のドップラー偏移の 2 倍ずれたものであり，重力的または 2 次のドップラー偏移に影響を受けていない．したがって，ロケットの速度の直接の測定量になる．データがとられるとき差 $(f_0''-f_0)/2$ は自動的に $f_0'-f_0$ から引き去られる．こうすることにより，大きく占める $1/c$ のドップラー偏移は打ち消されるが，$1/c^2$ の重力赤方偏移と 2 次のドップラー偏移は残っている．2 次のドップラー偏移はロケットの速度からわかり $f_0''-f_0$ とロケット軌道を監視することから決められる．結果は重力赤方偏移の正確なテストとなる．予言値と観測値は

$$\left|\frac{(\Delta f_{\rm grav}/f_*)_{\rm obs}-(\Delta f_{\rm grav}/f_*)_{\rm pred}}{(\Delta f_{\rm grav}/f_*)_{\rm pred}}\right|\leq 2\times 10^{-4} \tag{10.3}$$

だけ違っている．

10.2 PPN パラメータ

アインシュタインの一般相対論だけが，何年もかけて提案されてきた唯一の相対論的重力理論ではない．だが，アインシュタイン理論は現在太陽系で実験的検証がよく行われ，真剣に取組まれている唯一の理論である．これらの実験的検証を考察するにあたって，いろいろな理論を系統的にパラメータ化できる枠組をもつと便利である．パラメータ化されたポストニュートン的枠組（parameterized-Post-Newtonian frame work, PPN framework）は，これを行うための標準的な方法となっている．

PPN 枠組の背後にある考えを理解するために，別の重力理論を想像しよう．一般相対論のように，その理論では質量が時空を曲げ，光線とテスト粒子はその時空の測地線上を運動するとしよう．太陽外の幾何学は非常によい近似で球対称であるが，アインシュタイン理論によって予言されるシュワルツシルト幾何学 (9.1) とは細かいところで違うとする．実験的検証と関係する幾何学の差は数個の PPN パラメータでまとめることができる．21.4 節で詳しく示すように，最適な座標を選べば，最も一般的で静的球対称計量は

$$ds^2=-A(r)(cdt)^2+B(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{10.4}$$

の形にできる．なぜ $d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$ の前に任意関数 $C(r)$ がないのか不思議に思うかもしれない．もしあったとしても，新しい半径 $r'=[C(r)]^{1/2}$ を定義し，すべての場所で r を r' で置き換えることで新しい計量が (10.4) の形になるようにすることが可能である．そうして，r' を r と呼び直せば，(10.4) 式を得ることができるだろう．シュワルツシルト幾何学 (9.1) は A と B を特別な関数の場合としてこの形になっている．さて，計量 (10.4) を c の逆数のべきで展開することを想像しよう．それによってニュートン極限とポストニュートン補正を得ることができる．質量 M が，星の外で球対称幾何学を決める唯一の星のパラメータであると仮定すると，これは GM/c^2r のべきの展開でなければならない（これが，G, M, c と r でつくる唯一の無次元量の組合せである）．

どんな重力の相対性理論でも非相対論極限のニュートン理論の検証結果と一致しなければならない． 6.6 節の考察から，この極限における軌道の予言は，平坦空間の幾何学への $g_{tt}(r)$ における 1

次の相対論的補正によって決まる．したがってニュートン理論と一致するためには

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \cdots, \qquad B(r) = 1 + \cdots \tag{10.5}$$

となる必要がある．一般相対論によって予言される静的弱場計量 (6.20) との一致を調べるためには $B(r)$ で多くの項を固定する必要があるが，6.6 節で述べたように，これらの項は低速ニュートン的予言では決まらない．**ポストニュートン的**補正を得るために A と B に次の形をとらせる：

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma)\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 + \cdots \tag{10.6a}$$

$$B(r) = 1 + 2\gamma\left(\frac{GM}{c^2 r}\right) + \cdots \tag{10.6b}$$

ポストニュートン的項の前の係数は標準的使用法にしたがい，PPN パラメータ β, γ と関係している．これらのパラメータの値は重力理論が違えば違うことがあるだろう．一般相対性理論では β と γ はシュワルツシルト計量 (9.1) の値になる：

$$\text{一般相対性理論：} \qquad \gamma = 1, \qquad \beta = 1 \tag{10.7}$$

太陽による光の湾曲，惑星の近日点移動，光の遅延は，(10.6a) 式と (10.6b) 式を (10.4) 式に代入することによって得られる PPN 計量に対してすべて計算することができる（例えば問題 4）．$1/c^2$ の最初のオーダーの結果は以下の通りである：

- 衝突パラメータ b で質量 M を通りすぎる光線の湾曲角 $\delta\phi_{\rm def}$ に対して [(9.84) 式を参照]

$$\delta\phi_{\rm def} = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\left(\frac{4GM}{c^2 b}\right) \tag{10.8}$$

- 1 軌道当たりの惑星の近日点移動 $\delta\phi_{\rm prec}$ に対して

$$\delta\phi_{\rm prec} = \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta)\frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\epsilon^2)} \tag{10.9}$$

  ここで，M は軌道を運動する星の質量であり，a は軌道の長軸の半径であり，ϵ は離心率である [(9.57) 式を参照]．

- 光の「過剰」な遅延 $\Delta t_{\rm excess}$ は，地球上の発信の半径 $r_\oplus$ と応答機の半径 r_R が重力源物体に最も近づく距離 r_1 よりもずっと大きいという近似のもとで

$$\Delta t_{\rm excess} = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{4GM}{c^3}\left[\log\left(\frac{4r_\oplus r_R}{r_1^2}\right) + 1\right] \tag{10.10}$$

  になる [(9.92) 式を参照]．

これら 3 つの実験的検証を行い β と γ を測定し，一般相対論の値 (10.7) と比較する．

10.3 PPN パラメータ γ の測定

太陽による光の湾曲と光の遅延は，PPN パラメータ γ の値を直接決める 2 つの実験である．

太陽による光の湾曲

光線は，図 10.2 に示したように (10.8) 式の量だけ，太陽の曲がった時空の中で湾曲するだろう．太陽の縁をちょうどかすめる光線に対して，一般相対論は

$$[\delta\phi_{\mathrm{def}}]_{\mathrm{predicted}} = 1.75'' \tag{10.11}$$

を予言する．星からの光の湾曲の測定は一般相対論の最初の検証の 1 つとして 1919 年に行われた．

(10.8) 式の湾曲は太陽に最も近い星に対して大きくなる．しかしながら，太陽に近い星は，太陽の円盤からの光が月にブロックされる日蝕の間でしか見えない．日蝕時の空の領域の写真は，太陽がこの視野から離れた数ヵ月後の同じ領域の写真と比べる必要がある．図 10.2 に示したように，湾曲は，太陽が視野に入ったとき星の角度位置が太陽円盤の中心から**離れて**ずれることを意味する．予想されるずれは太陽から星の角度距離とともに減少する．

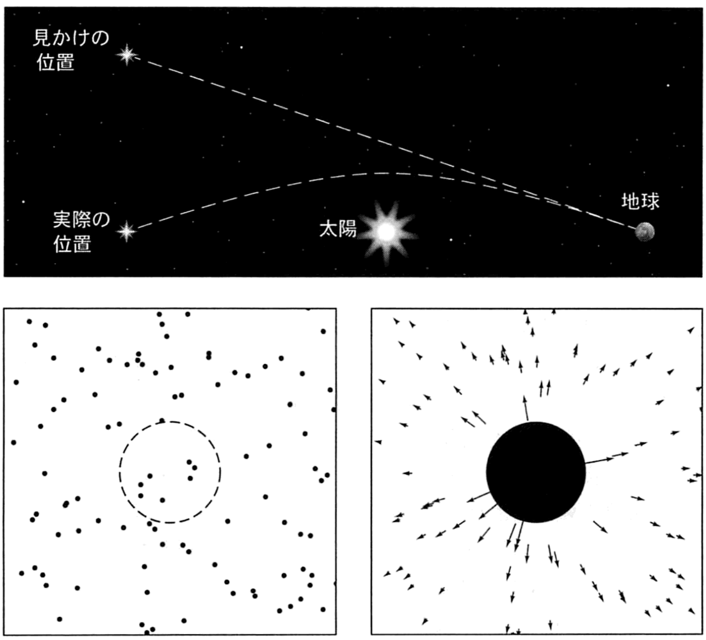


図 10.2 上の図は，太陽がつくる曲がった時空によって星の像が湾曲される，本当の位置よりも太陽から離れた角度距離でどのように見えるかを示している．下図は太陽が視線方向にあるとき，星が外側に湾曲するところを示している．実際のデータについては図 10.3 を見よ．偏移は，太陽からの角度距離が大きくなると小さくなる．効果は図中で大きく強調されている．地球から見える太陽の視直径は 959″ であるが，太陽の縁における光の湾曲は 1.75″ しかない．

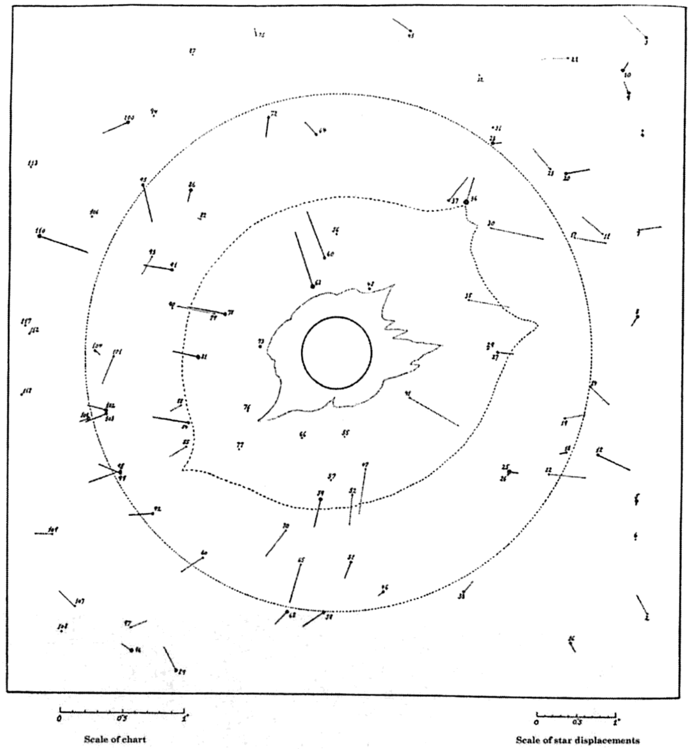


図 10.3　1922 年の日蝕時に，Campbell and Trumpler（1923）によって観測された星の位置のずれ．太陽円盤はコロナを示す点線で取り囲まれた中心にある．ずれはいろいろな方向にあるが，測定が難しい．

通常の条件で，光が地球の大気中の揺らぎによる屈折のために，星の位置は揺らぐが，それは予言された湾曲と同じかそれ以上になる．したがって，測定はこれらの揺らぎを均すために多くの星について行わなければならない．ちょうどよい日蝕は遠くでよく起きるもので，そこでは一時的にしか観測をしないため，力学的，熱的な困難が起き，系統的誤差が生じる．1922 年の日蝕観測からのデータを図 10.3 に示した．ずれの方向のバラツキから観測の困難さが感じられよう．この困難にもかかわらず，最高の観測により 5% 程度の精度で $\gamma = 1$ と合う結果が得られた．

今ではずっとよい測定が，星の代わりに電波源と電波望遠鏡で行われている．ただし，アイディアは正確に同じである．太陽は電波帯ではそんなに明るくなく，いつでも太陽の近くの電波源を観測できる．さらに電波干渉計は光学機器よりも角度分解能がよい．すばらしい測定がフォマロン（Edward Fomalont）とシュラーメク（Richard Sramek）によって 1974 年と 1975 年に，長基線電波干渉計（long-baseline interferometer, LBI）を用いアメリカ国立電波天文台（National Radio Astronomy Observatory, NRAO）で行われた（Fomalont and Sramek 1975）．

図 10.4 に示したように，基線 B 離れ，波長 λ で作動している 2 台の望遠鏡が，たとえば，遠いクエーサなどの電波源に向いている．2 つの信号が共通の地点に伝えられ，加えられ，ある時間間

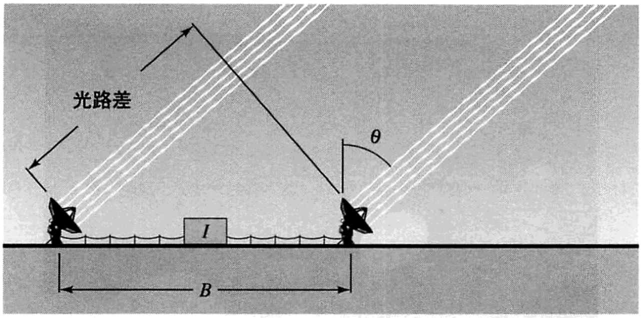


図 10.4 電波干渉計．距離 B 離れた 2 台の望遠鏡が同じ距離の天体の方向を向いている．その位置は天頂から角度 θ をなす．光路差から，ある角度では 2 つの信号が干渉により強め合い，別の方向では弱め合う．これによって天体の角度位置を非常に正確に決めることができる．長基線電波干渉計（long-baseline interferometer, LBI）（$B \sim 20$km）で望遠鏡は，実際の時間で信号が合成できるほど十分近くにある．超長基線電波干渉計（Very Long Baseline Interferometry,VLBI）（$B \sim 1000$km）では，信号は各場所で別々に記録され，後で合成する．

隔で平均される．2 つの信号の伝達する距離には差 $B\sin\theta$ があるので，もしこの距離が半波長の偶数倍なら，干渉により強め合い，半波長の奇数倍なら弱め合う．2 つの信号の和は

$$1+\cos\left(\frac{2\pi B\sin\theta}{\lambda}\right) \tag{10.12}$$

倍されることになる．地球が回転するにつれて θ は変わり，信号の和は前述の関数に比例して変化し，ときには強め合い，ときには弱め合う．これらの干渉のパターンの観測と地球の回転の速さの知識から $\sin\theta$ が測定できる．精度は究極には系の位相安定性によって決められ，典型的に (10.12) 式の位相の 0.01 から 0.1 である． $0.01\lambda/B$ の角度の精度が得られる．

NRAO 実験で 4 台の電波望遠鏡が使われ，そのうち 3 台を図 10.5 に示した．有効基線は $B=35$km，数ギガヘルツの振動数で，期待される角分解能の精度は $0.01''$ 前後になり，太陽による光の曲がりについて一般相対論によって予言される $1.75''$ の湾曲を測定するのには十分すぎる．

観測は以下のように行われた（図 10.6）．3 つの電波源, 0111+02, 0119+11, 0116+08 が使われた．それらは 10° も離れておらず，ほとんど同一直線上にあり，角度では広がっておらず，実験に使えるほど強い電波源である．毎年 4 月 11 日に電波源 0116+08 は太陽に隠れる．その角度位置は，他の 2 つを参照して時間の関数として測定される．結果は一般相対論によって予言されるものと同程度である（図 10.6 を見よ）．

実験の誤差の主要な原因は，信号が太陽コロナを通過することによって生じる．太陽コロナは太陽表面上にあるイオンガスであり，どんな媒質にもあるように屈折率 $n(r)$ があり，光を曲げる．屈折率は

$$n(r)=1-\frac{e^2N(r)}{2\epsilon_0 m\omega^2} \tag{10.13}$$

でモデル化される（SI 単位系）．ここで $N(r)$ は質量 m, 電荷 e をもつ粒子の密度で，ω は放射の

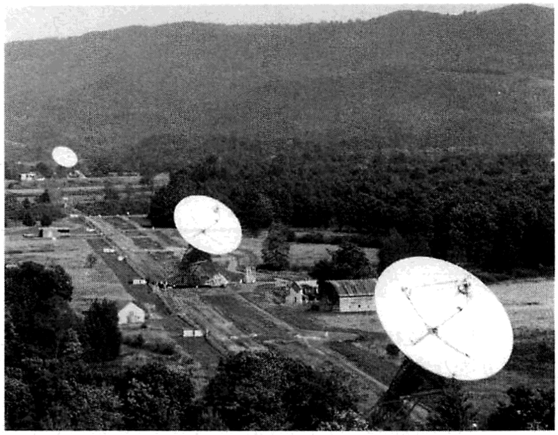


図 10.5　γ を測定するために NRAO 実験で使われた 4 台の望遠鏡のうちの 3 台．これら 3 台の 85m のアンテナは数 km 離れ，干渉計をなしている．ずっと離れた 4 番目の望遠鏡が加わることで，有効的に 35km の基線ができる．

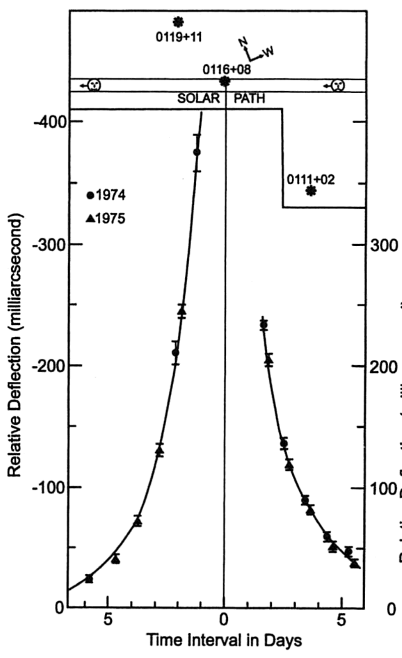


図 10.6　電波源 0116+08 が太陽によって隠されるとき，時間の関数として表した光の湾曲．この図の上の部分は空における太陽の軌道と 3 つの電波源の相対的な位置を表している．下の部分は，他の 2 つの光源に対して測られた 0116+08 の角度位置の湾曲の実験データである．実線は一般相対論の予言である．

振動数である．コロナによる湾曲は一般相対論的効果を得るためには分離しなければならない．太陽コロナを十分モデル化すると 2 つの効果は，いくつかの振動数で測定することによりある程度分離することができる．屈折率による湾曲は振動数に依存するのだが，一般相対論的湾曲は依存しない．したがって，異なった振動数で測定することにより，γ と $N(r)$ の情報を決めることができる．NRAO 実験では 8.1GHz と 2.7GHz が使われた．

1974 年と 1975 年の実験の結果の平均は

$$\gamma = 1.007 \pm 0.009 \tag{10.14}$$

であり，アインシュタインの理論と印象的な一致をみる．

VLBI [e.g, Lebach et al.（1995）] は γ をわずかだがより正確に決めた．VLBI の原理は LBI と同じであるが，例外は 2 つのアンテナがつながれていないことである．信号は別々に記録され，後に加えられる．こうすることにより，地球の直径と同じくらいの基線ができ，角度分解能が上がる．

光の遅延

光の遅延の古典的測定は 1976 年 の火星へのバイキング計画と関連して実行された（Shapiro et al. 1977）．バイキング探査機を構成する 4 台のうち 2 台はランダー（着陸機），2 台は（軌道周回機）であるが，すべてレーダー応答機を搭載している．地上用には S 帯（$\sim$ 10-cm の波長）で送る応答機があり，オービターには S と X 帯（$\sim$ 3-cm の波長）で送る応答機がある．太陽コロナの分散効果がレーダー波長で大きくなるため，2 つの振動数を使うことは重要である．オービターのオービターに対して火星着陸機の有利なところは，火星の軌道は重力によって決まり，オービターでは大きな影響をもつ太陽風による圧力などのような非重力効果には，ほとんど影響受けないことになる．データを合わせるための非常に正確な理論モデルが作られる．

実験の最終目標は，地球から火星に伝わるレーザー信号の往復時間に生じる「余分な」遅延を測定することだということを思い出せ．これは (10.10) 式である．このシュワルツシルト遅延にはいろいろな遅延の発生源に対して補正を加えなければならない．たとえば，太陽コロナを通過することや地球によってつくられる時空曲率などであるが，考察の目的に対して (10.10) 式だけに焦点を絞る．

実験の期間における地球，火星，太陽の位置の配置が図 10.7 の左図に概略的に描かれている．地球は火星よりも大きな角速度で軌道上を運動するので，太陽に最も近づく距離 r_1 はまず小さくなってから大きくなる．時間の関数として予言される遅延は図 10.7 の右図の上のように見えるだろう．

余分な遅延は，r_1 が小さくなると大きくなる．最小は太陽の半径 $R_\odot$ である．最大遅延は約 $(\Delta t)_{\max} \approx (4GM/c^3)[\log(4r_R r_\oplus/R_\odot^2)+1] \approx 247\mu$s である．これはほぼ $2(r_R + r_\oplus)/c \approx 2.51 \times 10^3$s $\approx$ 41min の全往復時間内に生じる遅れである．したがって 10^7 分の 1 の精度がこの効果を見るために必要で，1% の精度で測定するためには 10^9 分の 1 が必要である．1% の測定で必要とされる精度を得るためには，全ての軌道を約 1km の精度で知らなければならず，これは惑星の表面上の典型的な高さであろう．幸運にも，原子時計は 10^{12} 分の 1 よりも正確な時間を刻み，往復時間が 10ns で測定できる．誤差の主な原因は時間の遅延の測定ではなく，太陽コロナや物体

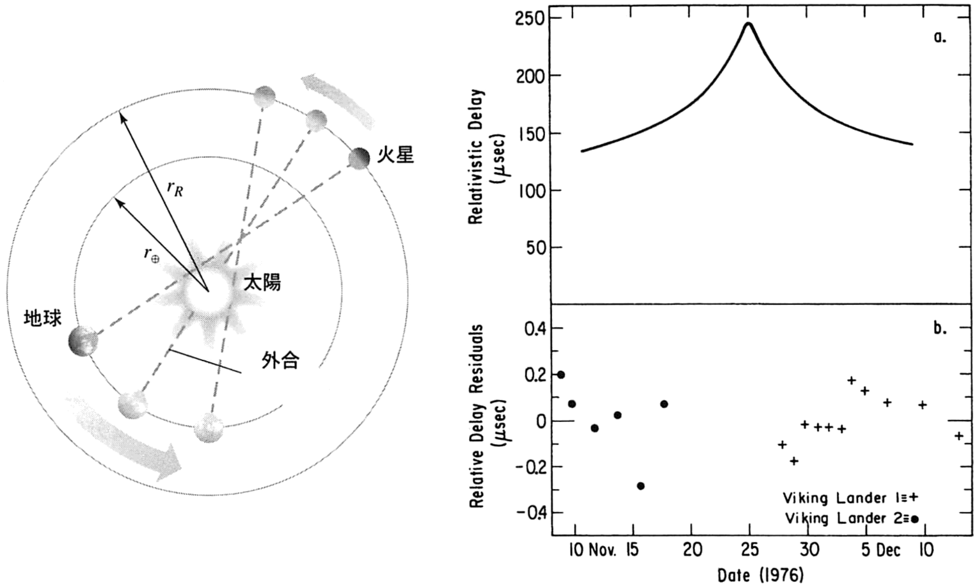


図 10.7　バイキング火星計画で実行された光の遅延の測定（Shapiro, et al. 1977）．本文で述べたように，地球から送られるレーダー信号は火星上のバイキング着陸機で戻され，返信の時刻と発信の時刻の差が時間の関数として監視される．左図は実験中の 2 つの惑星の配置の概略図である．1976 年 11 月 26 日の外合（内側を公転する惑星が太陽の真後ろに位置しているときのこと）の時刻あたりで，信号は太陽の近くを通り，時間の遅延の一般相対論効果が正確に測られた（問題 10）．信号は外合で太陽に遮られる．地球と火星の軌道が厳密には同じ面にないためである．右図は測定された遅延と時刻を示している．これらは一般相対論の予言と正確に一致する．

の軌道運動の補正を含めるときに使う理論モデルによるデータの解釈にある．コロナからの補正は 100μs ほどになる．

γ の結果は

$$\gamma = 1.000 \pm 0.002 \tag{10.15}$$

である．0.1 パーセントほどの精度になり，これはアインシュタインの理論の最も正確な定量的なテストの 1 つである．

10.4　PPN パラメータ β の測定 – 水星の近日点移動

水星は太陽に最も近い惑星で，その軌道の近日点は最も大きく移動する．しかし，水星の近日点移動について一般相対性理論の予言と観測との比較は容易ではない．一般相対性理論による近日点移動は (9.57) 式から

$$\delta\phi_{\rm prec} = 42.98''/{\rm century} \tag{10.16}$$

地上の実験室で観測される近日点移動は

$$\delta\phi = 5599.74'' \pm 0.41''/\text{century} \tag{10.17}$$

である．観測値から引き去るべき様々な既知のニュートン効果があるが，(10.16) 式と (10.17) 式の相対的大きさは，一般相対論による残りの歳差を決めるために，これらの効果をどれだけよく知らなければならないかをよく物語っている．惑星の軌道を決めることは相対論を検証するために必要とされる精度のレベルでは複雑な観測問題である．レーダー測距は 1966 年以来，時間の関数として地球より内側の惑星の正確な位置を記録している．19 世紀以来に遡るあまり正確ではない光学観測も役立つ．人工衛星の接近経過もデータになる．これら全てのデータはモデルに合わせられる．モデルには，ポストニュートン的相対論パラメータと太陽質量の四重極モーメントと同様に，惑星運動のニュートン理論の質量と長半径軸，離心率などのパラメータが含まれている．

引き去るべき最も大きなニュートン的な量は昼夜分点の歳差である．観測された歳差 (10.17) は地球基点の系と参照される．しかし，地球の回転軸は約 2 万 6 千年の周期で慣性系に対して歳差している．これは $\delta\phi$ に $5025.64'' \pm 0.50''/\text{century}$ で入っている[2]．

他の惑星の重力があることから，水星は**厳密には** $1/r$ のニュートンポテンシャルで運動していないことになる．軌道は惑星のニュートン摂動から歳差する．これらの摂動からの全歳差はニュートン力学と惑星軌道の観測から推測される．ニュートン力学で予期されない水星の近日点移動の最も正確な値は $42.98'' \pm 0.04''/\text{century}$ であり（Shapiro 1990），一般相対論の予言と正確に合う．以前議論した PPN パラメータ γ の最善の観測と併せると，これは PPN パラメータ β として

$$\beta = 1.000 \pm 0.003 \tag{10.18}$$

になる．したがって，これ以上補正するものがなければ，観測は一般相対論の予言と素晴しく一致している．加えられる補正の主な候補は太陽の質量四重極モーメントである．

この章の近日点移動の計算では，曲率源が完全に球対称であることを仮定した．しかし，太陽は厳密には球対称ではなく，回転していて，そのために生じる向心加速度により太陽はわずかに回転軸に沿って「潰れている」．ただし回転軸に対する軸対称性はまだ非常によい近似となっている．軸対称な質量分布の外側で，ニュートン重力ポテンシャル $\Phi(r,\theta)$ は r の逆数のべきで展開することができる．対称軸を逆にすることに対して分布が対称であることを仮定すると，最初の 2 つの項は

$$\Phi(r,\phi) = -\frac{GM}{r} + J_2\frac{GM}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + \cdots \tag{10.19}$$

となる．それぞれ質量単極子と質量双極子と呼ばれる．ここで θ は回転軸から測られる極角であり，R は天体の平均半径，J_2 は質量双極子モーメントの無次元量である．電磁気学の講義をとった読者は，(10.19) 式をラプラス方程式 (3.18) の軸対称解の標準的な多重極展開として，そして角度における多項式をルジャンドル多項式 $P_2(\cos\theta)$ として認識するだろう．もしこうしたことに不慣れならば，(10.19) 式をラプラス方程式に代入し，それが解になっていることを確かめよ．

---

[2] この議論に関係する重要な事実は，単にその数値が正確に決められ，(10.16) 式よりもずっと大きいということなので，この精度のレベルでこの数値と (10.17) 式がどのようにして得られたのかは説明しない．

(10.19) 式から太陽の四重極モーメントが，赤道面 $\theta = \pi/2$ におけるニュートンの重力ポテンシャルで

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{J_2 GMR^2}{2r^3} \tag{10.20}$$

になっていることになる．この余分な $1/r^3$ ポテンシャルがちょうどニュートン力学で近日点移動を起こすことになる．実際，有効ポテンシャル (9.30) に加えられるのであるが，相対論的項 $GM\ell^2/(c^2r^3)$ と正確に同じ形をしている．よって惑星軌道の観測から PPN パラメータの組合せ $(2+2\gamma-\beta)/3$ [(10.9) 式を参照] と J_2 だけを決めることができる．

太陽は回転で歪んでいるので，四重極モーメントをもち，J_2 の値は内部のモデルとそこでの角速度から求められる．表面の回転周期は赤道で約 27 日であり，内部の角速度は太陽の振動モードを正確に観測すること（**日振学**と呼ばれる研究の分野）及びこれらの振動数での回転の効果を理解することにより決まる．Brown et al.（1989）の結果は $J_{2\odot} \sim 10^{-7}$ であり，これは太陽が一様に回転していれば期待される粗い値であり，小さ過ぎて，可能な精度のレベルで近日点移動と (10.18) 式の β の決定に影響を与えない．

問題

1. [E] 太陽の表面からくる光の重力赤方偏移を評価せよ．対流セルの物質の速度が太陽表面で 1km/s のオーダーであるとしてこの効果を測定する可能性を議論せよ．観測するときによりよく適した場所が表面に存在するか．
2. Vessot and Levine の実験にはパラメータ β と γ について何か言えるほどの精度はあるのか．3 次のドップラー効果はこの実験の分析において重要だろうか．
3. 一般相対論が予言する太陽による光の湾曲の最大値を秒角で評価せよ．
4. 光の湾曲に対して，ポストニュートン的パラメータの関数として (10.8) 式を導出せよ．
5. 一般相対論によって予言される水星，金星，地球の近日点移動を 1 世紀当たり秒角の単位で評価せよ．

	長軸 10^6（km）	離心率	質量 $/M_\oplus$	周期（年）
水星	57.91	0.2056	0.054	0.241
金星	108.21	0.0068	0.815	0.615
地球	149.60	0.0167	1.000	1.000

$M_\oplus = 5.977 \times 10^{24}$kg

6. (10.20) 式の形のニュートン的四重極ポテンシャルによって生じる水星の近日点移動を評価し，$J_{2\odot}$ の観測値では，PPN パラメータ β の値を補正するには小さすぎることを示せ．
7. **太陽の偏平性と近日点移動**　太陽表面の形を測定することは，太陽の四重極モーメントを決める方法の 1 つである．偏平性は

$$\Delta = \frac{(\text{赤道での半径}) - (\text{極での半径})}{(\text{平均半径})}$$

で定義される．光学測定で太陽質量の偏平性を決めることができる．太陽表面が等重力ポテ

ンシャル面であるとすると，この偏平性を使い太陽質量の四重極モーメントを決めることができる．初期の測定では Δ の値は 5×10^{-5} である．(後の測定で Δ の値はずっと小さいことがわかった)

(a) 太陽表面の回転のために生じる向心加速度が太陽を歪ませないとすると（事実と反するが)，太陽の表面がなぜ等重力ポテンシャル面なのか説明せよ．

(b) (10.20) 式を使い，Φ が太陽表面で一定だと仮定することにより，J_2 の値を計算せよ．

(c) $\Delta \sim 10^{-5}$ から水星の近日点移動の大きさを計算せよ．

8. [P,E] 光の湾曲を検出するために行われた NRAO 実験で期待される角度の精度を，(10.12) 式から始めて，粗くてもかまわないから評価せよ．大気上の宇宙空間の理想的な環境のもとで，同じ精度を達成するために必要とされる光学望遠鏡の大きさを計算せよ．

9. [E] 光の湾曲の測定で使われる電波信号がどれだけ太陽コロナによって曲げられるかを**評価せよ**．コロナは自由電子ガスによって非常に正しくモデル化され，その屈折率は

$$n(r) = 1 - \frac{e^2 N(r)}{2\epsilon_0 m \omega^2}$$

となる（SI 単位系）．ここで電子密度 $N(r)$ は太陽の半径の 2 倍まで $10^8 \mathrm{cm}^{-3}$ とすることができる．NRAO 実験で使われる振動数は 8.1GHz と 2.7GHz であった．

10. 一般相対論がバイキング実験で測定された遅延を正しく予言していると仮定すると，実験で使われるレーダーパルスが太陽に最も近いところにきたときパルスについて図 10.7 のデータから何を推論することができるか．その答えを中心から太陽半径を使って答えよ．

第 11 章
実際の相対論的重力

第 9 章で調べたシュワルツシルト幾何学におけるテスト粒子と光線の軌道が重要になるのは，第 10 章で考察した太陽系における一般相対論のデリケートなテストに対してだけではない．いくつかの宇宙物理学的応用としても中心的役割を果たしている．この章では 3 つの応用を紹介する．重力レンズ効果と降着円盤からの相対論的振動数偏移，連星パルサーの質量の測定である．アインシュタイン理論の検証が前章の主題であったが，応用例を挙げることがこの章の主題である．

11.1　重力レンズ効果

第 9 章で見たように，光は重力で曲がる．図 11.1 で説明したように，光が光源から観測者まで進むとき，この曲がりのために光の経路は複数できる．したがって，途中の質量の存在によって遠くの光源の多重像ができる．このような作用のため，質量が集中しているところは**重力レンズ**と呼ばれる[1]．重力レンズ効果は天文学の重要な手段となっている．像になる光源，レンズとして作用する天体，レンズと観測者が互いに宇宙論的スケールにあるとき，光が通過する宇宙の大規模スケールの情報を重力レンズ効果から得ることができるのだ．

実際の重力レンズは特別な対称性が何もない遠い銀河集団でもよい．光はその周りと同じようにその中も通ることができる．しかし本書では小さい球形天体によってレンズ効果を受ける最も単純な場合だけを考えることにする．レンズ効果で，球形天体が時空曲率の発生源であると仮定する．宇宙論的な距離にあるレンズでは，宇宙の曲率が考慮されなければならないが，逆に重力レンズから曲率の情報を得ることができる．しかし，漸近的に平坦時空中にある球対称質量によるレンズ効果の簡単な例を使って重力レンズの基本的な物理を説明することにする．

レンズ幾何学と像の位置

質量 M を衝突パラメータ $b \gg M$ で通りすぎる光線の湾曲角 α は (9.83) 式によって与えられ，それは

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \equiv \frac{2R_S}{b} \tag{11.1}$$

---

[1] よく知られている光学レンズの理想化として，光源の 1 点から出た光が全て像の一点に届くという意味で，像が焦点を結ぶといっているわけではない．そういうことから，観測者は像を見るためにレンズから特別な距離にいる必要はない．レンズはより一般的な意味で使われている．

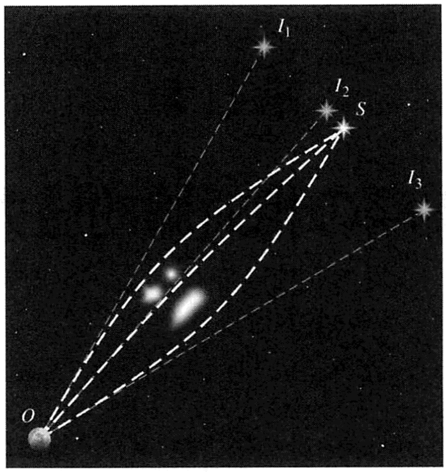


図 11.1　重力レンズの背後にあるアイディア．質量を横切ると遠い光源 S からの光が曲げられ，光源から観測者 O の間に多重経路ができる．観測者は光源の多重像と見る．図では 1 つの光源 S の像が角度位置 I_1, I_2, I_3 にできることを説明し，わかりやすくするために図のほとんどすべてを強調した．実際には，レンズの大きさは距離に比べて小さく，曲げられる角度はごくわずかであり，像は面上で直線には並ばない．

である．ここで，湾曲角 $\delta\phi_{\text{def}}$ に対して簡潔な記号 α, シュワルツシルト半径 $2GM/c^2$ に対して R_S を導入した．

球対称重力レンズの幾何学を図 11.2 に示した．この図のスケールを正しく理解することは重要である．レンズが宇宙論的距離にある銀河であり，それよりずっと遠い距離にある光源の光を曲げると，典型的に[2]

$$M \sim 10^{11} M_\odot, \qquad R_S \sim 10^{11}\text{km} \tag{11.2a}$$

$$D_S \sim D_L \sim D_{LS} \sim 1\text{Gpc} \sim 3 \times 10^{22}\text{km} \tag{11.2b}$$

である．湾曲が起きる特徴的半径はシュワルツシルト半径 R_S であるが，光が通る距離 D_L, D_S, D_{LS} よりもかなり小さい．これは実際のレンズ効果が起きる典型的な状況である．したがって，非常によい近似で光線は平坦空間を直線として伝わり，レンズを通過するときに湾曲が起きる．これが図 11.2 で仮定される**薄レンズ近似**または薄肉レンズ近似である．具体的に薄レンズ近似では光源とレンズは点として近似される．湾曲角は，すべての b の値に対して (11.1) 式になると仮定し，湾曲は常にレンズの位置で視線方向に対して垂直な面で起きると仮定している．もちろん，これらの近似は，例えば b が R_S と同程度になると成り立たなくなるが，多くの現実的なレンズの状況で単純できれいに表すことができる．

[2] **パーセク**（ps）は銀河と銀河系外天文学の標準単位である．1 パーセク = 3.086×10^{13}km または 3.262 光年である．キロパーセク（kpc），メガパーセク（Mpc），ギガパーセク（Gpc）が便利である．**非常に粗いけれども**，銀河内の互いに近い星の間の距離は pc のオーダーであり，銀河の大きさは kpc のオーダーであり，近傍の銀河までの距離は Mpc のオーダーであり，見える宇宙の大きさのオーダーは Gpc の単位で測定される．（図 17.7 も見よ．）

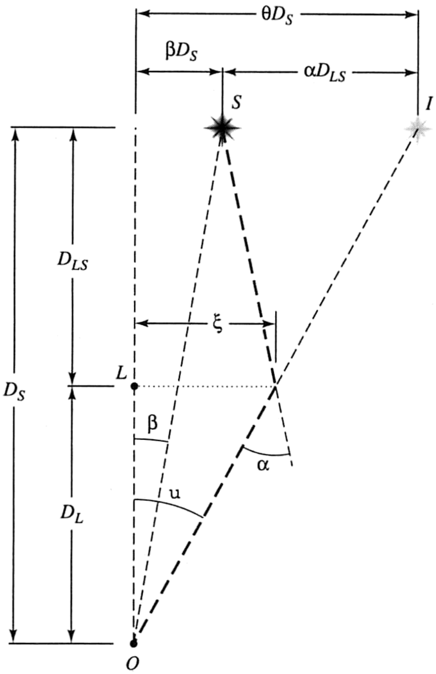


図 11.2 薄レンズ近似の重力レンズの幾何学．O は観測者である．L は観測者から距離 D_L におけるレンズ質量の位置である．S は光源で，観測者から距離 D_S のところにあり，レンズから D_{LS} の距離にある．図は光源-レンズ-観測者面を表している．太い破線は光源から観測者までの光線の経路である．光線は ξ と区別できないほど小さい衝突パラメータでレンズのそばを通り過ぎ，角度 $\alpha = 4GM/(c^2\xi)$ で曲げられる．ここで M はレンズの質量である．薄レンズ近似ではレンズは点として扱われ，常にレンズの位置 L にある横方向の面内で湾曲する．光源の像 I は観測者-レンズ軸から角度 θ に見え，本当の角度 β には見えない．この図の横の距離はすべて誇張されている．実際のスケールにすると，図中の線を分離することは不可能になるだろう．図の上に示した横方向の距離の関係によりレンズ方程式が構成される．

現実的な状況で，図 11.2 のすべての角度は小さく，視線方向を横切る距離は (角度) × (距離) でよい近似になる．図 11.2 の上部で横たわる距離の間の関係は

$$\boxed{\theta D_S = \beta D_S + \alpha D_{SL}} \tag{11.3}$$

レンズ方程式

であり，これは**レンズ方程式**と呼ばれる．小さい角度の近似で $b \approx \xi$ および $\xi \approx \theta D_L$ となるので，レンズ方程式は (11.1) 式を使うと

$$\theta = \beta + \frac{\theta_E^2}{\theta} \tag{11.4}$$

として書かれる．ここで

アインシュタイン角

$$\theta_E \equiv \left[2R_S\left(\frac{D_{LS}}{D_S D_L}\right)\right]^{1/2} \tag{11.5}$$

は**アインシュタイン角**と呼ばれる．(11.4) 式の角度は空における像の角度位置を決める．

アインシュタイン角の意義を理解するために，光源とレンズと，観測者がちょうど線上になる，縮退した場合を考えよう．この軸に対して対称性があることから，光源の像は広がり，**アインシュタインリング**と呼ばれる円形リングのようになる．$\beta = 0$ のとき，(11.4) 式から容易にわかるように，アインシュタインリングは軸から $\theta = \theta_E$ の角度にできる．

アインシュタイン角は重力レンズ現象に対して特徴的な角度スケールになる．我々と銀河内の星の間にある太陽質量サイズの天体によって起きるレンズ効果を考えよう．この場合，$M \sim M_\odot$, $R_S \sim 1\text{km}$, $D_L \sim D_S \sim D_{LS} \sim 10\text{kpc} \sim 10^{17}\text{km}$ であり，アインシュタイン角が $\theta_E \sim 10^{-3\prime\prime}$ であることになる．これは，現代の望遠鏡によって達成される精度を超えている．しかしすぐわかるように，星程度の質量天体によるレンズ効果は，レンズと光源の間の相対運動によって像の明るさが時間的に変化するところを観測することで発見できる．角度の変化が小さいため，この状況は**マイクロレンズ効果**とよく呼ばれる．(11.2) 式のパラメータの宇宙論的距離にある銀河と光源によって生じるレンズ効果では，アインシュタイン角は $\theta_E \sim 1''$ であり，光学望遠鏡で分解できる．この状況は**マクロレンズ効果**と呼ばれることがある．

(11.4) 式の解は光源-レンズ-観測者面にある 2 つの像の位置を一般的に与える：

像の位置

$$\theta_\pm = \frac{1}{2}\left[\beta \pm \left(\beta^2 + 4\theta_E^2\right)^{1/2}\right] \tag{11.6}$$

図 11.3 に球形の質量によって作られるこれらの像の配置を示した．レンズの位置に対して両側に 1 つずつ像があるが，そのうち 1 つはアインシュタイン角よりも遠くにあり，もう 1 つは近くにある．透明で広がったレンズによるレンズ効果ではつねに像の数が**奇数**になることがわかる．小さいが有限の大きさの球レンズの極限では，(11.6) 式で決まる 2 つの像に加えて，3 番目はレンズの**背後**にある（問題 2)．

レンズの位置 (11.6) は光源の振動数と独立である．光学レンズと違い，重力レンズは**無色**である．

実際のレンズはここで考察している単純な球形質量よりも複雑であるが，原理は同じである．図 11.4 は非常に複雑なレンズ系によってできたきれいな像で，多重像を示し，さらにアーク状に曲げらている．

レンズの位置と像の位置の間の角度 $\theta_\pm$ を測定して，(11.6) 式を使うとアインシュタイン角 θ_E は決められる．レンズまでの距離と光源までの距離を評価できれば，レンズの質量は (11.5) 式と (11.1) 式から求められる．したがって，重力レンズ効果は，物体が見えるか見えないかに関係なく宇宙で質量を検出するのに使われる．

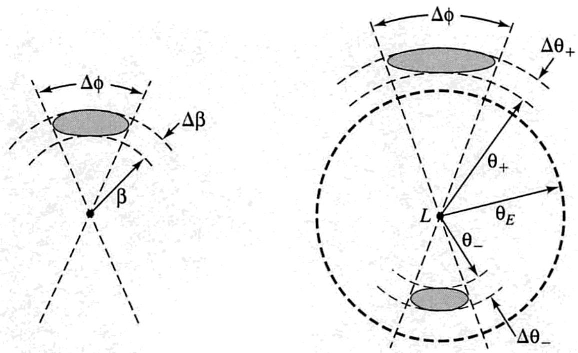


図 11.3 途中の球対称「点」重力レンズによってつくられる遠い銀河像．2 つの空の角度位置を示し，球形レンズが図の中心 L の位置に置かれたときに起きる効果を説明している．左図はレンズが光を曲げないときに見えると思われる銀河像を表している．銀河は，観測者-レンズ軸から角度 β にあり，その大きさの角度は $\Delta\phi$ と $\Delta\beta$ である．右図はレンズの作用を示している．2 つの像は観測者-レンズ軸から $\theta_{\pm}$ に作られる．そのうちの 1 つはアインシュタイン角 θ_E の内側にあり，他は外側にある．像の方位角幅 $\Delta\phi$ はレンズの作用で保存される．極角と幅は変化し，像の形はアーク状になっている．レンズは小さいが有限であるとき，3 番目の像はレンズの背後に隠れる．

像の形と明るさ

これまで，暗黙のうちに光源と像が点であると仮定してきた．しかし，有限の角度サイズの像の形と明るさは重力レンズ効果の重要な特徴の 1 つである．図 11.3 の左図は，レンズ位置 L に質量がなく光を曲げない場合，見えるだろうと思われる有限サイズの銀河像である．図 11.2 の記法で，像はレンズから角度距離 β の位置にあり，角度の大きさは $\Delta\beta$ と $\Delta\phi$（小さいと仮定）である．右図はレンズの作用を示している．2 つの像は (11.6) 式の $\theta_{\pm}$ の位置にできている．観測者-レンズ軸についての対称性から，光線の ϕ の値はレンズの湾曲によっても変わらない．したがって，像の方位角の幅 $\Delta\phi$ は保存される．極角の幅 $\Delta\theta$ は (11.6) 式を微分することで求められる量だけ変化し

$$\Delta\theta_{\pm} = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\beta}{(\beta^2 + 4\theta_E^2)^{1/2}}\right]\Delta\beta \tag{11.7}$$

になる．銀河の像は細長くなり歪められる．

重力レンズによって変わるのは像の形だけでなく，その明るさもである．すぐ説明するように，明るさの変化は，重力レンズを使って小質量天体を発見するためのカギとなる．

像の明るさを理解するために，簡単な例から始めよう．高温に熱せられ，近似的に黒体のように放射している平板を想像しよう．黒体は表面の小さい部分からすべての方向に一様に放射する．平板の真上で ある距離離れて正面を向いた検出器が放射のフラックス（エネルギー/時間）を記録する．しかし，同じ距離で平板の法線方向とある角度をなす同じ検出器では図 11.5 に示したように，フラックスは**少なく**検出される．平板は正面から見たときよりも斜めから見たときの方が見込まれ

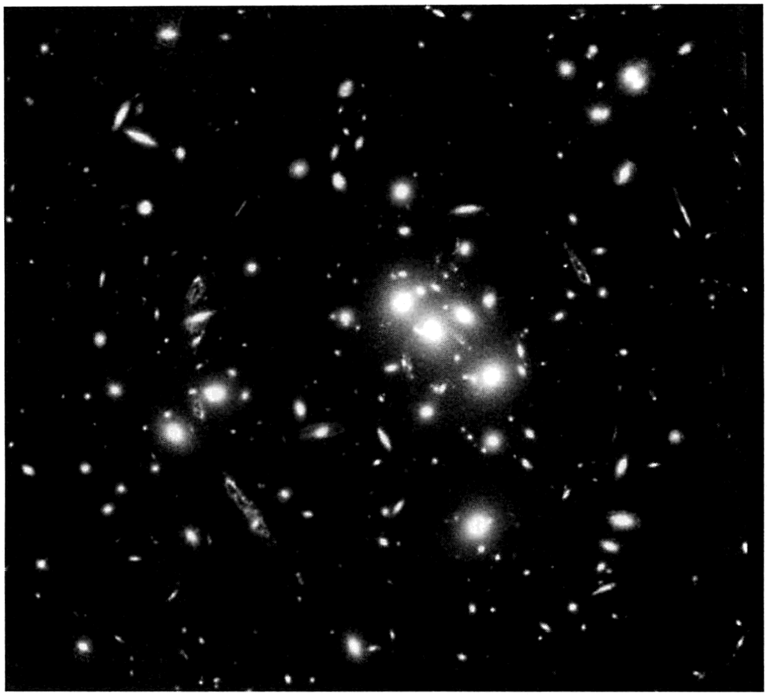


図 11.4 重力レンズとして作用する銀河団 0024+1654 のハッブル宇宙望遠鏡イメージ．前景の銀河団（中心の明るく広がった像）の質量はそれより遠くにある銀河に対して重力レンズとしてはたらく．レンズの幾何学（点ではない）は，遠い銀河の多重像がアインシュタインリングの半径の近くに作られるようになっている．像は歪められアークになっている．

る立体角が小さいからである．たとえば平板を真横から見ると，平板の厚さが無視できれば，放射は届かない．面の小さな部分から届くフラックス Δf と立体角 $\Delta\Omega$ の間の比例係数は平板の**表面輝度**と呼ばれ

$$\Delta f = (\text{表面輝度}) \times \Delta\Omega \tag{11.8}$$

の関係がある．

レンズ効果においてこれが何を意味するか理解するために，星の重力レンズ効果の具体的な場合を考えよう．重力レンズ効果では表面輝度は星の性質である表面輝度を変えない．しかし，立体角は星と検出器を進む光線軌道の性質なので，星によって張られる立体角は変わる．したがってレンズ効果は，(11.8) 式が示すように，レンズが存在していない場合の像の輝度（フラックス）を変えることができる．

これを理解する別の方法は，星の表面の小さい部分から放射された光に何が起きるかを考えてみることである．光線はすべての方向に等方に放射される．光線のうち遠くの検出器にやってくるものもあるが，ほとんどは検出できず記録されない．レンズが存在してないときよりも多くの光線がやってくるとすると，検出器はより多くの光を受信し，像は明るくなる．届く光線が少なければ，

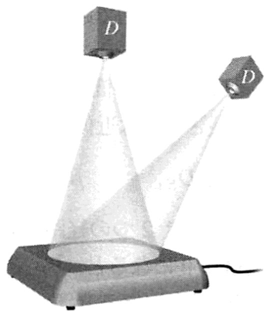


図 11.5 ホットプレートの表面はすべての方向に等しく放射する．プレート正面からみている検出器 D は斜めから見たときと違ったフラックスを測定する．これは，プレートを見込む検出器の位置が違うと立体角が違うからである．

像は暗くなる．観測者によって見られる像のすべての全輝度はこれからみるように，レンズがないときよりも大きくなる．このような状況では，レンズがないときよりもたくさん光線が検出器に向けられる．

この考察から，$\theta_\pm$ の位置でレンズ効果を受けていない像の輝度 I_* に対する，受けている像の輝度 $I_\pm$ の比は，レンズがないときに像が張る立体角 $\Delta\Omega_*$ に対する，レンズがあるときの像が張る立体角 $\Delta\Omega_\pm$ の比と等しくなるだろう．極座標で立体角のよく知られた関係を使うと，これは

$$\frac{I_\pm}{I_*} = \frac{\Delta\Omega_\pm}{\Delta\Omega_*} = \left|\frac{\theta_\pm \Delta\theta_\pm \Delta\phi}{\beta\Delta\beta\Delta\phi}\right| \tag{11.9}$$

になる．$\Delta\phi$ は保存するので，増光は (11.6) 式と (11.7) 式から

$$\frac{I_\pm}{I_*} = \left|\left(\frac{\theta_\pm}{\beta}\right)\left(\frac{d\theta_\pm}{d\beta}\right)\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{(\beta^2+4\theta_E^2)^{1/2}} + \frac{(\beta^2+4\theta_E^2)^{1/2}}{\beta} \pm 2\right) \tag{11.10}$$

となる．どんな x に対しても $x + 1/x \geq 2$ が成り立つので，上式の括弧の中はつねに正になる．したがってアインシュタインリングの外側の像は明るくなり，内側は暗くなる．

像が分解できない，星によるマイクロレンズ効果の場合全増光に興味がある：

$$\boxed{\frac{I_{\rm tot}}{I_*} \equiv \frac{I_+ + I_-}{I_*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{(\beta^2+4\theta_E^2)^{1/2}} + \frac{(\beta^2+4\beta_E^2)^{1/2}}{\beta}\right)} \tag{11.11}$$

全像輝度

この関数は常に 1 よりも**大きい**．したがって重力レンズは常に全輝度を高め，光源が観測者-レンズ軸に近ければ，つまり β が小さければ，この増光は本質的になる．これからすぐわかるように，この増光は，個々の像が分解できないときでさえも，重力レンズ効果が検出でき，利用される理由となっている．

揺らぎの時間差

光源の明るさの揺らぎは，地球に到着したとき，像の揺らぎになる．しかし，2 つの像の到着時間は 2 つの理由で異なる．第一に，2 つの像が通る経路の長さは，θ_+ と θ_- が違うため異なる．第

二に，9.4 節で考察した相対論的遅延が，同じ理由で起きるだろう．我々はこの遅延を詳しくは計算しないが，到着時間に大きな差が生じ得ることを示すためには，経路の差を簡単に評価すれば十分であろう．$D_L = D_{LS} = D_S/2$, $\beta \ll \theta_E \ll 1$ の簡単な場合を考えよう．ちょっとした平面の幾何学と図 11.2 から，β の 1 次で経路の長さの差は近似的に

$$\Delta D \approx \beta\theta_E D_S, \qquad \beta \ll \theta_E \ll 1 \tag{11.12}$$

であることがわかる（問題 4）．$\beta = 0$ のとき 2 つの経路の対称性を反映してこの式は 0 になる．結果は長さだけに比例し，レンズの質量が 0 になると，θ_E とともに 0 となる（そうならなければならない）．宇宙論的距離 [(11.2b) 式を参照] にある光源が銀河によってレンズ効果を受けるときは，$\Delta D \approx 4(\beta/\theta_E)R_S$ であり，到着時間の差 $\Delta D/c$ は数週間で測定できる．この効果は観測され，宇宙の膨張率などのパラメータを決める上で重要な役割を果たしている．

マイクロレンズ効果

第 17 章で学ぶように，星や銀河中に見える物質は宇宙の全物質のうちでほんの少ししか占めてないという証拠が多くある．我々の銀河は，我々が見ることのできる星や塵以上に重いハローに囲まれているに違いない．未知の物質は何からできているのだろうか．木星サイズの天体，白色矮星，ブラックホールは重いコンパクトハロー天体（MACHOs，マッチョ） と呼ばれる候補の 1 つの例である．このような天体の占める質量領域は太陽質量の 1000 分の 1 から数倍に及ぶかもしれない．それらは暗く，重力相互作用以外の方法で見つけるのが難しい．重力マイクロレンズ効果はそれらを発見する 1 つの手段となる．

我々の銀河がマッチョのハローをもち，それぞれが集まってできた重力ポテンシャルにしたがって運動しているとする．ハローの**外**にある近傍の銀河中の星を調べることを想像しよう．我々の銀河の衛星銀河 大マゼラン雲（Large Magellanic Cloud, LMC）の星は重要な例となる．ハロー中のマッチョが軌道にしたがい LMC 中の星の視線方向に来たとすると，マッチョは短期間だが重力レンズとしてはたらく．マッチョが通ると，星の像は明るくなり，そして暗くなる．明るさの変化は，マッチョの質量に関係する角度 θ_E(11.5) 式とマッチョの運動によって時間変化する角度 β とともに，(11.11) 式によって与えられる．したがって，マッチョは遠い星の明るさから検出される．だが，すでに考察したように，光の角度の湾曲が光学望遠鏡の分解能をかなり下回っていても可能である．変化の特徴的な時間スケールは時間 $t_{\rm var}$ として評価することができ，これはマッチョがアインシュタイン角 θ_E と等しい角度距離を動くのにかかる時間である．銀河の半径 $D_L \sim 10\text{kpc}$ 離れた太陽質量の星に対して粗く $\theta_E \sim 10^{-3''}$ と見積もり，銀河の典型的な星の速度に対して $V \sim 200\text{km/s}$ と見積もると，$t_{\rm var}$ の時間は

$$t_{\rm var} = \frac{\theta_E D_L}{V} \sim \frac{(10^{-3''})(10\text{kpc})}{200\text{km/s}} \sim 0.2\text{yr} \tag{11.13}$$

となる．逆に，変化の時間と速度の評価，光源とレンズまでの距離の測定からアインシュタイン角が (11.13) 式から求められ，(11.5) 式からレンズの質量が求められる（問題 7）．これがマイクロレンズ効果を使った我々の銀河内の暗い天体の質量測定法である．

ある星を見てマッチョが視線方向を横切る機会は非常に少ない．しかし，非常にたくさんの星を調べれば，マッチョを検出できる機会は多くなる．このような観測プログラムが現在進行中であ

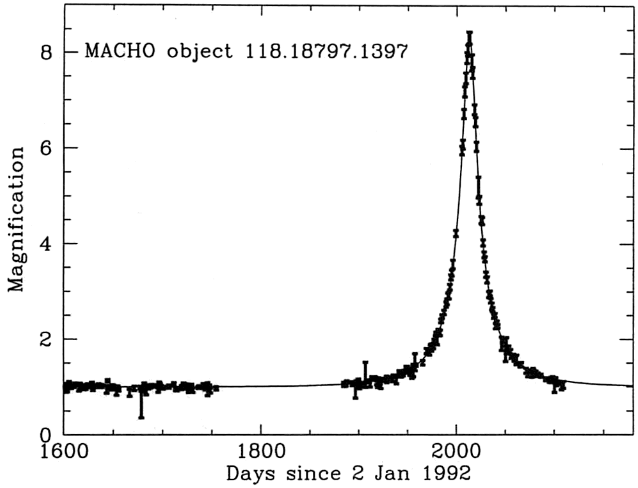


図 11.6 MACHO collaboration のマイクロレンズ事象の光曲線．途中の天体によってレンズ効果を受けた，銀河のバルジにある星の光曲線を表している．縦軸は $I_{\rm tot}/I_*$ である．データは (11.11) 式の関数とともプロットしてある．レンズ天体が空を横切るときの角度の速さおよびレンズが光源に最も近づく角度をパラメータとしてある（問題 6 と 7）．

る．精巧な望遠鏡，電子画像処理と高速ソフトウエアを駆使して天文学者は数千日の期間に渡って数十万の星を調査している．図 11.6 に，MACHO collaboration（Alcock et al. 1997）から 1 つの事象の光曲線を示した．このようにして重力は，重力レンズ効果を通じて宇宙のダークマターを探査する道具として使われている．

11.2 コンパクト天体の周りの降着円盤

宇宙物理学の降着円盤

我々は太陽の曲がった時空中を運動しているので，曲がった時空の実験を行いやすい．しかし太陽は非常にコンパクトな天体というわけではないので，太陽の外側の曲率は決して大きいものではない．比 M/R は太陽の幾何学における相対論的効果を特徴づけるのだが，わずか 10^{-6} のオーダーにすぎない．宇宙で最もコンパクトな天体は星の進化の最終状態のうちの 2 種類である．それらはブラックホールと中性子星であり，それぞれ第 12 章と第 24 章で述べるだろう．ブラックホールでは $M/R \sim 0.5$ で，典型的な中性子星では $M/R \sim 0.2$ である．これらのコンパクト天体をさらに引き続き次章から調べるのだが，それらには 1 つの共通点がある．回転していなければ，それらの外側の時空はシュワルツシルト幾何学である．これまでの 2 つの章の計算法と結果を利用し，物質と光の運動を使ってこれらの幾何学を観測し調べる．近傍の物質，たとえば伴星の物質が**降着**と呼ばれる過程でこのような天体に自然に降り積もる．この物質はテスト粒子の源であり，その運動から時空幾何学を調査できる．

たとえば普通の伴星（たとえば太陽のような星）と相互に軌道運動するブラックホールまたは中

性子星を考えよう．連星は重力波放射などの機構によって軌道エネルギーを失い軌道が小さくなり，伴星の外層がその中心よりもコンパクト天体に強く引かれ，普通の伴星から質量が洩れ出し，コンパクト天体に降り積もるだろう．初期軌道の角運動量が保存するため，降着物質は直接コンパクト天体に落下することはできず，**降着円盤**と呼ばれる円盤を形成する．円盤内の粒子間の相互作用に伴ういろいろな散逸機構により，エネルギーと角運動量をゆっくり失い，渦を巻きながら徐々にコンパクト天体に向けて落ちていく．最も内側の安定円軌道にたどり着くまで [(9.43) 式を参照]，ほとんど円軌道をゆっくり内側に渦を巻きながら進んでいく．その後はコンパクト天体に即座に落下する．失ったエネルギーは円盤から放射として放出され，太陽質量のコンパクト天体では典型的に X 線波長になる（ボックス 11.1 を見よ）．これが，太陽質量程度のコンパクト天体の降着円盤が銀河 X 線源であるというもっとも可能性の高い説明になっている理由である．

我々の銀河（13.2 節）を含むほとんどすべての十分重い銀河中心には 10^6-$10^9 M_\odot$ の巨大ブラックホールがあり，その周りを降着円盤が取り囲んでいると思われている．このような巨大のブラックホールの周りにある円盤は，ボックス 11.1 の評価で示すように，太陽質量程度のブラックホールのものよりも冷たい．しかし，そのことは，輝度が無視できることを意味しているわけではない．13.2 節とボックス 15.1 でみるように，銀河中心のブラックホールの降着円盤は，クェーサーのような活動銀河核を解釈する上で中心的な役割を果たしている．これらは宇宙の放射の最も精力的な定常発生源である．

X 線源のスペクトルにおけるコンパクト天体の証拠

コンパクト天体の幾何学の情報は，降着円盤内の粒子の運動とそこから放出される光線を観測することで得られる．X 線分光はこの運動の帰結を観測するための 1 つの手段である．

たとえば，以前議論した銀河中心の巨大ブラックホールを取り囲む降着円盤を考えよう．円盤の温度は十分冷たく，鉄のような重い元素は電子を束縛し続けられる（問題 8）．円盤上の X 線フレアによって部分的にイオン化された原子でさえも 6.4-keV 光子を放出することにより励起状態から戻ることができ（蛍光），X 線スペクトルに輝線が現れる．しかし，これらの光子が無限遠の観測者にたどり着くまでには別のエネルギーに変わっているだろう．大雑把に言えば，放射の半径位置に依存して重力赤方偏移を受けるだろう．さらに，物質が放射するときの速度が観測者に対して向かっているか遠ざかっているかによってドップラー偏移も受けるだろう．円盤のいろいろな部分からの放射を統合した結果，鉄の輝線はかなり広がり，その形状には，降着天体の周りの幾何学の情報が含まれる．

第 9 章で詳しく発展させた手法により，円盤のどの部分でも赤方偏移を計算することができる．単純だが定量的な評価ができるモデルに焦点を絞るため，中心のブラックホールは回転せず，外部の幾何学がシュワルツシルト幾何学 (9.9) で表されると仮定しよう．薄い平坦な円盤であることも仮定しよう．円盤が赤道面 $\theta = \pi/2$ にあるようにシュワルツシルト座標を向けることができる．図 11.7 に，遠い観測者から見て円盤が真横になるときの幾何学を示した．（我々は後に円盤面を正面から見た場合に戻る）ω_* を放射された光子の自然な振動数 6.4keV/$\hbar$ とし，ω_∞ を遠い観測者に観測された振動数とする．これは光子が放出されたときの半径 r と角度位置 ϕ に依存する．$\mathbf{u}_{\rm src}(r, \phi)$ を物質の 4 元速度とし，そこから 4 元運動量 $\mathbf{p}(r, \phi)$ の光子が放出される．そして $\mathbf{u}_{\rm rec}$ を無限遠の静止観測者の 4 元速度とし，観測者は光子を 4 元運動量 $\mathbf{p}(\infty)$ で受信する．一般的に，

ボックス 11.1　降着エネルギー

コンパクト天体の周りの降着円盤の輝度と温度を簡単に評価するのには物理学の知識がほんの少し必要である．

定常状態にある降着円盤の光度（放出されるエネルギー全発生率）と温度は質量の降着率 $\dot{M}$ で決まる．定常状態で，重力ポテンシャルにおける 1 秒当たりの質量の時間変化 $\dot{M}$ は放射エネルギーへと変わっている．$\dot{M}$ が大きくなると光度も温度も大きくなる．

質量が球対称定常的にコンパクト天体に降着できる時間率には上限がある．降着率が大きくなっていくと，外向きの光子が降り積もる物質に作用し，圧力が増加し，最終的にコンパクト天体の重力を超えてしまう．したがって光度にはエディントン極限と呼ばれる上限が存在する．観測される X 線源の典型的な光度の範囲は，降着が球対称でないときでも，極限値の数パーセントからほとんど極限値にまで及ぶ．

エディントン極限を評価するために，M をコンパクト天体の質量とし，L を放射の光度としよう．ここで我々が求めている粗い評価では，簡単なニュートン的解析で十分である．中心から半径 r の球面を通過するエネルギーフラックスは $L/(4\pi r^2)$ である．運動量フラックスは，光子に対して (運動量)=(エネルギー)/c であるから $L/(4\pi r^2 c)$ である．落下物体を外向きの放射が散乱することにより，外向きの有効圧力が発生する．落下物体に外向きの運動量がどれだけ伝えられるかを評価するために，低エネルギー光子による電子の散乱に対してトムソン散乱断面積 σ_T を使うことができる（SI 単位系）：

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)^2 = 0.665\times 10^{-24}\mathrm{cm}^2 \tag{a}$$

ここで e は電子の電荷であり，m_e はその質量である（陽子から衝突されても外向きの力を受け続けるのだが，断面積は 100 万倍小さい）．単位時間内に半径 r で電子 1 個に伝えられる運動量は $\sigma_T L/(4\pi r^2 c)$ である．単位時間当たりの運動量は力であり，これと重力を等号で結び，落下物体中の各電子に対して質量 m_p の原子核が約 1 個あることに気をつけると，水素イオンに対するエディントン極限は

$$\frac{Gm_pM}{r^2} = \frac{\sigma_T L_{\mathrm{Edd}}}{4\pi r^2 c} \tag{b}$$

となる．したがって極限のエディントン光度は

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{Edd}} &= \frac{4\pi G c m_p M}{\sigma_T} \\ &= 1.3\times 10^{38}(M/M_\odot)(\mathrm{erg/s}) \end{aligned} \tag{c}$$

となる．（比較として，太陽の光度は $L_\odot = 3.8\times 10^{33}$erg/s である）典型的な X 線源は L_{Edd} のせいぜい数パーセントである．深い重力ポテンシャル井戸の中へ落ちることでエネルギーを放射に変えることは，星の放射エネルギー源である熱核燃焼に匹敵する．

コンパクト天体から半径 R にある降着円盤から放出される放射の特徴的なエネルギーは，大きさ R, 温度 T の黒体の光度と等しくすることにより粗く評価することができる．ただし，放射スペクトルは典型的な熱放射ではない．光度 L は L_{Edd} のうちの ε の割合であるとすると

$$4\pi R^2\sigma T^4 = \varepsilon L_{\mathrm{Edd}} \tag{d}$$

である．（ここで σ は黒体から出る放射を特徴づけるシュテファン-ボルツマン定数であり，断面積ではない）．(c) 式を使うと

$$\begin{aligned} T &\sim 5\times 10^7\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^{1/2}\left(\varepsilon\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/4}\mathrm{K} \\ &\sim 5\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^{1/2}\left(\varepsilon\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/4}\mathrm{keV} \end{aligned} \tag{e}$$

を得る．

中性子星の表面では $GM/c^2R\sim 0.1$ である．球対称ブラックホールの周りにある降着円盤の最も内側の安定円軌道は $GM/c^2R\sim\frac{1}{6}$ である [(9.43) 式を参照]．いずれの場合も，$M\sim M_\odot$, $\varepsilon\sim 0.5$ に対して，$T\sim$ 数 keV であることがわかる．このことから太陽質量のブラックホールまたは中性子星の周りの降着円盤がなぜ X 線源であるのかを説明できる．ほとんどすべての十分重い銀河中心で見つかる重いブラックホール $10^6\sim 10^9 M_\odot$ の周りの降着円盤はこれに対応して冷たい．

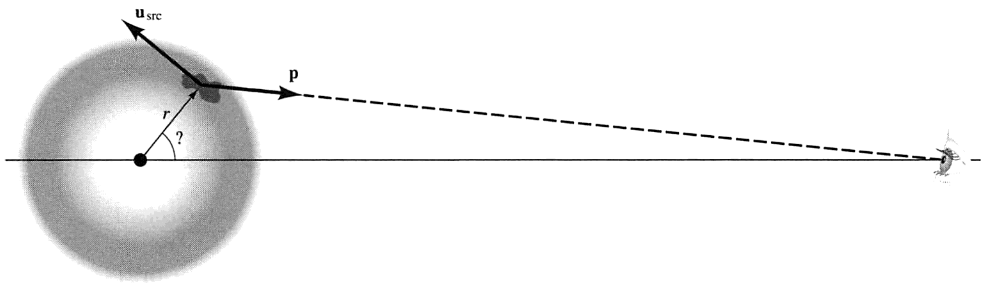


図 11.7　銀河中心のブラックホールのようなコンパクト天体を取り囲む降着円盤を上から見た図．円盤上の濃い影の領域で励起された原子が，その半径に対応した角速度でコンパクト天体の周りを回転し，その静止系で振動数 ω_* の輝線を放つ．図には，発光源と遠い観測者をつなぐ光子が描かれている．光源の運動の相対論的効果とコンパクト天体がつくる時空曲率による相対論的効果によって，観測者が受信する振動数は変化する．円盤上の様々な領域からくる光子を集積した効果のため，輝線の形状が広がり，これからコンパクト天体の幾何学の情報が得られる．

9.2 節の考察 [(9.12) 式参照] から

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_*} = \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{rec}} \cdot \mathbf{p}(\infty)}{\mathbf{u}_{\mathrm{src}}(r,\phi) \cdot \mathbf{p}(r,\phi)} \tag{11.14}$$

となる．

無限遠で受信する観測者は 4 元速度

$$u^\alpha_{\mathrm{rec}} = (1,0,0,0) = \xi^\alpha \tag{11.15}$$

で静止している．ここで $\boldsymbol{\xi}$ は t の変位に対してシュワルツシルト計量が不変性であることから現れるキリングベクトル (9.2) である．発光物質は中心周りの円軌道にある．その角速度は (9.46) 式の $\Omega(r) = d\phi/dt = (M/r^3)^{1/2}$ である．ここで r は軌道のシュワルツシルト座標半径である．したがって (r,ϕ) の位置にある発光物質の 4 元速度は

$$u^\alpha_{\mathrm{src}}(r,\phi) = [u^t_{\mathrm{src}}(r), 0, 0, u^\phi_{\mathrm{src}}(r)] = u^t_{\mathrm{src}}(r)[\xi^\alpha + \Omega(r)\eta^\alpha] \tag{11.16}$$

となる．ここで $\boldsymbol{\eta}$ は ϕ の変位のもとでシュワルツシルト計量が不変であることから現れるキリングベクトル (9.4) である．時間成分 $u^t_{\mathrm{src}}(r)$ は規格化条件 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ により他の成分から決められる [(9.48) 式を参照]：

$$u^t_{\mathrm{src}}(r) = \left[1 - \frac{2M}{r} - r^2\Omega^2(r)\right]^{-1/2} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} \tag{11.17}$$

振動数偏移 (11.14) は保存量 $e \equiv -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ と $\ell \equiv \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\eta}$ で表され，これらは，光子軌道に対し，(9.58) 式，(9.59) 式とその比 $b \equiv |\ell/e|$ で定義される．保存量 e, ℓ, b は光源の位置 (r,ϕ) に依存するが，それがわかる形では表わさない（9.4 節から光子の 4 元速度が $\mathbf{p}$ となるように規格化されていることを思い出せ）．e と ℓ で (11.14) 式のスカラー積は

$$\mathbf{u}_{\rm rec}\cdot\mathbf{p}(\infty)=\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}(\infty)=-e \tag{11.18a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\rm src}(r,\phi)\cdot\mathbf{p}(r,\phi)&=u^t_{\rm src}(r)[\boldsymbol{\xi}+\Omega(r)\boldsymbol{\eta}]\cdot\mathbf{p}(r,\phi)\\&=u^t_{\rm src}(r)[-e+\Omega(r)\ell]\end{aligned} \tag{11.18b}$$

である．その結果，振動数偏移は

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_*}=\{u^t_{\rm src}(r)[1\pm\Omega(r)b]\}^{-1} \qquad \begin{pmatrix}\text{近づくとき}-\\ \text{遠ざかるとき}+\end{pmatrix} \tag{11.19}$$

であり，発光物質が観測者から**遠ざかる**円盤の側にあるときプラスの符号になり，**近づく**円盤の側にあるときマイナスの符号になる．

半径 r で光子をいろいろな ϕ の値で放出したときの b の値を評価する作業がまだ残っている．簡単のため，一般の ϕ でなく，2 つの特別な場合で行う：(1) 光子が観測者に対して真横に運動している場合，つまり $\phi=0$ または $\phi=\pi$ のとき，(2) 円盤に対して接方向に放出された光子が観測者にたどり着く角度 $\pm\phi_t$ で行う（ $\pm\phi_t$ は $\pm\pi/2$ に近いが，光が曲げられるためわずかに違うだろう）．

$\phi=0, \phi=\pi$ で横方向に移動する物体から出る光子は円盤の中心を通って観測者にやってくる．したがって，$b=0$ および $\ell=0$ を持ち，振動数偏移は，(11.19) 式と (11.17) 式から

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_*}=\left(1-\frac{3M}{r}\right)^{1/2} \qquad \text{(横運動)} \tag{11.20}$$

となる．光子が円盤上の半径のどこで放たれても赤方偏移受ける．

光子が観測者に向かってくる方向または遠ざかる方向に運動する物体から放出される第二の場合は b の計算が必要となる．(9.58) 式と (9.59) 式の e と ℓ の定義から

$$b\equiv\left|\frac{\ell}{e}\right|=\frac{r^2|p^\phi(r,\phi)|}{(1-2M/r)p^t(r,\phi)} \tag{11.21}$$

となることを思い出せ．$\pm\phi_t$ は，円盤に対して接方向に放出された光子が観測者にたどりついた角度なので，半径成分 $p^r(r,\phi_t)$ は 0 になる．（我々は円軌道を仮定しているので，4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm src}$ の半径方向成分は常に 0 になるが，向かってくる光子の半径成分は放出物質の軌道上の 2 ヵ所でだけ 0 になる．）光子の 4 元運動量がヌルであるという条件 (5.70) で b を十分評価できる：

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)[p^t(r,\pm\phi_t)]^2+r^2[p^\phi(r,\pm\phi_t)]^2=0 \tag{11.22}$$

(11.21) 式と (11.22) 式から b は

$$b=r\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \qquad \text{(正面に向かって近づくか遠ざかる)} \tag{11.23}$$

となり，(11.19) 式の振動数偏移では $|\phi|=\pi/2$ のとき

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_*}=\left(1-\frac{3M}{r}\right)^{1/2}\left[1\pm\left(\frac{r}{M}-2\right)^{-1/2}\right]^{-1} \qquad \begin{pmatrix}\text{向かってくるとき}-\\ \text{遠ざかるとき}+\end{pmatrix} \tag{11.24}$$

M/r が小さいとき，この振動数偏移は近似的に

$$\begin{aligned}\frac{\omega_\infty}{\omega_*} &= 1 \pm \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} - \frac{M}{2r} + \cdots \\ &= 1 \pm V + \frac{1}{2}V^2 - \frac{M}{r} + \cdots\end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{向かってくるとき}-\\ \text{遠ざかるとき}+\end{array}\right) \tag{11.25}$$

である．ここで $(M/r)^{1/2} = \Omega r \equiv V$ を使った[3]．(11.25) 式の最後の等号の V を含んだ項はドップラー効果 [(5.73) 式を参照] の最低次であり，残りの項は重力赤方偏移 [(9.20) 式を参照] の最低次である．

観測される輝線は円盤のいろいろな半径の光子からなっている．**最も小さい**半径は最も内側の安定円軌道であり，これはシュワルツシルト計量 [(9.43) 式を参照] では $r = 6M$ である．したがって円盤を真横から見るとき最も小さい周波数は $\omega_\infty/\omega_* = \sqrt{2}/3 = 0.43$ である．円盤が正面に見えるとき最も小さい周波数は $\omega_\infty/\omega_* = 1/\sqrt{2} = 0.71$ である．もし中心の物体が回転していれば，これらの値よりもずっと小さくなるだろう．一般的に，6.4keV の輝線は最小の振動数（最大赤方偏移）で広げられるだろう．この振動数は中心の天体の大きさと回転，円盤の視線方向からの傾き

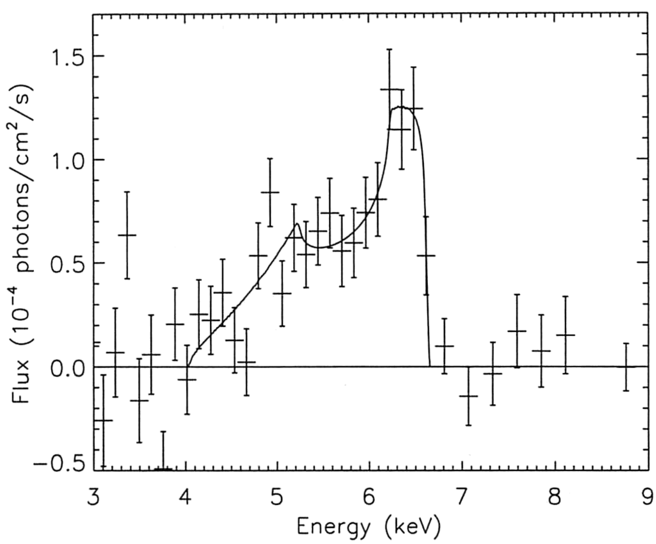


図 11.8　1994 年 7 月 ASCA X 線衛星によって観測されたセイファート I 型銀河 MCG-6-30-15 の広い鉄の輝線（Tanaka et al. 1995)．輝線をわかりやすくするために，連続 X 線を引き去った．輝線は広がっている 6.4keV の輝線に対応し，それより小さいエネルギーの方向に広がっている（赤方偏移)．実線は，視線方向に 30° の角度で傾いて，自転しない（シュワルツシルト）ブラックホールの周りを回転する円盤のモデルを仮定して，データに合わせた曲線である．この天体の他の特徴から，速く回転しているしている可能性があり，もっと精度のよいデータならば，中心の幾何学をもっと正確に調べられるだろう．

[3] 速度とポテンシャルエネルギーを間違えないように．

具合に依存している．さらに，ここではもうこれ以上詳しく分析しないけれども，輝線の形状は 5.5 節で考察した相対論的ビーミングにも影響され，他の放射源からもたぶん影響を受けるだろう．相対論的ビーミングによって輝線の赤い方の端よりも青い方の端の強度が増加するだろう．

図 11.8 は Tanaka et al.（1995）によって観測されたセイファート I 型銀河 MCG-6-30-15 の鉄の輝線と，時空がシュワルツシルト幾何学で，円盤が 30° 傾いていると仮定したときに得られるフィットである．輝線は以前考察したものと同じような値に赤方偏移し，強度は赤から青に向かって増加している．執筆時でデータの精度は，回転している天体と，していない天体を区別できず，円盤の傾きを正確に決められるほど十分でない．最大赤方偏移に達しているという事実は，天体がブラックホールであることを示唆している．コンパクト星の半径はシュワルツシルト幾何学の最も内側の安定円軌道よりも大きいであろう．X 線観測が進歩していくことにより，このような天体の最も内側の領域についてより多くのことが理解できるようになるだろう．

11.3 連星パルサー

すでに述べたように，中性子星の外部の幾何学は一般相対論の効果を知るためのよい場所である．1974 年 ハルス（Russel Hulse）とテイラー（Joseph Taylor）の 連星パルサー PSR B1913+16 の発見により，正確さを増して理解されるようになった．プエルトリコのアレシボ望遠鏡（図 11.9）の観測はそれ以来，一般相対論にとって非常に重要になっている．ハルスとテイラーは PSR B1913+16 の発見により，1993 年にノーベル賞を受けた．

PSR B1913+16 は約 7.75 時間の周期で互いを軌道回転する中性子星のペアである．中性子星は重力を自身で支えているが，太陽のような熱圧力ではなく，パウリの排他原理と中性子間の原子

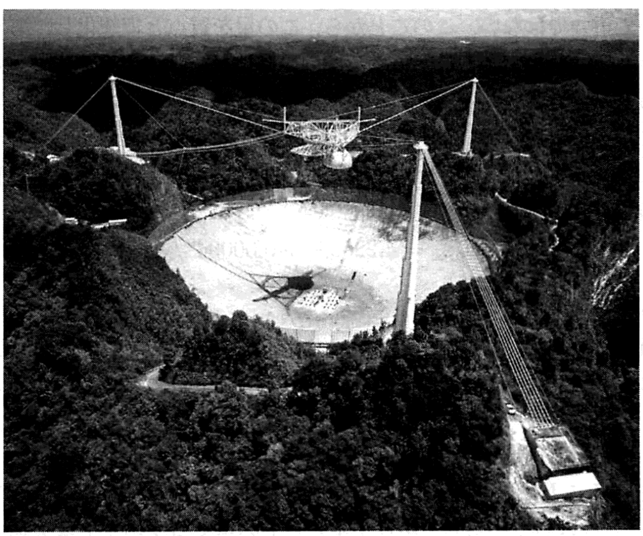


図 11.9 ハルス–テイラー連星パルサー PSR B1913+16 からの信号の測定が行われたアレシボ電波望遠鏡．

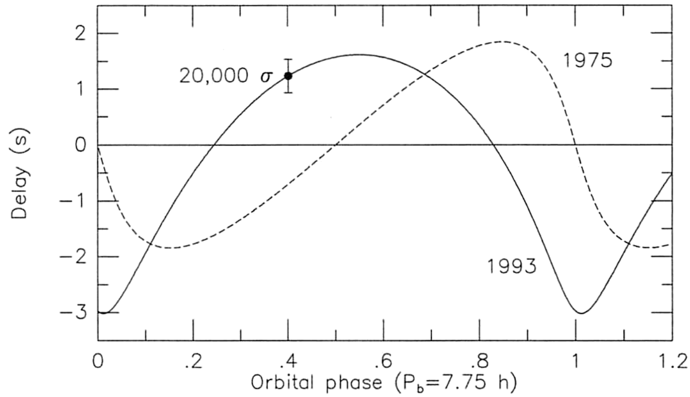


図 11.10　軌道位相の関数として表した，連星パルサー PSR B1913+16 からのパルスの到着時間の遅れ．水平軸は軌道周期の関数として測定された時間である．縦軸は平均到着時間からの相対的な進みまたは遅れで，単位は秒であり，これは伴星の中性子を回るパルサーの運動によって引き起こされる．別の年，遅れのパターンを示した．地球に対するパルサーの軌道面の方向が違うため，パターンの形には差が生じる．しかし，パルサー軌道の近星点の集積的な一般相対論的移動のため，軌道位相におけるパターンの全体的なズレも存在する．誤差棒の大きさからこれらの測定が非常に正確であることに注意せよ．

核相互作用によって生じる力で支えている．これらの力は原子核の密度かそれ以上のときに発揮される．これが中性子星がこんなにもコンパクトになっている理由である．典型的な中性子星は半径 10km の太陽質量よりわずかに重い天体である．コンパクトであるという以外に，この星の性質は軌道の分析において重要ではない．このことから，この星を質点と理想化し，第 9 章の計算を一般化することにより軌道は分析できることになる．執筆時には，このような中性子星の連星は多く知られているが，最初に発見された PSR B1913+16 は最も長く研究され，いろいろな意味で一般相対論の研究対象として最も優れている．中性子星ペアを例として考えよう．

PSR B1913+16 の軌道上における相対論的効果は大きい．近星点（惑星の近日点と似た最も近づく軌道位置）の歳差は

$$\delta\phi_{\rm prec} = 4.22659^\circ \pm 0.00004^\circ/{\rm yr} \tag{11.26}$$

である（図 11.10 を見よ）．

これは水星の近日点移動 (10.16) よりも 4 万倍大きい．これまでの章で考察した他の相対論的重力効果も同じように強くなる．重力赤方偏移と光の遅延はともにこの系で観測される．でもどうやって？

PSR B1913+16 の中性子星の 1 つはパルサーであり，強い磁場が存在する星で，速く回転して周りにプラズマを作ることで電波ビームの発生源となり，地球で周期的パルスとして観測できる（そのため**パルサー**と呼ばれている）[4]．中性子星としての重くコンパクトな天体の回転周期は外部からの摂動に対して非常に安定している．したがってパルサーは非常に優れた正確な時計である．

[4] ボックス 24.2 ではもう少し詳しくパルサーについて扱っている．

数年間にわたってパルサーの到着時間を測定し続けて，1984 年 7 月 7 日 GMT 0 時から約 6 時間後の回転周期を求めたところ

$$P\mathrm{rot} = 0.059029997929613 \pm 0.000000000000007\,\mathrm{s} \tag{11.27}$$

であった．周期は正確には一定ではなく，ゆっくり増加しており，その主な原因は回転磁化された星が電磁波を放出しているためである．同じ日時で測定された増加率 $\dot{P}_{\mathrm{rot}}$ は 8.62713×10^{-18} であった．

相対論的重力を利用して連星パルサー系の性質をどのように測定しているかを理解するためには，ニュートン重力でどのように分析されているのかを理解することが役に立つ[5]．通常の星だけからなる連星の楕円軌道は周期[6] P_b, 離心率 ϵ, 長軸半径 a（星の間の最長距離の半分），さらに星の質量と，相互軌道が向く方向は空間と時間で決めるパラメータによって特徴づけられる．典型的な連星系で長い期間にわたって観測されているものは一方の星の輝線に見られるドップラー偏移である．この偏移 [(5.73) 式を参照] の測定から星の速度の視線方向成分が時間の関数として表されている．これは**半径速度**曲線と呼ばれ，2 つの星の相互軌道について多くの情報を持っている．分析の詳細についてここでは触れないが，周期 P_b と離心率 ϵ は半径速度曲線から推測することができる．しかし，観測された星の軌道の長軸を a_1, 視線方向に対する軌道の傾きを i とすると ($i = \pi/2$ では軌道を横に見ることになる)，$a_1 \sin i$ の組合せだけしか決まらない（和 $a_1 + a_2$ が各星の長軸 a になる)．ニュートン力学では，個々の星の質量または全質量を決めるのには十分ではなく，質量関数と呼ばれる質量と i の組合せだけが求められる[7]．一般相対論ではもっとたくさんの情報が得られる．

連星パルサー系で観測されるものは，すでに述べたように非常に正確な電波パルスの到着時間である．パルスの到着時間は，ニュートン力学的分析で，P_b と ϵ, $a_1 \sin i$ を決めるのに使われたドップラー偏移の情報をすべて持っている．a_1 はパルサー軌道の長軸である．PSR B1913+16 に対して，$P_b = 27906.980895 \pm 0.000002$ 秒，$\epsilon = 0.617132 \pm 0.00003$, $a_1 \sin i = 2.34176 \pm 0.00001$ 光秒である．しかし到着時間はもっと多くの情報を持っている．特に，連星系の運動とそこを通ってくる電波信号の伝達に影響を与えるさまざまな $1/c^2$ 相対論的効果の情報を持っている．これら $1/c^2$ 効果から，ニュートン近似から得られる情報量よりも多くを引き出すことができる．

たとえば，すでに述べたように，近星点 (11.26) として大きな観測値が得られている．軌道当たりの歳差角 $\delta\phi_{\mathrm{prec}}$ に対する一般相対論的予言 (9.57) は第 9 章でテスト質量に対してだけ得られたのだが，連星系に対しても M をパルサーとその伴星の全質量 M_{tot} に置き換えることによって成り立っていることがわかる．ニュートン近似で離心率 ϵ が決まると，(9.57) 式のように，近星点移動により M_{tot}/a が決まる．ケプラーの法則[8]

$$P_b^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\mathrm{tot}}} a^3 \tag{11.28}$$

---

[5] ここで使われる語句に不慣れなら，ニュートン力学の教科書を復習したほうがよいかもしれない．

[6] 2 つの星の相互軌道の軌道周期 P_b と 1 つのパルサーの回転周期 P_{rot} を混同しないように．

[7] このことについてもっと知りたければ，例 13.1 を見よ．

[8] 1 つの質量がもう 1 つの質量よりも大きく，軌道が円のときには，基礎的な力学の本または (3.24) 式を見よ．

は $M_{\rm tot}$ と a の関係を与え，これは両方とも決まる．$M_{\rm tot}$ の結果は $M_{\rm tot} = 2.82827 \pm 0.00004 M_{\odot}$ である（a については問題 10 を見よ）．

近星点移動がパルス到着時刻から決まる唯一の $1/c^2$ 相対論効果ではない．光が軌道を横切って進むと [(9.92) 式を参照]，シャピロ時間遅延と同様に，$1/c^2$ のオーダーのドップラー効果への影響 [(5.73) 式を参照] が測定される．細かいことは省略するが，これらからパルサーとその伴星それぞれの質量を決めることができ，その結果 $M_{\rm pulsar} = 1.442 \pm 0.003 M_{\odot}$ と $M_{\rm comp} = 1.386 \pm 0.003 M_{\odot}$ となる．したがって，ニュートン重力で決められない連星系の性質が相対論的補正を通じて決められる．さらに，軌道周期の変化率を決めることが，23.7 節で考察するように，重力波の効果の最初の検出と，一般相対論によるテストになる．連星パルサーは一般相対論の実験室であり，軌道の相対論的補正は天文学の手段である．

問題

1. 太陽を重力レンズとして使って遠い天体の像を結ばせるためには，観測所は太陽からどれだけ離れた軌道を運動していなければならないか．
2. **重力レンズ像の個数が奇数であること**　実際の重力レンズは，11.1 節の考察で仮定したように，質点でなく，広がった質量分布をしている．質量が広がっているとき，レンズでは像の数が奇数個できる．簡単なモデルとして，重力レンズが半径 r_*, 視線方向に垂直に向いた質量密度 σ の透明な円盤であると仮定する．薄レンズ近似を使うと，(11.6) 式によって与えられる 2 つの像に加え，円盤に張られる角度の内側に第三の像ができることを示し，その角度 θ を求めよ．湾曲角内の質量だけが光の湾曲に影響を及ぼすと仮定せよ．
3. 星の視線方向が重力レンズの視線方向からかなり離れているとき，レンズ効果は無視できる．$\beta \gg \theta_E$ のとき $\theta_+ \approx \beta$, $\theta_- \approx 0$, $I_+/I_* \approx 1$, $I_- \approx 0$ を示せ．これらの結果から重力レンズ効果が無視できることがなぜいえるかを説明せよ．
4. (11.12) 式の光路差を求めよ．
5. [E](11.12) 式から重力レンズで 2 つの像ができる光路差を評価できる．この効果による 2 つの像の到着時刻の差は $\Delta D/c$ である．9.4 節で考察したシャピロ遅延が競合する効果になるかどうか評価せよ．
6. 典型的なマイクロレンズ効果事象で，運動する重力レンズが遠い光源の視線方向の近くを通る．(11.11) 式によって定義される増光 $I_{\rm tot}/I_*$ は時間とともに増加しそして減少する．予測される比を，アインシュタイン角 θ_E を横切る時間 $t_{\rm var}$ を単位とした時間と p,（比 $\beta_{\rm closest}/\theta_E$）で表せ．$\beta_{\rm closest}$ は，レンズと光源の最小角度差である．これらの単位で，比 $I_{\rm tot}/I_*$ を時間の関数として $p = 0.1$, $p = 0.3$, $p = 0.7$ の場合にプロットせよ．描いた曲線は図 11.6 のようになっているか．
7. (a) 図 11.6 のレンズ事象で，光源の星の視線方向にレンズが近づいたとき β/θ_E はどうなるか．（問題 6 を行えばこの問題を解くときの参考になるかもしれない）
   (b) レンズの角度位置が θ_E を移動するのにかかる時間 $t_{\rm var}$ を求めよ（粗い評価または問題 6 の結果をデータにフィットすることができる）．
   (c) レンズが視線方向から見て速度 $V = 200 \mathrm{km/s}$ で横切り，地球と銀河中心の間のちょう

ど中間に位置すると仮定して，レンズの質量を評価せよ．（太陽と銀河中心の距離は約 8.5kpc である）

8. [E,P] 鉄原子から最も内側の電子を取り去るのに必要なエネルギーを eV で**評価せよ**．どんな温度で（keV または K で）鉄の原子が完全にイオン化されるだろうか．2keV の温度で鉄の電子が何個原子に残っていると考えられるか．

9. [B,E] ある X 線源では質量 $6M_\odot$ のブラックホールに質量が降り積もることによって光度 $L = 3 \times 10^{36}$erg/s のエネルギーが発生している．最も内側の安定円軌道ですべてのエネルギーが放出されると仮定し，質量がブラックホールに降り積もる時間率 $\dot{M}$ を $M_\odot$/yr で**評価せよ**．

10. (a) 本文の PSR B1913+16 のデータから，軌道の長軸 a と視線方向から傾いた角度 i を決めよ．（有効数字 3 桁で十分である）
    (b) 伴星について何かいえるだろうか．太陽のような普通の星であろうか．

第 12 章

重力崩壊とブラックホール

星の命の歴史は，重力の収縮する力と，原子核を組合せてエネルギーを放出する反応（**熱核燃焼**と呼ばれる過程）で熱せられたガスが膨張しようとする力の相互影響の歴史である．星の一生は，ほとんど水素とヘリウムからなる星間ガス雲が重力崩壊することから始まる．そのガスは周りよりも冷たく，高密度か，または運動エネルギーの低い状態になっている．圧縮による発熱のため，コアの温度が上り，熱核反応に火がつき，水素を燃やしてヘリウムをつくり，熱を放出するほどになる．そして星は定常状態に達し，放射として失われるエネルギーと，水素の熱核燃焼によって作られるエネルギーがバランスをとる．これが太陽の現在の状態である．

しかし遂には，星はコアの水素をほんど使い果たし，もはや熱核燃料では放射によって失われるエネルギーを供給することができなくなる．重力的収縮が始まり，再び圧縮による発熱により温度が上り，ヘリウムを燃やして他の元素に変える反応が起きる．星は明るくなり，表面温度が変わる．最後にはヘリウムのほとんどは使い果たされ，コアは再び収縮し始め，熱核燃焼の次の段階が始まることになるだろう．

この進化はどこで終わるのだろうか．^{56}Fe は星の中で作られるどんな原子核よりも核子当たりの結合エネルギーが最も大きいので（図 12.1 を見よ），核融合はいつまでも続くわけがない．鉄または周期表でその近くの原子核は燃えても より強く結合した原子核になれず大きなエネルギーを解放することはできない．これらの核はすでに最も強く結合した核だからだ．したがってこれら「鉄ピーク原子核」は熱核燃焼の燃えカスである．

熱核燃料が燃え尽きると，星に何が起きるだろうか．2 つの可能性がある：最終状態が平衡状態の星であり，重力を**非熱源の圧力** によって支える星になるか，または星は決して平衡状態にたどり着けず，**重力崩壊し続ける**状態になるか，どちらかになる．

圧力の非熱源はいくつかあり，第 24 章で詳しく考察する．パウリ排他原理により，2 つの電子は同じ量子状態で存在することが禁止されるため，圧力が生じる．これはフェルミ圧力と呼ばれる．中性子や陽子にも同じようなフェルミ圧力がある．これは核力の反発力によって生じる非熱的圧力である．電子のフェルミ圧力によって重力崩壊を支えている星は**白色矮星**と呼ばれる．**中性子星**は核力による中性子の圧力で支えられている．これら 2 つの星の最終平衡状態は通常の星よりもかなり小さく高密度である．白色矮星の質量は太陽（$M_\odot \sim 1.5$km）と同じオーダーかもしれないが，半径はたった数千キロメートルである．同じ質量の中性子星はなんと 10km かもしれない．$M/R \sim 1/10$ であるため，時空は中性子星の外部でそこそこ曲がっている．第 24 章までこれらの星について詳しくは議論しないことにしよう．それに見合う考察をするには，非常に高密度の物質

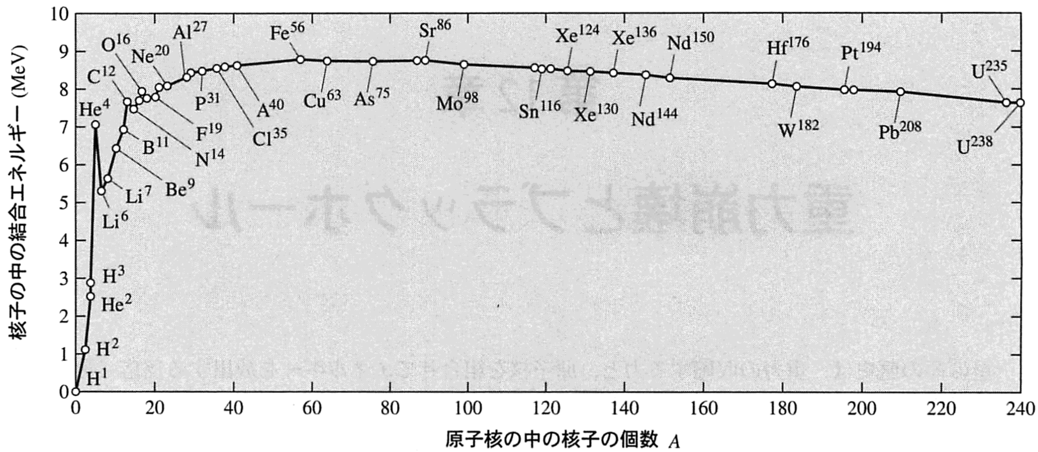


図 12.1　原子核は陽子と中性子（核子）の結合した集合体である．原子核の結合エネルギーは全エネルギーと，構成していた核子が分解したときの個々の核子のエネルギーの差である．この図は，核子当たりの結合エネルギーを原子核中の核子数の関数として表したものである．

の性質を知る必要があるが，それには一般相対論を超えた別の物理が必要だからだ．

この章ではそこまではせず，星の進化の第二の最終状態，ブラックホールにいたる進行中の重力崩壊の状態を中心に考察することにする．回転しない物体には，フェルミ圧力または核力によって重力崩壊を支えられる最大質量が存在するため，この可能性は当然存在する（239 ページのボックス 12.1 を見よ）．この質量は $2M_\odot$ の近傍にある（原子核密度より大きな密度をもつ物質の性質の知識が不確かなため，正確な値はよくわからない）．この上限よりも重い星は存在する．崩壊状態に陥らざるを得ない星が存在するだろう．それが我々が今から調べようとするものである．

12.1　シュワルツシルトブラックホール

エディントン–フィンケルシュタイン座標

重力崩壊の物理の本質を捕えるため，理想的な場合を考えよう．それは崩壊天体とその外部の時空が球対称であるという理想的な場合である．ニュートンの定理（35 ページの例 3.1 を見よ）から，球対称物体の外部のニュートン重力ポテンシャルは $-GM/r$ で与えられ，物体が時間とともに変化するかどうかには無関係である．したがって質量が保存するため，外部のポテンシャルは時間に無関係である．一般相対論でも同じような定理から，質量分布は時間と独立であるけれども球対称重力崩壊の**外部**の幾何学は，第 9 章ですでに調べた時間独立なシュワルツシルト幾何学になることが示されている[1]．

重力崩壊が進むにつれて，シュワルツシルト幾何学 (9.1) の姿が表れてくる．そして今から我々は半径 $r = 2M$ と $r = 0$ のシュワルツシルト計量の特異点と，$r = 2M$ で g_{tt} と g_{rr} の符号が逆

[1] 第 21 章をすでに読んでいれば，問題 18 を行うことで自分で確かめられる．

ボックス 12.1 白色矮星の最大質量

白色矮星はパウリの排他原理から生じる電子の圧力によってそれ自身の重力を支えている．排他原理とは，電子が同じ量子状態になることができないことをいう．この圧力はフェルミ圧力と呼ばれ，それに対応する圧縮エネルギーはフェルミエネルギーと呼ばれる．フェルミ圧力によって重力を支えることのできる最大質量を粗く**評価**するために，A 個の電子と A 個の陽子からなる半径 R の球形（その結果電気的に中性になる）の重力エネルギーとフェルミエネルギーの間のせめぎ合いを調べる．この評価は第 24 章の詳しい計算により裏付けられる．特に図 24.5 による．

重い陽子は質量のほとんどを担い，軽い電子は圧力のほとんどを支える．電子は互いに斥け合うので，半径 R の球の体積に A 個の電子がすべて存在するように，個々の電子は特徴的な大きさ λ の体積を占めていると考えることができる．つまり，$\lambda \sim R/A^{1/3}$ である．ド・ブロイの関係式から，電子の特徴的な運動量 p_F は

$$p_F \sim \hbar/\lambda \sim A^{1/3}\hbar/R \tag{a}$$

となる．

もし球が圧縮されると，R は縮み，p_F は大きくなり，電子のフェルミエネルギーも上昇し，圧縮により仕事が行われなければならない．簡単のため，電子が相対論的になり，個々のエネルギーが $E = [(p_F c)^2 + (m_e c^2)^2]^{1/2} \approx p_F c$ であるような点にまで圧縮されると仮定する．この仮定は最も重い白色矮星に対して正当化されることがわかる（問題 2）．この近似で全フェルミエネルギーは

$$E_F \sim A(p_F c) \sim A^{4/3}\hbar c/R \tag{b}$$

である．陽子は重力エネルギー E_G のほとんどを与え，ほぼ

$$E_G \sim -G(m_p A)^2/R \tag{c}$$

である．ここで m_p は陽子質量であり，$m_p A$ は全質量である．重力エネルギーは負である．

フェルミエネルギーと重力エネルギーはともに $1/R$ のように変化する．A が十分大きければ，全エネルギーは負になり，エネルギー的に崩壊する形態をとりやすくなる．重力崩壊しやすい臨界的な A は

$$A_{\text{crit}} \sim (\hbar c/G m_p^2)^{3/2} \sim 10^{57} \tag{d}$$

となる．臨界質量はオーダーの評価をすると

$$M_{\text{crit}} \sim m_p A_{\text{crit}} \sim M_\odot \tag{e}$$

となる．最大質量の厳密解はチャンドラセカール質量と呼ばれ，ほぼ $1.4M_\odot$ であり，第 24 章で考察することにする．

転する意義を直視しなければならない．この節では崩壊物にぶつからないで $r = 0$ にまでいたるシュワルツシルト幾何学の特質を考察する．シュワルツシルト計量の特異点 $r = 2M$ は時空幾何学の特異点ではなく，シュワルツシルト座標の特異点であることがわかるだろう．これは 126 ページで考察した意味で**座標特異点** である．これを示すために，計量が $r = 2M$ でも特異にならない座標系を 1 つ示すだけで十分だろう．このような座標系はたくさんあるが，エディントン–フィンケルシュタイン座標は特に簡単な例である．これらの座標を使うと，なぜシュワルツシルト幾何学がブラックホールであるのか理解できるようになるだろう．

エディントン–フィンケルシュタイン座標を導入するために，シュワルツシルト座標 (t, r, θ, ϕ) から出発する．これは (9.9) 式でまとめられている．シュワルツシルト時間座標 t を

$$\boxed{t = v - r - 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|} \tag{12.1}$$

で定義される v に置き換える．$r < 2M$ または $r > 2M$ のどちらから始めても，線素 (9.9) で t

を v に置き換えた場合と同じ結果になる（問題 3）：

エディントン–フィンケルシュタイン座標のシュワルツシルト幾何学

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{12.2}$$

これは決して新しい幾何学ではない．シュワルツシルト計量 (9.9) で代表される時間独立球対称幾何学であるが，点の番号づけに別の座標系を使っているだけである．

(12.2) 式がシュワルツシルト計量から $r < 2M$ または $r > 2M$ のどちらから出発しても得られるという事実は，これら 2 つの領域はシュワルツシルト計量の特異領域で分けられるけれども，実際には滑らかにつながれていることを示している．さらに (12.2) 式に $r = 2M$ の特異点がないことから，シュワルツシルト座標のそこにある特異点が，単なる座標特異点であることがわかる．線素 (12.1) はシュワルツシルト半径の外側と半径上，内側の物理を記述するのに適している．その非特異的な特徴は，半径 $r = 2M$ を通って落下する観測者は局所時空について何も特別なものは見ないということだ．エディントン–フィンケルシュタイン座標はしたがって外側から重力崩壊する星の研究に便利である．

大きな r で計量 (12.2) は平坦時空に近づく．(12.1) 式の対数部分が r に対して無視できるようになるので，t の代わりに $v - r$ で置き換えた通常の平坦計量 (7.4) になる．したがって線素 (12.2) は r の大きな領域と小さな領域をつなぐ架け橋となる．計量には $g_{vr} = g_{rv} = 1$ があり非対角的であるが，これは大きな r と小さな r の物理を非特異的に接続することの利点に対する小さな代償である．

$r = 2M$ の状況と $r = 0$ の状況を対比してみる．そこではシュワルツシルト座標系とエディントン–フィンケルシュタイン座標系ともに特異である．21.3 節で定量的に調べることになるが，$r = 0$ は時空曲率と重力が無限大となる位置であり，そこは現実の物理的特異点である．$r = 0$ に落下している観測者は局所時空に確実に何か特別なものを見るだろう．そして観測者は死ぬであろう．

シュワルツシルト幾何学の光円錐

シュワルツシルト幾何学をブラックホールとして理解するためのカギは半径方向に進む光線の振る舞いにある．光線は $d\theta = d\phi = 0$（半径的）$ds^2 = 0$（ヌル）の世界線を進み，(12.2) 式から

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dv\,dr = 0 \tag{12.3}$$

である．これからすぐわかる結果は，半径的な光線が

$$v = 一定 \qquad （内向き半径方向の光線） \tag{12.4}$$

の曲線上を進むということだ．(12.1) 式から，v が一定になるため，t が大きくなると r も小さくならなければならず，これらが**内向きの**光線になることがわかる．(12.3) 式のもう 1 つの解は

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv + 2dr = 0 \tag{12.5}$$

である．これは dv/dr について解くことができ，積分により半径方向の光線は曲線

$$v - 2\left(r + 2M\log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right) = 一定 \qquad \left(\begin{array}{l}外向き\ r > 2M\\ 内向き\ r < 2M\\ の半径方向の光線\end{array}\right) \tag{12.6}$$

を運動することがわかる．これらの光線の 1 つはブラックホールから離れているとき，(12.1) 式が示すように，(12.6) 式は $t = r+$ 定数 となるので，**外向き**である．しかし，$r < 2M$ のとき，これらの光線は v が増加すると r が減るので**内向き**である．

$v =$ 一定のヌル曲線と (12.6) 式に加え，(12.3) の特解（特殊解）がある．曲線 $r = 2M$ は (12.3) 式を満たし，内向きや外向きのどちらでもなく，同じ r に留まる定常的な光線を表す．

図 12.2 は，シュワルツシルト幾何学における半径方向の光線の世界線をエディントン-フィンケルシュタイン座標で表した時空図である．v 一定のヌル線は，縦軸に $\tilde{t} \equiv v - r$ を使うことで，平坦空間でそうであるように，45° の角度でプロットされている．$r = 2M$ で光線は実線で表されている．数個の交点に未来光円錐が表されている．光円錐は $r = 0$ に近づくほど傾いていく．半径方向の光線は $r = 2M$ の外と内では定性的に違った振る舞いをする．$r > 2M$ の各点で，半径方向の光線（$v =$ 一定のもの）は r の小さい値に向かって進むものもあるし，r の大きな方向に進むものもある．それに対して，$r < 2M$ では，半径方向の光線は**両方とも** r の小さい値の方向に向かい，最後には $r = 0$ の特異点にぶつかる．2 つの領域を分ける境界 $r = 2M$ で，内向きに運動する光線があり，定常的にシュワルツシルト半径に留まる光線もある．よって，$r = 2M$ 面は時空を 2 つの領域に分ける．光が無限遠に脱出できる $r = 2M$ の外側の領域と，光ですら脱出できないほど重力が強い $r = 2M$ の内側の領域である．これが**ブラックホール**幾何学を明確にする特徴である．$r = 2M$ の面はブラックホールの**事象の地平**（またはより短く単に**地平**）と呼ばれる．

地平と特異点と幾何学

地平 $r = 2M$ は，7.9 節で一般的に考察した種類の時空中の 3 次元ヌル面である．法ベクトルは r 方向に向く，ヌルベクトルである（問題 12）．平坦空間における未来ヌル円錐のように，地平には一方通行の性質があり，一度入ると戻って来ることができない．しかしながら，平坦空間における光円錐と違い，地平は定常的であり膨張していない．地平は，特異点に落ち込まず，無限遠に脱出しない半径方向の光線によって作られる．

地平の $v =$ 一定スライスは，計量 $d\Sigma^2 = (2M)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ をもつ 2 次元面である（このことを知るためには (12.2) 式に $r = 2M$ と $v =$ 一定をただ代入せよ）．これは面積 $A = 16\pi M^2$ の球面の幾何学であり，**地平の面積**と呼ばれる．この面積は時間独立なシュワルツシルト幾何学の中で v に無関係で，変化しない．しかし，物質が球対称な方法でブラックホールに落下すると変わるだろう．そのときには質量は増え，面積は増加するだろう（この状況は 248 ページでさらに考える）．

平坦時空で極座標を使うと [(7.4) 式を参照]，$r = 0$ は，常に局所光円錐の内側にある時間的世界線であり，いつでも空間中にある場所である．シュワルツシルト幾何学ではそうならない．$r = 2M$ の内側では，r 一定の面は**空間的**である．(12.2) 式で $r =$ 一定とおけば，$r < 2M$ では g_{vv} が正であるため，すべての方向が空間的となる面の線素を得ることができる．特に特異点

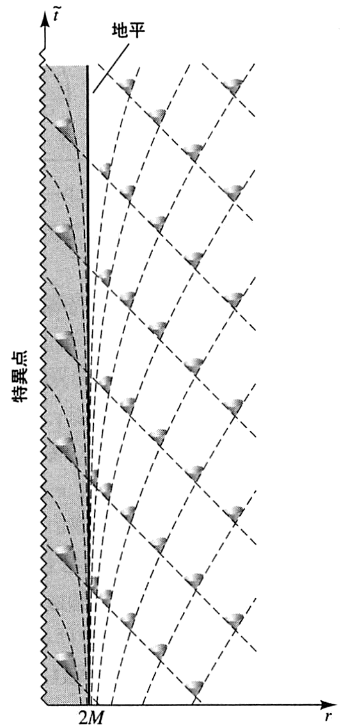


図 12.2　シュワルツシルト幾何学の半径方向の光線．シュワルツシルト幾何学の典型的な半径方向の光線がエディントン–フィンケルシュタイン座標 ($\tilde{t} \equiv v - r, r$) でプロットされている．2 つの半径方向の光線が図の各点を走っている．$v =$ 一定の曲線または等価であるが，$\tilde{t} = -r+$ 一定の曲線上で最終的に $r = 0$ の特異点に到達する内向きの光線が存在する．各点を通るもう 1 つの半径方向の光線は (12.6) 式によって与えられる．これは，$r > 2M$ にあれば外向きに無限遠に伝わるが，$r < 2M$ の領域にあれば特異点に内向きに崩壊する．よって光線は $r < 2M$ の領域から脱出することはできない．粒子の時間的世界線は各点の光円錐の**内部**になければならず，粒子も脱出できない．$r = 2M$ の太い縦の直線はシュワルツシルトブラックホールの地平であり，これは，光線が各点から無限遠に脱出できる領域（影なし）と何ものも脱出できない領域に分かれる．空間がもう 1 次元多い代表例を見るには，図 12.4 へ行け．

$r = 0$ は空間的曲面である．$r = 2M$ の内側の $r =$ 一定空間面は時空を空間と時間に分解する方法を定義する．そこでは r が 7.9 節で述べたように，時間のようなはたらきをする．シュワルツシルト幾何学の $r = 0$ 特異点は空間中の場所ではなく，時間の一瞬である（別の観点としては，253 ページのボックス 12.4 を見よ）．

ボックス 12.2 ブラックホールの神話

ブラックホールが呑み込もうとすることには抵抗できない．これは SF にみられるよくある誤解である．実際，質量 M の球対称ブラックホールは同じ質量の球対称星よりも外側の質量を強く引きつけることはない．それらの外部の時空は同じシュワルツシルト幾何学である．もしも太陽が明日，同じ質量の球対称ブラックホールにどうにかして置き換わったとすると，地球の天候は大きく変わるだろうが，地球の軌道はほとんど変わらないだろう（「ほとんど」とは太陽が厳密には球対称ではないからである）．

しかし，見方を変えれば，ブラックホール（またはどんな球対称質量でもよい）の近くから脱出することは同じ質量のニュートン的中心体から受ける引力よりも困難なのではないか．ロケット噴射を使って，質量 M の球対称ブラックホールの外側にあるシュワルツシルト座標半径の一定値 R に留まることを思い浮かべよう．質量 m のロケット噴射をどれだけ強くする必要があるのだろうか．この軌道を維持するために必要な 4 元力 $\mathbf{f}$ は，ニュートンの第二法則 $F = ma$ の曲がった時空への自然な一般化から求まる：

$$f^\alpha = m\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\right) \tag{a}$$

これは，空間が平坦なとき特殊相対論の運動法則 (5.35) になり，力が消えたとき測地線運動 (8.14) になる．半径 R の定常軌道に対して，$dx^\alpha/d\tau \equiv u^\alpha = [(1-2M/R)^{-1/2}, 0, 0, 0]$ になる [(9.16) 式を参照]．これを使って，(a) 式を評価すると，$\mathbf{f}$ の半径方向の座標成分は $f^r = mM/R^2$ になる．しかし，必要とされる噴射を測定するのに重要なものは，ロケットに乗っている観測者の正規直交基底の座標半径成分 f^{hatr} である．これは

$$f^{\hat{r}} = m\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}\frac{M}{R^2} \tag{b}$$

である（問題 17）．必要な噴射はニュートン的な M/R^2 よりも大きく，半径 R が $2M$ に近づくと無限に大きくなる．

12.2 ブラックホールへの崩壊

前節のシュワルツシルト幾何学の描像をブラックホールに置き換えて球対称星の崩壊の考察に戻ろう．崩壊している星の表面で半径方向に運動する粒子は，他の粒子と同じように，粒子の通過する時空の各点がつくる光円錐内の時間的世界線にしたがう（図 4.10）．無限遠で静止した状態から落下し始めた無圧力物質の崩壊球の表面上の世界線を例 12.1 で考察し，簡単な例として図 12.3 と 12.4 で説明する．

崩壊面の外側で，球対称崩壊の幾何学はシュワルツシルト幾何学であり，星がシュワルツシルト半径 $r = 2M$ を通った後にできた地平にも，$r = 0$ にぶつかった後にできた特異点にも使える．面の内側では（図 12.3 の濃い影のついた領域）幾何学は違い，物質の性質に依存するが，表面ではシュワルツシルト幾何学と一致する．[2]

これからの考察で，物質の性質について知る必要はないだろう．

例 12.1. ダストでできた崩壊球の表面の世界線 「ダスト」とは相対論用語で無圧力物質を意味する．圧力がないので，ダストの崩壊球の表面をなしている最外粒子は自由に落下し，シュワルツシルト幾何学の半径方向の測地線にしたがう．$t = -\infty$ で $r = \infty$ から始まった球の半径方向の測地線は第 9 章で計算した [(9.38) 式と (9.40) 式を参照]．この測地線上における r と固有時 τ の関係

[2] もし電磁気学を学んでいれば，似たような状況に慣れているだろう．球対称電荷分布の内部の電位は電荷の分布の仕方に依存するが，外部は全電荷によって決まる $1/r$ の形の電位になる．

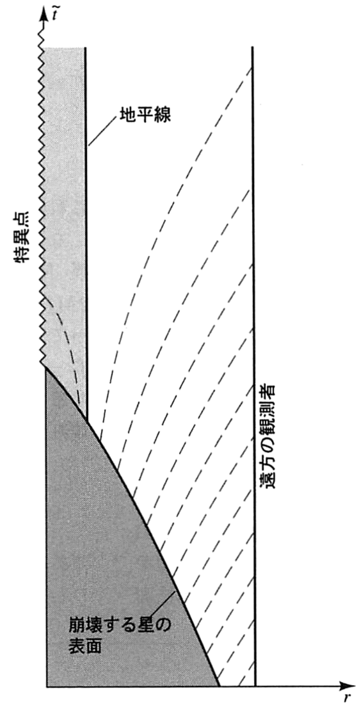


図 12.3　崩壊する球対称星の幾何学にいる 2 人の観測者の物語．一人は星の外に固定されたシュワルツシルト座標半径 r_R にいる．もう一人の観測者は星の表面にしたがい小さい半径へ沈み，表面とともに落下する時計にしたがって等固有時間隔で光信号を発信する．光信号は点線に沿って遠方の観測者に届く．$r = 2M$ の半径に達する以前に放たれた光線だけが遠い観測者に届く．したがって遠方観測者は星の表面が $r = 2M$ を通りすぎるのを見ることはない．パルスの間隔は，遠方の観測者の時計で測るとどんどん長くなっていく．落下している星からの光はどんどん暗くなり，大きく赤方偏移されるようになる．ブラックホールができる．崩壊星表面の外側のエディントン–フィンケルシュタイン図だけ（影が濃くない）が意味がある．表面では幾何学は星の内側の幾何学と一致し，内側はシュワルツシルト幾何学ではない．

は (9.38) 式で

$$r(\tau) = (3/2)^{2/3}(2M)^{1/3}(\tau_* - \tau)^{2/3} \tag{12.7a}$$

として与えられる．ここで τ_* は積分定数で，星の表面がどの半径方向の幾何学にしたがうかで決まる．表面が $r = 2M$ を通過するシュワルツシルト時間座標 t は，(9.40) 式にしたがうと無限大になる．しかし，無限大になることはシュワルツシルト座標の特異な性質の結果である．落下する観測者がどんな半径から出発しても地平にたどり着くまでの固有時は (12.7a) 式からわかるように有限になる．さらに (9.40) 式と (12.1) 式から（$r = 0$ のとき $\tilde{t} = 0$ に選ぶ）r の関数として v は

$$\frac{v(r)}{2M} = -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} + \frac{r}{2M} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2\log\left[1 + \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}\right] \tag{12.7b}$$

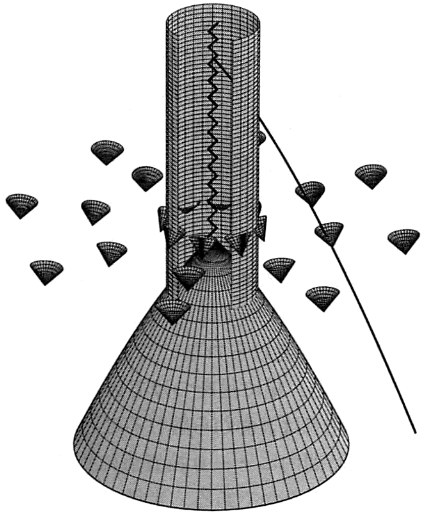


図 12.4 ブラックホールの形成．ブラックホールを形成する球対称重力崩壊の本質的な特徴がこの 3 次元時空図に表されている．エディントン–フィンケンルシュタイン座標 ($\tilde{t} \equiv v-r, r, \phi$) が，図中で点に番号をふるための円筒座標として使われている．$\tilde{t}$ は縦に伸び，r は対称軸からの半径として，ϕ は軸からの方位角として使われている．下の面は，星の半径が小さくなり，$r=0$ の特異点に進んでいくとき，崩壊星の面によって掃かれる世界面である [(12.7) 式を参照]．縦方向の円筒はシュワルツシルト半径 $r=2M$ の地平である．地平は遠方の観測者から特異点を隠すが，それがわかるように図中では切り取っている．無限遠において静止状態から自由落下し始めた観測者の世界線が地平を通り特異点に入って行くところを示した．$\tilde{t}=$ 一定面上のいろいろな半径にある未来光円錐の方向が描かれている．図 12.2 の半径方向の光円錐で説明したように，これらは特異点に近づくにつれ中心に傾いていく．

によって与えられるので，特異にならない座標 $v, \tilde{t}$ でも有限である．いちど地平を通りすぎると，球はそれから固有時 $4M/3$ で $r=0$ の特異点にぶつかる．太陽質量のダストでは 10^{-5} 秒のオーダーになる．これらの測地線の 1 つは図 12.3 で説明した面であり，図 12.4 にも示した．

---

2 人の観測者 –内側の物語

球対称崩壊の観測的な結果を理解するために，図 12.3 の太い線の世界線で表される 2 人の観測者を考えよう．一人は星の表面にいて $r=0$ まで行く．もう一人は遠く離れた半径 $r=r_R$ に固定されている．星の表面の外側の幾何学は計量 (12.2) で表されるシュワルツシルト幾何学である．濃い影の領域で，幾何学は星の内部の幾何学に置き換えられる．落下する観測者は時計をもち，自分の時計にしたがって同じ時間間隔で光信号を送ることにより遠い観測者と連絡をとっているとする．これらの光線の世界線は図 12.3 では点線になっている．

星の表面が $r=2M$ を通りすぎた後発光されたパルスは r の大きな値には進めない．むしろ図 12.2 に示したように r の**小さな**値に進んで行き，最後には $r=0$ の特異点にたどり着く．いっ

たん $r = 2M$ の曲面を通りすぎてしまうと，重力が強すぎて光でさえも無限遠に脱出できなくなり，特異点に引き戻される．いずれにしても $r < 2M$ から脱出できる粒子の軌跡は存在せず，その軌跡は光円錐の中にある（問題 10）．したがって落下観測者がいったんシュワルツシルト半径 $r = 2M$ の内側に入ってしまうと，遠い観測者と情報をやりとりする方法は存在しない．逆に，遠い観測者は $r = 2M$ の内側のどこからも情報を得ることはできない．

一度，シュワルツシルト半径 $r = 2M$ を通過すると，特異点への重力崩壊は星にとって避けられない運命となる．高密度で新しい圧力源がないため，大きさ 0 の無限大密度への崩壊から救うことはできない．崩壊が球対称である限り，表面は半径方向の**ある**時間的世界線を進まなければならなず，図 12.2 に示したように，これらの**すべて**は $r = 0$ の特異点につながる．星が地平の内部で球対称でなくなっても特異点への崩壊は避けられないことがわかる（247 ページのボックス 12.3 を見よ）．$r = 2M$ を通過してしまうと，星に足をつけている観測者には特異点での破滅から逃れる術はない．ロケットを使って，観測者は表面から離れることができるが，ロケットが進むことのできるすべての時間的測地線は有限時間内に $r = 0$ 特異点に到達する（問題 14）（半径方向の世界線に対してそうなるのは図 12.2 から明らかである．半径方向でないものについては問題 10 を行え）．避けることのできない特異点はブラックホールの外にいるすべての観測者から隠されたままである．重力崩壊の本質的な特徴の 3 次元時空図については，図 12.4 をよく見よ．

2 人の観測者 –外側の物語

潰れる星にしたがう観測者が見る崩壊の歴史は劇的であるが，宇宙物理学でより重要となるのは遠方の観測者から見える一連の事象である．我々がどんな重力崩壊に対しても遠方観測者であるからだ（そう願いたい）．遠方の観測者には，星が半径 $r = 2M$ を通過するのを決して見ることはない．遠方に到達する最後の光信号は，星がこの半径を通りすぎる直前で放出される．さらに，落下観測者が等間隔で発信するパルスは，遠い観測者の時計で長い間隔をおいて到達する．大きい r_R で，時計の測定値は時間間隔 $\tilde{t}$ のよい近似である [(12.1) 式を参照]（同様にシュワルツシルト時間 t の間隔もよい近似である）．図 12.3 から受信信号間隔は，$\tilde{t}$ で時間が経つにつれて長くなることは明らかである．星からの光は大きく赤方偏移を受け，星の表面が $r = 2M$ にたどり着くと赤方偏移は無限大になる（例 12.2 で定量的に考察をする）．

例 12.2. **崩壊星から受信した光の赤方偏移**　遠方の観測者によって受信される時間で測ると，(12.7) 式にしたがう崩壊星の表面から出た光の赤方偏移は無限大になるのだが，エディントン–フィンケルシュタイン座標を使えば，その様子を定量的に分析することができる．図 12.3 で説明した状況を思い出せ．崩壊星の表面上にいる観測者が短い固有時で等間隔 $\Delta\tau$ または，一定の振動数 $\omega_* = 2\pi/\Delta\tau$ で半径方向に光線を放出した．表面が座標値 (v_E, r_E) となる球を通ったとき放たれた光線は，遠い半径 $r = r_R$ で，静止観測者の固有時 t_R で測った間隔 Δt_R で，つまり $\omega_R(t_R) = 2\pi/\Delta t_R$ で受信された．$\omega_R(t_R)$ は t_R とともにどのように変わるだろうか．

発信と受信の事象をつなぐ外向きの光線は曲線 (12.6) の 1 つである．落下観測者の発信位置 (v_E, r_E) で評価された (12.6) 式の左辺の値は，受信位置で表されたとき同じ値でなければならない．r_E が $2M$ に近づくと (12.6) 式の対数項がすべての項の中で優勢になるが，r_R が大きくなる

ボックス 12.3 捕捉面と特異

表面がシュワルツシルト半径の外側にあり，大きな半径の同心球 T で囲まれている球対称星を考える．球 T がフラッシュを発光するところを想像しよう．球対称パルスの中にはシュワルツシルト半径よりも遠くへ進み，面積は広がっていくものもあるし，小さい半径に進んで小さくなるものもある．

次に崩壊している球対称星を囲む，同じような球 T' を想像しよう．それらはともに星のシュワルツシルト幾何学の地平の内側にある．図 12.2 が明確にしているように，内向きと外向きのパルスはより小さいシュワルツシルト座標半径に向かって運動する．両方とも面積は減少する．

球 T' は**閉じた捕捉面**の一例であり，T' は表面の小さい各面積素から放たれた光のパルスの面積が 2 つの方向で減少するような閉じた空間的 2 次元球面である．球面 T' 上のどんな物質も光速よりも速く運動するのは不可能なので，2 つのパルスの間に「捕捉」される．2 つのパルスの面積は 0 になるので，その間に捕われた物質は面積 0 の球面の内側，つまり特異点に突き進むことになる．

これが一般相対論の**特異点定理**の 1 つの背後にある大雑把なアイディアである．これまでの考察では球対称を仮定したが，特異点定理はずっと広い状況に適用できる．非常に粗っぽく言えば，閉じた捕捉面が一般的な時空の中でできると，物質のエネルギーが十分正で，重力が引力になっていれば特異点は避けられない．数学的に詳しい定理の内容とともに，**特異点**と**十分正**ということばに正確な意味を与えることができる [a]．

特異点定理は，特異点が一般相対論の多くの物理的状況で不可避であることを示している．それらは，例えば，宇宙の始めのビッグバン特異点が存在することに対する我々の自信の裏付けとなっている．

[a] これらは Hawking and Ellis (1973) にある．

と，r_R に比べて無視できる．さらに r_R が大きいと，静止観測者の世界線に沿った固有時はシュワルツシルト時間と同じとしてよい．よって (12.1) 式から $v_R \approx t_R + r_R$ となる．(12.6) 式の左辺で発信と受信で優勢な項だけを等しくすると

$$-4M\log\left(\frac{r_E}{2M}-1\right) \approx t_R - r_R \tag{12.8}$$

または同じだが

$$\frac{r_E}{2M} - 1 \approx e^{-(t_R-r_R)/4M} \tag{12.9}$$

が得られる．この関係から t_R が大きくなると，遠方の観測者が光を受信する半径 r_E は特徴的な時間 $4M$ で $2M$ に指数的に近づく．

赤方偏移を計算するため，静止観測者によって信号が受信される時間間隔 Δt について考えよう．信号が発信される r での間隔は $\Delta r_E = u^r \Delta\tau$ である．ここで u^r は崩壊面の 4 元速度の（負の）半径成分である．(12.9) 式から，$\Delta\tau$ とそれに対応する Δr_E は，受信における間隔 Δt_R と

$$-\frac{|u^r|\Delta\tau}{2M} = \frac{\Delta r_E}{2M} \approx -\frac{\Delta t_R}{4M} e^{-(t_R-r_R)/4M} \tag{12.10}$$

の関係にある．受信の振動数は $2\pi/\Delta t_R$ である．表面が $r = 2M$ を通過するとき，非特異なエディントン–フィンケルシュタイン座標で $|u^r|$ は有限なので [このことは (12.7a) 式から計算することができる], (12.10) 式から受信振動数は t_R の関数として以下の振る舞いをすることがわかる：

$$\omega_R(t_R) \propto \omega_* e^{-t_R/4M} \tag{12.11}$$

(12.9) 式と (12.11) 式は，外部の静止観測者が見たとき，$4M$ の特徴的な時間スケールで半径が $r = 2M$ に，赤方偏移が無限大に指数的に近づくことを示している．同様に，光度も $4M$ のオーダーの時間スケールで指数的に 0 に減る．時間の単位では

$$4M = 2.0 \times 10^{-5} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \mathrm{s} \tag{12.12}$$

である．星の大きさ程度の天体の場合，この時間スケールは天文学的標準としては非常に小さい．一般的な球対称崩壊ではブラックホールへの接近は極端に速い．

光は赤方偏移を受けるので，光子当たりのエネルギー（$E = \hbar\omega$）は小さくなる．半径方向に進む光子の振動数とエネルギーはともにどんどん小さくなって到達する．光子が十分半径方向に向いていないと，例 9.2 で示したように，無限遠には到達できない．例 12.2 で定量的に示したように，暗黒へ接近する時間スケールは現実的な状況では非常に短く，太陽質量程度の自由崩壊では 10^{-5} 秒のオーダーである．

まとめると，遠方の観測者からすれば球対称崩壊はすぐゆっくりになり，暗くなり，**時間依存しない**シュワルツシルト幾何学と区別できなくなる．崩壊が球対称である限り，星の歴史と崩壊の詳細な記録はすべて外部の幾何学から消される．星の進化の第二の最終状態は進行中の重力崩壊であり，シュワルツシルト半径の外から見ると，球対称の場合に特に簡単になる．幾何学は時間に依存せず，1 つの数値 M で特徴づけられる．12.4 節で簡単に述べ第 15 章でより詳しく述べるように，実際の非球対称重力崩壊の結果もブラックホールになり，同じように簡単になると信じられている．

球対称崩壊星が暗黒のシュワルツシルト幾何学に速く近づくことから，ブラックホールは発せられた放射を調べても発見できない[3]．しかし，第 13 章で考察するように，ブラックホールは，その周りの軌道上の物体の特徴を観測することによって存在を知ることができる．それは太陽が輝いていないとしても，地球の軌道からその存在を明らかにできるのと同じである．実際には，ブラックホールは，放射の吸収の仕方や，揺らされたときに発生する重力波の放射の仕方によって原理的に暗い星と区別できる．ただし，これらのトピックスは本書では考えない．

地平の面積は増加する

図 12.3 は，ブラックホールを形成する質量 M の球対称崩壊星の外部のシュワルツシルト幾何学中で光がどのように振る舞うかを示している．地平は，半径方向の光線によって作られるヌル 3 次元面であり，これは無限遠に脱出することも，特異点に落ち込むこともできず，$r = 2M$ に留まったままである．図 12.3 では，星の内側の幾何学を描いていないというだけの理由で，地平は星の表面で終わっている．しかし，地平は内側にも同様に続いている．星の中心にいる観測者が半径方向に向けて光線を送っているところを想像しよう．表面が半径 $r = 2M$ をちょうど通りすぎたとき表面に着いた光線は $r = 2M$ に留まり続けるだろう．図 12.5a で定性的に説明したように，光線は地平を星の外側だけでなく，内側にも同様につくる（定量的な例としては，問題 18 を行

---

[3] 少なくとも古典物理学ではこうなるが，量子力学の場合については，13.3 節のホーキング効果の考察を見よ．

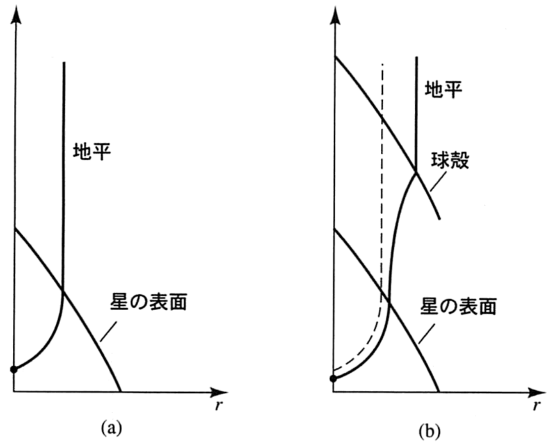


図 12.5 (a) 崩壊星内部の地平．この図は，中心から出発した半径方向の光線が，地平がどのように作られるかを示した時空図の概略図である．星がシュワルツシルト半径を通過するとき，光が表面にたどり着き，地平ができ，その後静止したままになっている．地平は星の内側で面積が増える．(b) この図は物質の球殻が星の崩壊の後に落下したとき，何が起きるかを示した時空図の略図である．(点線は球殻がない場合の地平の位置を表している)．地平は星の面と球殻の面の間で増加している（縦軸の目盛はこの図の中で示していない．星の内部の座標を決めていないからである．外部では縦軸を $\tilde{t}$ にとることができる)．

え)．星の内側で地平の半径と面積は，表面にたどり着くまで増加する．その後は，ブラックホールにさらに何も落下しない限り，地平は定常的になり変わらない．

図 12.5b に，ブラックホールができた後，質量 $M_{\rm shell}$ の薄い球殻が落下すると何が起きるかを示した．球殻が落下した後，地平は半径 $r = 2(M + M_{\rm shell})$ にあるだろう．地平を作っている光線が出発する以前に，中心から出発し $r > 2M$ の半径で崩壊星の表面を通りすぎ，ちょうど 球殻が $r = 2(M + M_{\rm shell})$ に達したとき，その球殻に到達した光線によって地平は作られることになるだろう．球殻の内側にあり，星の外側にある地平は $r = 2M$ でなく，より大きな半径に広がり，面積は常に増加する．この例は，球対称ブラックホール時空の事象の地平に備わる 2 つの重要な特徴を表している：どんな瞬間でも，地平の位置は，その瞬間の未来を向いた時空の幾何学に依存する．地平の面積は物質のエネルギーが十分正であれば増加する（問題 19)．

12.3 クルスカル–スゼッケル座標

「理解」の本質の 1 つは同一のものをいくつかの異なった視点から表現できることにある．シュワルツシルト幾何学は明らかに，その例になる．シュワルツシルト座標 (t, r, θ, ϕ) は，崩壊している星の中心からずっと離れた現象を理解するための最も直接的な手法である．例えば，平坦時空に近づくときや，テスト粒子や光線の軌道などの現象である．しかし，$r = 2M$ における特異な性質のため，シュワルツシルト座標はブラックホールの事象の地平や $r = 0$ の特異点の特質を理解するにはそれほど便利ではない．エディントン–フィンケルシュタイン座標のような非特異な座標系

を使えばこれらの領域に明るい視野が開ける．この節で紹介するクルスカル–スゼッケル座標はエディントン–フィンケルシュタイン座標とは別の手段として，シュワルツシルトブラックホール近傍の物理的な見方を提供する．あなたの理解がすでに十分に達していると思えば，この節は飛ばしても構わない．

シュワルツシルト座標との関係

クルスカル–スゼッケル座標は (V, U, θ, ϕ) で表される．θ, ϕ 座標はシュワルツシルト極角と同じであるが，シュワルツシルト t, r は以下の座標変換によって V と U に交換される：

$$\left.\begin{aligned} U &= \left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V &= \left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}\right\} \quad r > 2M \tag{12.13a}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= \left(1-\frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V &= \left(1-\frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}\right\} \quad r < 2M \tag{12.13b}$$

これらの座標変換をシュワルツシルト計量 (9.1) に実行した結果， $r > 2M$, $r < 2M$ のいずれの領域でも

クルスカル–スゼッケル座標のシュワルツシルト幾何学

$$\boxed{ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left(-dV^2 + dU^2\right) + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)} \tag{12.14}$$

となる（問題 20）．ここで r を V と U の関数と考え，$r = r(V, U)$ は陰に

$$\boxed{\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M} = U^2 - V^2} \tag{12.15}$$

の関係によって定義される．これは (12.13a) 式と (12.13b) 式から得られる．クルスカル–スゼッケル計量 (12.14) は $r = 2M$ で特異ではなく，シュワルツシルト座標の $r = 2M$ にある特異点が単に座標特異点であることが再び確認できる．

U と V のグリッド上に r, t の一定座標線をプロットすることによって，この座標変換とシュワルツシルト幾何学の性質についてかなりの洞察が得られる．これはクルスカル図と呼ばれ，それを図 12.6 に示した．(12.15) 式から，r 一定線は $U^2 - V^2$ 一定の曲線であり，つまり UV 面では双曲線になることがわかる．$r = 2M$ の値は直線 $V = \pm U$ のどちらかに対応する．$r = 0$ は双曲線

$$V = +\sqrt{U^2+1} \tag{12.16}$$

に対応する [正の平方根をとらなければならないことを知るためには (12.13b) 式を使え]．同じように，t 一定線もクルスカル図上にプロットされる．(12.13) 式から

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{V}{U} \qquad r > 2M \tag{12.17a}$$

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{U}{V} \qquad r < 2M \tag{12.17b}$$

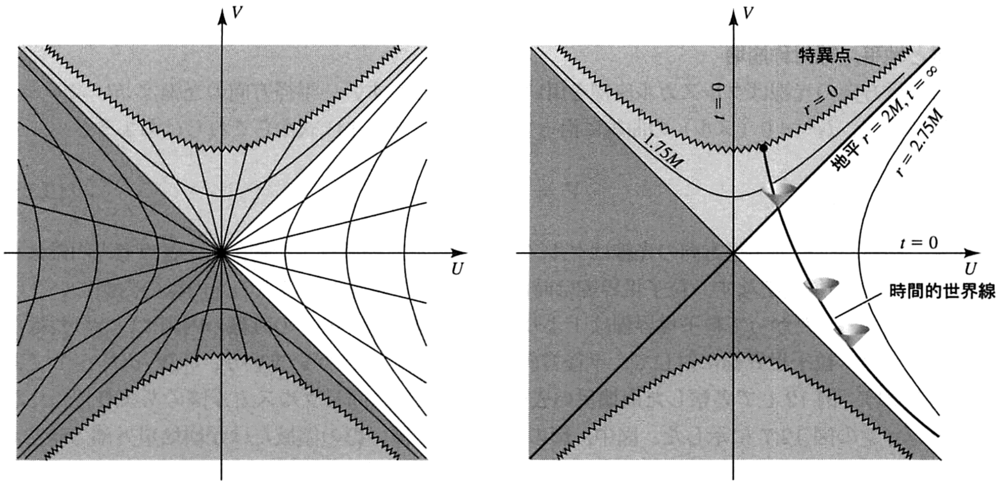


図 12.6　クルスカル図．2 つのクルスカル–スゼッケル座標 (U, V) によって定義されるシュワルツシルト幾何学の 2 次元スライスを表している．左図にシュワルツシルト座標で r, t 一定線を示した．双曲線の r の値は 0, $1.75M$, $2M$, $2.25M$, $2.75M$, $3.25M$, $\pm\infty$ であり，t 一定の直線の t の値は 0, $\pm M$, $\pm 2.75M$, $\pm 3M$, $\pm 3.25M$ である．図の影の領域は図 12.2 の影のついた領域に対応する．ブラックホールの外側の影のない領域は $2M < r < \infty$, $-\infty < t < +\infty$ または $-\infty < v < +\infty$ に対応する．我々はここにいる．$V > -U$ の領域だけがエディントン–フィンケルシュタイン座標の $0 < r < \infty$, $-\infty < v < +\infty$ によって覆われる．濃い影の領域 $V < -U$ はボックス 12.4 で考察したクルスカル拡張の一部である．$r = 0$ 特異点の上下に中間の濃さの領域があるが，この領域は時空のどこにも対応しない．$r = 0$ 特異点の右に $r = 2M$ の地平と 3 つの未来光円錐のついた落下時間的世界線がある．半径方向の光線はクルスカル図の 45° の線に沿って運動している．

が得られる．よって，t 一定の直線は U/V 一定の直線であり，原点を通る．$t = +\infty$ の値は $U = V$ に対応し，$t = -\infty$ は $U = -V$ に対応する．$t = 0$ の点は $r > 2M$ で $V = 0$ に対応するのだが，$r < 2M$ では $U = 0$ になる．クルスカル図で $U > 0$, $-U < V < U$ の影のない象限はシュワルツシルト座標の $-\infty < t < +\infty$, $2M < r < \infty$ によって覆われる．エディントン-フィンケルシュタイン座標の $-\infty < v < +\infty$, $0 < r < \infty$ で覆われる全領域は，$V > -U$ の図の一部分に写像される．これは，すでに述べたように崩壊星の表面の世界線が動く領域であり，球対称崩壊においては，星の外側の部分だけに関係がある．$V < -U$ の領域の意義については 253 ページのボックス 12.4 を見よ．

(V, U, θ, ϕ) の全体的な領域では，計量成分 g_{UU}, $g_{\theta\theta}$, $g_{\phi\phi}$ が常に正なのだが，g_{VV} は負である．よって V の方向は時間的であり，U の方向は空間的である．シュワルツシルト座標と見比べよ．t が増加することは $r > 2M$ では時間的であるが，$r < 2M$ では空間的である．r が増加することは $r > 2M$ では空間的であるが，$r < 2M$ では時間的である．

光円錐と地平，球対称崩壊

特に半径方向の光線はクルスカル座標を用いると分析しやすい．半径方向の光線は $d\theta = d\phi = 0$（半径方向）と $ds^2 = 0$（ヌル）の曲線に沿って運動する．(12.14) 式からこれらはちょうど

$$V = \pm U + \text{定数} \tag{12.18}$$

の曲線である．よって半径方向の光線はクルスカル図で 45° の直線上を運動し，各点で光円錐は鉛直方向と 45° の角度をなす．粒子世界線は時間的であり，通過する各点の光円錐の内側にいなければならない．したがって粒子世界線は 1 よりも大きな傾きで，45° の直線の内側にいなければならない．実際，粒子世界線に対して，半径方向に運動していようがいまいが，$|dV/dU| > 1$ である（問題 21）．例 12.1 で考察した崩壊星の表面の世界線は，同じクルスカル図のあまり忙しくないバージョンの図 12.7 に示した．図中，影のない領域と薄い影の領域だけが崩壊星外部の時空を表している．

エディントン–フィンケルシュタイン座標で発見したシュワルツシルトブラックホール幾何学の本質的特徴は，図 12.6 のクルスカル図で別の視点から知ることができる．$r = 0$ の特異点は明ら

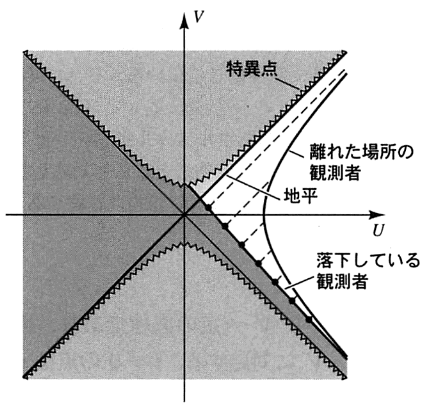
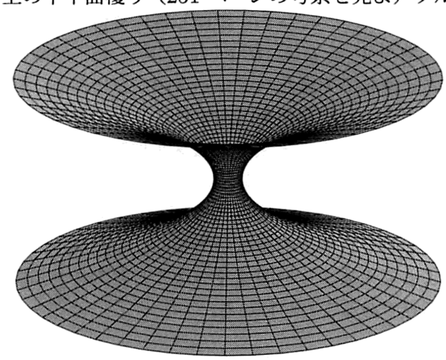


図 12.7　図 12.3 の 2 人の観測者の世界線がこのクルスカル座標で別な物語として語り直されている．影の領域が 2 つの図で似た意味を持っている．1 人の観測者が無圧力ダストでできた崩壊球の表面に乗っており，$t = -\infty$ で大きな半径から $r = 0$ の特異点へ (12.7a) 式と (12.7b) 式にしたがう世界線に沿って落下する．表面の外側の影のない領域と薄く影のついた領域だけが球対称崩壊と関係がある．$r = 0$ にできた特異点が，$r = 2M$ の地平と同じく示されている．地平はこの図のヌル曲線 $U = V$ になっている．地平の内側の領域は薄く影がついている．大きな r で静止している観測者の世界線も $r > 2M$ の領域の双曲線として描かれている．落下する観測者が固有時で等間隔に放出される光線の世界線もある．崩壊が進むにつれて，時間間隔が遠方の観測者には固有時で長くなって観測される．遠方の観測者にたどり着く最後の光線はちょうど地平の（図における）下の 45° 直線にしたがう．地平をいったん通過してしまうと，時間的世界線はすべて $r = 0$ の特異点に進み，星は 0 の大きさに崩壊し，落下している観測者は破滅する．

ボックス 12.4　シュワルツシルト幾何学のクルスカル拡張

クルスカル図で，崩壊星の表面の世界線より外側の領域だけが（図 12.7 の影のない領域）球対称崩壊に関係がある．しかし，純粋に理論的に，シュワルツシルト幾何学を，物質のないアインシュタイン方程式の静的球対称解として考えることができる．このような視点で眺めると，$r=0$ の特異点を境界とするクルスカル座標 (U,V) の全体の領域を 1 つの時空と考えない理由はない．$2M < r < \infty$ と $-\infty < t < +\infty$ を覆うシュワルツシルト座標が $U > 0$, $-U < V < U$ の象限だけを覆うため，クルスカル座標全体はシュワルツシルト幾何学のクルスカル**拡張**と呼ばれる．エディントン–フィンケルシュタイン座標は $V = -U$ より上の半平面覆う（251 ページの考察を見よ）クルスカル–スゼッケル座標は全体を覆う．



クルスカル拡張は，$r = 0$ で幾何学が特異となる 2 つの空間的曲面を持っている．これらは双曲面 $V = \pm(U^2+1)^{1/2}$ である．2 つの漸近的領域があり，1 つは $U \to +\infty$ であり，もう 1 つは $U \to -\infty$ である．この事実だけでも，クルスカル拡張は質点を囲む時空とは似ても似つかないことがわかる．実際，$V = 0$ のような空間的曲面上で，まったく特異点はなく，単に空っぽの曲がった空間があるだけだ．この曲面を $U = \infty$ から $U = -\infty$ まで半径方向に進むと，関数 $r(U,0)$ は $2M$ の最小値に減少し，そして第二の漸近的平坦領域中にある無限遠へ増加する．$V = 0$ の埋め込み図，つまり 7.7 節の方法にしたがって構成された左の $\theta = \pi/2$ の 2 次元曲面は，クルスカル拡張が時空の 2 つの漸近的平坦領域をつなぐワームホールであることを示している（問題 24）．しかし，例 7.7 のトーイ幾何学のような静的ワームホールではない．V が大きな値または小さな値になると，ワームホールの喉の半径は減少し，遂には $r = 0$ の特異点の中につぼめられていく．この理由のために，もし我々の宇宙にこうしたワームホールの 1 つがあったとしても，特異点から特異点に進化する間に，通り抜けるほど十分速く運動することは不可能だろう．クルスカル図上で直接これを見ることができるだろうか（問題 25）．

かに空間的曲面に見える．$r = 2M$ の地平は 45° の直線 $V = U$ であり，$r = 2M$ に留まったままの半径方向の光線によってつくられるヌル曲面であることを示している．$r = 2M$ の内側で（図 12.6 の $V = U$ 直線の上側）すべての時間的，ヌル世界線は $r = 0$ の特異点に進み，星の表面がシュワルツシルト半径をいったん横切るとブラックホールの形成は避けられない．光線と時間的世界線は地平の内側から脱出できず，そこで起きた事象は外部のどんな観測者からも隠されたままである．

12.2 節で考察し図 12.3 で説明した情報交換可能な 2 人の観測者の世界線を図 12.7 のクルスカル図で示した．遠い観測者は固定された r の双曲線に沿って進む．落下観測者が等固有時間隔で放出する光線は 45° の点線で示されている．崩壊星から放たれた光の赤方偏移が増加するように，また光度が暗くなって消えていくように見えるように遠い観測者は受信時刻が遅くなると，振動数が減っていくことを発見する．受信された最後の光線は，星と落下観測者がシュワルツシルト半径に突っ込む直前に放出されたものである．

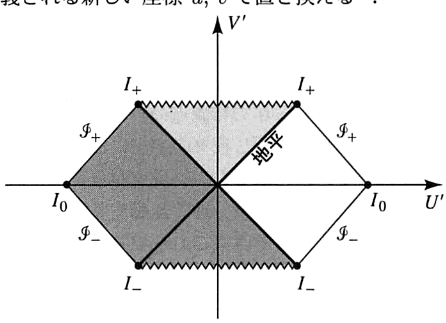
多くの点で，シュワルツシルトブラックホールの因果的性質は，エディントン- フィンケルシュタイン座標よりもクルスカル–スゼッケル座標の方がよくわかる．さらに，クルスカル–スゼッケ

ボックス 12.5　シュワルツシルト幾何学のペンローズ図

新しい座標 (U', V') を注意深く選ぶことで，光線が 45° の直線を進み続け，無限遠の点が無限大でなく有限の座標値で表せるように，クルスカル図の各点を表し直すことができる．シュワルツシルト幾何学のクルスカル拡張（ボックス 12.4）の全体のスライスを (U', V') 面の有限の領域に移した図はシュワルツシルト幾何学のペンローズ図と呼ばれ，大域的な時空構造を絵画的に表す便利な方法である．平坦時空ペンローズ図を構成する方法は 127 ページのボックス 7.1 で述べたが，シュワルツシルト幾何学に対しても平行して行える．クルスカル–スゼッケル座標 (12.14) のシュワルツシルト幾何学から始め，座標 U, V を

$$U = (v - u)/2, \qquad V = (v + u)/2 \tag{a}$$

で定義される新しい座標 u, v で置き換える [a]．



uv 軸は，光線が u と v 一定の曲線上を移動するようにちょうど UV 軸を 45° 回転したものである．

$$\begin{aligned} u' &\equiv \tan^{-1}(u) \equiv V' - U' \\ v' &\equiv \tan^{-1}(v) \equiv V' + U' \end{aligned} \tag{b}$$

にしたがって定義される別の座標 (u', v') と (U', V') を導入する．光線は u' と v' 一定の曲線上を運動する．つまり $U'V'$ 面で 45° の直線上を運動する．u と v の無限大の領域がそれぞれ u' と v' の有限の領域 $(-\pi/2, \pi/2)$ に写像される．，少し計算すれば，双曲線 $r = 0$, $V > 0$ は $V' = \pi/4$, $-\pi/4 \leq U' \leq \pi/4$ の線に写像されるが，$V < 0$ のものは $V' = -\pi/4$ で同じ線に写像されることがわかる．地平 $V = U$ は $U'V'$ 面で同じ 45° の線に写像される．こうしてできたペンローズ図が左にある．平坦空間と同じように，無限遠を区別することができる．無限の光線が始まり終わる，未来と過去ヌル無限遠 $\mathscr{I}_{\pm}$, 時間的世界線が始まり終わる，未来と過去時間的無限遠 $I_{\pm}$, すべての空間的面が交わる，空間的無限遠 I_0 である．2 つの集合と，それぞれ漸近的領域がある．この図から，地平は光線によって未来ヌル無限遠をつなぐことのできる時空の領域の境界であることがわかる．

[a] この v をエディントン–フィンケルシュタイン座標 v と混同しないように．

ル座標は，他の有効なブラックホール幾何学を表現する基礎となっている（253 ページのボックス 12.4 と 254 ページのボックス 12.5 を見よ）．しかしクルスカル-スゼッケル座標はブラックホールから遠い距離でテスト粒子と光線の軌道を分析するのにはあまり便利でない．エディントン–フィンケルシュタインはブラックホールの近くと遠く離れたところの両方で使うことに利点がある．ブラックホールと同じくらい風変わりな現象を理解するために，いろいろな視点を持つことは便利であるが，相対論でいろいろな視点とはいろいろな座標系のことを意味する．

12.4　非球対称重力崩壊

現実の崩壊の状況は厳密には球対称ではない．崩壊前の星は回転のため歪んでいるかもしれない．重い星がその寿命を終えるときの現実の超新星爆発は確かに球対称ではない．したがって，当然ながら球対称崩壊の描像が実際の場合どの程度まで使えるかという疑問が生じる．この節では証明なしで，簡単な球対称モデルの特徴が非球対称崩壊でどのように成り立つのかが推測されるのかについて述べる．

- **特異点の形成** これまで見たように，球対称崩壊星の表面がシュワルツシルト半径 $r = 2M$ をいったん通過してしまうと，特異点への重力崩壊は避けられない．幾何学の構造のため，地平の内側の領域から脱出できない．球対称崩壊の特異点の形成は，一般相対論における**特異点定理**の具体的な説明になっており，247 ページのボックス 12.3 でそれとなく短く触れた．大雑把にいえば，これらの定理から，崩壊が十分進めばどんな重力崩壊でも時空幾何学の特異点になる．球対称崩壊で形成された特異点は球対称の人工物ではなく，より広い一般的な崩壊の特性である．
- **事象の地平の形成** 球対称崩壊で形成される特異点は地平の内部にあり，外部の観測者から隠されいる．隠されているという事実が重要である．特異点は理論の予言力が破綻する場所であるが，この破綻の情報は外部の観測者に決して到達することはできないからだ．

  15.1 節でもっと詳しく考察するが，**宇宙検閲官仮説**では，一般的で実際の崩壊で形成される特異点がブラックホールの地平の内側に隠されていると考えられている．この仮説はまだアインシュタイン方程式の結果として証明されておらず，実際，この仮説の正確な定式化すらされていない．しかし，このアイディアの例外はいまのところ見つかっていない．

  もし宇宙検閲官仮説が正しければ，実在の複雑な非球対称重力崩壊の外側の幾何学は，実在の物体の詳細な性質に依存するが，シュワルツシルト幾何学のものと似た地平をもつブラックホール幾何学になる．シュワルツシルト幾何学は一般相対性理論によって許される最も一般的なブラックホールではない．しかし第 15 章で述べる一般的な場合が複雑すぎるというわけでもない．一般的なブラックホールは 2 つのパラメータだけに依存する．それは質量と角運動量である．したがって宇宙検閲官仮説が正しければ，実在する非球対称重力崩壊の結果，球対称な理想なものと同じくらい簡単な幾何学ができる．
- **面積の増加** 248 ページで述べたように，質量が球対称的に落下するとブラックホールの面積は増加する．しかし，質量が非球対称的に落下しても，地平の面積は増加するだろう．これは，ブラックホールの**面積増大定理**の結果である．ブラックホールの面積の振る舞いから熱力学のエントロピー増大則が思い出される．13.3 節で，量子力学ではブラックホールのエントロピーは面積に比例することを知るだろう．

例 12.3. 塊がブラックホールに落下する 物質の塊がある方角から半径方向にブラックホールに落下する．これは球対称の状況ではない．その結果，ブラックホールは振動し，重力波を放出するが，最終的にはシュワルツシルトブラックホールに落ち着くだろう．角運動量が変わらないからだ．重力波によって持ち去られるエネルギーは落下する質量よりも大きく，質量は初めのシュワルツシルトブラックホールの質量よりも小さくなるのだろうか．答えは no である．ブラックホールの面積は減少することができず，シュワルツスルトブラックホールの面積は質量と $A = 4\pi(2M)^2$ の関係にあるからである．

問題

1. [P] 太陽の光度を説明するために毎秒何個の陽子がヘリウム原子核にならなければならないか．この割合で太陽が燃え続けるとすべての陽子が使い尽くされるまでにどれくらいかかるか．
2. [E,B] 電子が必ずしも相対論的であるとは仮定せずに，ボックス 12.1 の白色矮星の最大質量のオーダー評価にしたがって以下の問題を解け．
   (a) ボックスの (d) 式で定義される $A_{\rm crit}$ より大きいまたは小さい場合について R の関数として全エネルギー $E_{\rm TOT}(A,R)=E_F(A,R)+E_G(A,R)$ の振る舞いの略図を描け．
   (b) 全エネルギー $E_{\rm TOT}(A,R)$ が最小値をとる半径 $R_*(A)$ を求めよ．これは重力とフェルミ圧力がつり合い，平衡状態にある星の半径の評価値となる．R_* は本文で引用された白色矮星の半径と比べてどうか．
   (c) それ以上では平衡が不可能な値 $A_{\rm crit}$ が存在することを示せ．その値を求め，本文で評価した $A_{\rm crit}$ と比較せよ．
   (d) 電子は平衡状態で相対論的か．
3. [S](12.1) 式で定義された，シュワルツシルト座標からエディントン-フィンケルシュタイン座標へ座標変換を実行し，線素 (12.2) を求めよ．
4. 線素
$$ds^2=-\left(1-\frac{M}{r}\right)^2dt^2+\left(1-\frac{M}{r}\right)^{-2}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$$
   で決められる時空を考えよう．$r=M$ を除いて，座標 t は常に時間的で，r は空間的である．
   (a) $g_{rr}=0$ とした (12.1) 式に類似した，新しい座標 (v,r,θ,ϕ) への変換を求め，幾何学が $r=M$ で特異ではないことを示せ．
   (b) 図 12.2 と同じように，$(\tilde{t},r)$ 図の略図を描き，入ってくる光線と出て行く光線の世界線と光円錐を描け．
   (c) これはブラックホールの幾何学になっているか．
5. 観測者が質量 M の球対称ブラックホールに向かって半径方向に落下する．その観測者は，$10M$ のシュワルツシルト座標半径で静止している観測者に対して静止状態から出発する．特異点に衝突するまで，観測者自身の時計でどれくらい時間がかるか．
6. 観測者が質量 M のシュワルツシルトブラックホールの外側の幾何学を探査することを決心し，無限遠からある初期速度で出発し，ブラックホールに近い軌道に自由落下し，無限遠に再び飛び立つ．この種の軌道上のうちで観測者がブラックホールに最も近づくのはどんなものか．$r=3M$ を通過し，再び通過する間，幾何学を研究するために十分長い時間をかせぐにはどうしたらよいか．
7. [E] 1 メートルの棒が，太陽質量によって作られたニュートン重力の中心に向かい半径方向に落下した．ニュートン物理学を使って棒が壊れるかこなごなになる距離を**評価せよ**．
8. 球対称ブラックホールに落下する観測者がブラックホールの外部で起きる事象の情報を得る

ことができるだろうか．ブラックホールの外部で，内部の観測者が最終的に見ることのできない時空領域は存在するか．これらの質問を図 12.2 のような図を使って分析せよ．

9. [S] ダースベーダはジェダイの騎士を追っていた．ジェダイの騎士がフォースの源を探して大きなブラックホールに飛び込んだ．ダースベーダは，一度ブラックホールの内部に入ると，光線銃から放たれる光はシュワルツシルト座標の小さい半径に向かって進むことを知っていた．半径方向にその銃を撃ってみることにした．彼が特異点で破滅する前に，銃から出た光線が彼に戻って来ることを憂慮すべきだろうか．

10. 図 12.2 のようなエディントン–フィンケルシュタイン図中で**非半径方向**に進む光線の $\tilde{t}$-r 曲線の傾きが**半径方向の**光線によって定義される光円錐の中になければならないことを示せ．

11. 負の質量は自然界では起こり得ない．しかし，練習問題として，負の質量 M のつくるシュワルツシルト幾何学内で半径方向に進む光線の振る舞いを分析せよ．これらの光線を表すエディントン–フィンケルシュタイン図を描け．負の質量のシュワルツシルト幾何学はブラックホールか．

12. [S] シュワルツシルトブラックホールの地平 3 次元曲面の法ベクトルはヌルベクトルであることをチェックせよ．

13. [C] (a) 観測者が足を見ながらシュワルツシルトブラックホールに足から落下する．自分の足が見えなくなる瞬間はあるだろうか．たとえば，頭が地平を超えているとき足が見えるだろうか．もし見えるなら，どの半径に足があるように見えるか．$r = 0$ の特異点に頭がたどり着くまで無事であることを仮定すると，足が特異点にあたるところを見ることができるだろうか．これらの問についてエディントン–フィンケルシュタインまたはクルスカル図を分析して答えよ．

    (b) **ブラックホールの内部は暗いか**　外側の観測者が見ると，ブラックホールに崩壊している星は暗くなっていく．しかし，表面上にいる観測者が観測して，崩壊星が規則的に放射し続けると仮定すると，ブラックホールの内側は暗いだろうか．

14. [C] ブラックホールの事象の地平を超えてしまった後，特異点で破滅するまでに観測者が費せる**最も長い**固有時はいくらか．

15. [C] ブラックホールの周りの環境を調査する使命を負った宇宙船が，質量 M の球対称ブラックホールの外側のシュワルツシルト座標半径 R に漂っている．乗組員は無限遠に脱出するために，宇宙船の質量のいくらかを放出して脱出速度までの残りの速度分を加速しなければならない．無限遠に脱出した後に残った静止質量の最大の割合 f を求めよ．R が $2M$ に近づくとこの割合はどうなるか．

16. 9.2 節で，静止観測者から放出された光の重力赤方偏移の公式 (9.20) を導出した．シュワルツシルト幾何学の時間変位対称性から生じる保存則 (8.32) から始めた．同じような方法で，自由落下崩壊中の星から放射状に放出された光の赤方偏移の式を遠方の観測者によって受信された時間 t_R の関数として求めよ．得られた結果を (12.11) 式と比べよ．(9.20) 式は放射状でない放射にも成り立つ．崩壊星の表面から発射された放射にも成り立つだろうか．((9.20) 式の R は放射を放つ静止観測者の半径であるが，(12.11) 式を導く例で R は放射を受け取る観測者の位置である．)

17. [B] ボックス 12.2 の (b) 式のロケット噴射を求めよ．

18. [C] **崩壊球殻内部の地平** 質量 M の非常に薄い物質の球殻の崩壊を考えよう．球殻は時空中で球対称 3 次元面になっている．この面の外側で幾何学は，質量 M のシュワルツシルト幾何学になっている．内部で以下の仮定をする．(1) 球殻の世界線は，ある有限の固有時で 0 になる関数 $r(\tau)$ であることが知られている．(2) 球殻内部の幾何学は平坦である．(3) 崩壊面の 3 次元面の幾何学は外側と内側で同じである．
   (a) 以下の 2 つの時空図を描け．1 つは図 12.2 のようなもので，もう 1 つは，それ相応の座標系で球殻の内側の時空に対応するものである．両方の図で球殻の世界線を描き，内部の点と外部の点がわかるように示せ．球殻の内側に，外側と同様に地平をおけ．
   (b) 光線に沿って運動すると，球殻内部の地平の面積はどのように変化するか．

19. 図 12.5b は，質量 $M_{\rm shell}$ の球殻が後に入り込むとき，球対称ブラックホールの地平の面積であることを示している．このときの考察で球殻は $M_{\rm shell} > 0$ の通常の物質からできていると仮定した．質量が負であれば何が起きるだろうか．地平の面積は常に増加するだろうか．図 12.5b のような図を描き負の質量の場合に光の定性的な振る舞いと同様に地平の定性的な振る舞いも説明せよ．中心から出た光線は球殻が通過しなければ地平を作ったであろうが，その光線の振る舞いも示せ．

20. [S,A] シュワルツシルト座標から (12.13) 式で定義されるクルスカル座標への変換を詳しく行え．$r > 2M$ と $r < 2M$ の両方でクルスカル座標の計量を求めよ．

21. クルスカル図で， 半径方向に運動しても，時間的粒子世界線の $|dV/dU|$ は 1 より大きくなければならないことを示せ．

22. 2 台のロケット内の 2 人の観測者が質量 M のシュワルツシルトブラックホールの上で浮いている．2 人とも
$$\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2} e^{R/4M} = \frac{1}{2}$$
となる固定半径 R と固定された角度位置にいる（実際 $R \approx 2.16M$）．第一観測者はこの位置を $t=0$ で離れ，特異点で破壊されるまでブラックホールに向かい，**クルスカル図で直線的に進む**．衝突点は特異点が $U=0$ の直線を横切るところである．第二観測者は R に留まり続ける．
   (a) クルスカル図上で，2 人の観測者の世界線を描け．
   (b) ブラックホールに入った観測者は時間的世界線にしたがうか．
   (c) 第一観測者が出発した後，第一観測者が特異点で破滅する前に，第二観測者が送った光信号のうち，第一観測者に届くまでにかかった時間の最大値はどれほどか．

23. 公式 (12.11) は，崩壊星から来る光の赤方偏移を遠方の静止観測者が受信する時刻 t_R の関数として示している．シュワルツシルト幾何学の場合，特異でない座標系でこれを計算せよ．クルスカル座標を使って同じ結果を導け．

24. [B,N] ボックス 12.4 では $V=0$ の場合と同じようにしてシュワルツシルト幾何学のクルスカル拡張のスライスの埋め込み図を描いた．$V=0.9$ と $V=0.999$ の場合について同じ図を描け．簡単にできれば，軸対称 2 次元面の断面を示してもよい．これらの埋め込み図によ

り，クルスカル拡張のワームホールが時間的に一定ではないことをどのように説明したらよいか．$V > 1$ で何が起きるか.

25. [B,S] 我々の銀河中心のブラックホールが，崩壊星によって形成されたのではなく，最大クルスカル拡張そのもので本当に表されているとする．クルスカル図を使って，クルスカル拡張の 1 つの漸近的領域からもう 1 つへ移動することがなぜ不可能なのか説明せよ（ボックス 12.4 内での質問）．移動できないとしても，拡張の他方の星からの光を見ることができるだろうか．もしできれば，どのように見えるだろうか.
26. [B] シュワルツシルト幾何学のクルスカル拡張のペンローズ図で境界がボックス 12.5 のようなものになることを示せ.
27. ブラックホールの面積が常に増加するのなら，全質量が保存しても決して 2 つのブラックホールには分けられないことを示せ.

第 13 章

宇宙物理学的ブラックホール

ブラックホールはとめどない重力崩壊の結果できたものである．重力は引力で普遍的な力であるため，ブラックホールへ向かう重力崩壊は宇宙の広い質量スケールで起きる（第 1 章）．この章では，以下の 3 つの質量スケールをもつ 3 つの異なった起源のブラックホールについて述べ，それらがどのようにブラックホールとして同定され，またされうるのか，なぜ宇宙物理学の中で最も高エネルギー現象の中心となっているのかを説明する．

- **X 線連星のブラックホール**　超新星爆発における重い星の崩壊では太陽質量の 10 倍のオーダーまでの範囲でブラックホールができる．11.2 節で見たように，ブラックホールが連星系の一員となっているとき，伴星の軌道に及ぼされる影響やその周りに形成される降着円盤からの放射を発見することでその存在を知ることができる．
- **銀河中心のブラックホール**　銀河中心の深いポテンシャル井戸は重力崩壊が起きている自然な場所である．銀河はコアで崩壊を起こし，他の銀河との合体による崩壊が続いて起きたが，またはたぶんブラックホールの周りでできたのであろう．銀河中心にある巨大ブラックホールは 100 万から 10 億太陽質量までの範囲にある．
- **原初ブラックホール探査**　宇宙背景放射には，初期宇宙の物質分布が非常に滑らかであったという証拠があるのだが，密度にほんの小さな揺らぎがあり，それが現在の銀河の形成のもととなった（15 ページのボックス 2.2 または第 17 章を見よ）．初期揺らぎは重力作用のもとで成長し崩壊して小さなブラックホールになったのかもしれない．質量が 10^{14}g($\sim 10^{-19} M_\odot$) のオーダーの小さな**原初ブラックホール**はいま量子力学的なホーキング過程を通じて爆発しているだろう．これは 13.3 節で説明する．

ブラックホールは，X 線連星や銀河中心で見つかっている．ただし，これらの幾何学について一般相対論の詳細な予測を確かめるという目的は将来の課題である．しかし，ブラックホールは一般相対論の検証となるという理由だけのために関心が強いのではない．最新の宇宙物理現象の解釈にも貢献しているのだ．X 線源としての役割は 11.2 節で述べた．この章では，クェーサのような活動銀河核での役割を簡単に述べる．原初ブラックホールの爆発は現時点では見つかっていないが，もし発見されれば，重力と量子論の統一の解明に役立つだろう．

1 章という短い範囲で，観測の取組みやブラックホール宇宙物理学の基礎となっている豊富な物理学を正しく評価することは不可能である．この章では，基本的な事実と，一般相対論のブラックホールと相対論的観測をつなぐ重要な機構を紹介することを目的にする．

13.1　X 線連星のブラックホール

すべての星のほぼ 2/3 は，互いに回り合う連星に属している．これらの連星の中には，核燃料を使い果たし，重力崩壊を迎え，超新星爆発を起こしたものもあるだろう．爆発の残骸が星の進化の最終状態のコンパクトな天体になり，連星系を構成しているものもあるだろう．つまり中性子星またはブラックホールと，ふつうの星の方からなる連星である．軌道が十分小さいと，通常の星から物質がコンパクト天体に流れ込んでいるかもしれない．この物質は中性子星やブラックホールの深い重力ポテンシャルに渦を巻いて落下し，図 13.1 または 11.2 節で述べたように降着円盤を形成する．

円盤内を軌道運動する物体は様々な拡散機構によりエネルギーを失い，コンパクト天体の重力ポテンシャル井戸の中深くへゆっくりと螺旋回転して落下する．解放されたエネルギーによって X 線が多く発生する温度にまで円盤の内部領域は発熱する．降着物質の重力ポテンシャルエネルギーは X 線光度に変換され（227 ページのボックス 11.1 を見よ），結局 X 線連星になる．

X 線連星は空で最も明るい X 線源であり，地球の軌道上にある X 線望遠鏡によって見つけることができる．可視光の対応天体は，X 線観測の位置の誤差の範囲内にある異常な時間変動またはスペクトルをもつ星として同定される．可視光源からの輝線に見られる周期的なドップラー偏移から，X 線連星が，X 線放出降着円盤もつコンパクト天体と相互軌道にある星からなることが明らかになる．こうして，X 線連星が同定される．

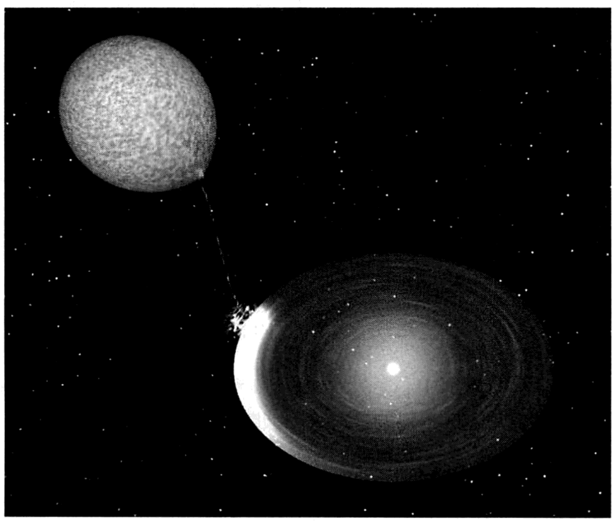


図 13.1　X 線連星 A 0620-00 のコンピュータシミュレーションイメージ．連星の 1 つが崩壊してブラックホールになっている．もう 1 つの星はコンパクト天体に近く，質量を供給できる．角運動量の保存から，コンパクト天体に流れる質量は降着円盤を構成する．円盤は軌道エネルギーの散逸により，X 線を放出する温度まで熱せられる．

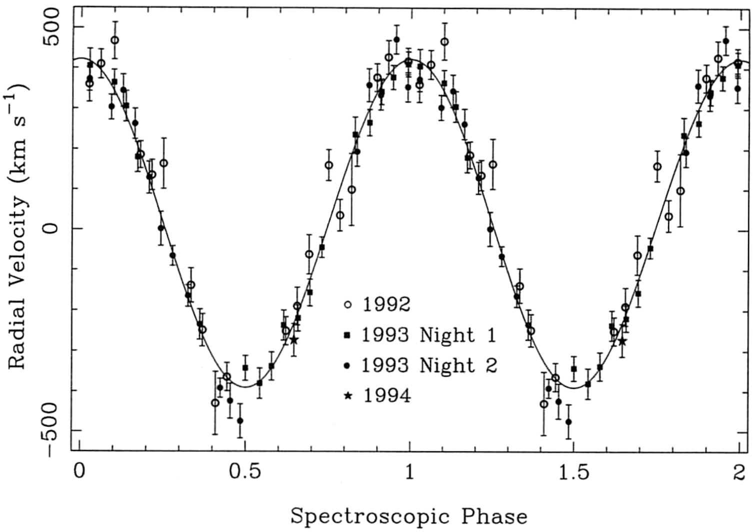


図 13.2　X 線連星 新星 Muscae のブラックホールを回る普通の星の半径速度曲線．曲線の対称な形から，相互軌道が円に近いことがわかる．軌道周期は 0.423 日である．このような半径速度曲線は連星系の質量関数を決める．この場合ほぼ $3M_\odot$ である．

コンパクト天体の質量はブラックホールとして同定するときの主な要因となる．第 12 章で触れたように，中性子星の最大質量は太陽質量の数倍である（詳しくは 24.6 節を見よ）．もし X 線源の質量がこの最大値より大きければ，ブラックホールであると推定される．

質量の情報はコンパクト星の輝線に見られるドップラー偏移から得られる．星が我々の方に向いたり，離れるときの速度成分は**半径速度**と呼ばれ [(5.73) 式を参照]，ドップラー偏移から測定できる．時間に対する半径速度のプロットは**半径速度曲線**と呼ばれ，図 13.2 はその例である．半径速度曲線は連星の相互軌道の情報を多く含んでいるが，それぞれの星の質量を決めるには十分ではない．求められるもの（例 13.1 を見よ）は　**半径速度曲線**

$$f(M_1, M_2, i) \equiv \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} \tag{13.1}$$

質量関数

で定義される**質量関数** $f(M_1, M_2, i)$ である．ここで M_1 は観測された星の質量で，M_2 はコンパクト天体の質量，i は，$i = \pi/2$ が軌道面を視線方向から真横に見るように定義された軌道面の傾き角である．観測される星の質量 M_1 は，通常の星ならスペクトルから求められる．質量関数から，未知の $\sin i$ の値に対応して，コンパクト天体の質量 M_2 の範囲が決まる．コンパクト星の質量が白色矮星や中性子星の上限を超える X 線連星は存在する．これらはブラックホールであると推定されている．

例 13.1. 円軌道の連星系の質量関数　質量 M_1 と M_2 の 2 つの星が共通の重心を中心とする円軌道上にある．軌道面は視線方向から角度 i の傾きにある．質量 M_1 の星に見える輝線のドップ

ラー偏移の時間変動を観測すると半径速度が，軌道周期とともに推定できる（図 13.2 を見よ）．ニュートン重力物理学を仮定するとこれらの観測から星の質量について何が言えるだろうか．

重心から星の距離を r_1, r_2 とし，$r \equiv r_1 + r_2$ をそれらの間の距離とする．$M_1 r_1 = M_2 r_2$ なので

$$r_1 = [M_2/(M_1 + M_2)]r, \qquad r_2 = [M_1/(M_1 + M_2)]r \tag{13.2}$$

が成り立つ．周期 P の円軌道では

$$\frac{M_1 V_1^2}{r_1} = \frac{M_1}{r_1}\left(\frac{2\pi r_1}{P}\right)^2 = \frac{G M_1 M_2}{r^2} \tag{13.3}$$

である．ここで V_1 は質量 M_1 の星の軌道速度である．(13.2) 式を使うと，上式は

$$(2\pi/P)^2 r^3 = G(M_1 + M_2) \tag{13.4}$$

となる．これはケプラーの（第三）法則である．質量 M_1 の星の最大半径速度は

$$(V_1^r)_{\max} = V_1 \sin i = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} \frac{M_2 \sin i}{(M_1 + M_2)^{2/3}} \tag{13.5}$$

である．整理し直すと

$$f(M_1, M_2, i) = (V_1^r)^3_{\max}\left(\frac{P}{2\pi G}\right) \tag{13.6}$$

となり，質量関数が半径速度の観測値と円軌道の周期から決められることがわかる．円軌道でない場合，半径速度曲線の詳細から決められる．

13.2　銀河中心のブラックホール

観測

銀河中心は，ガスや星の落下から生じたと思われる質量の集中を探すのに自然な場所であり，それらは何らかの方法で運動エネルギーを散逸し銀河の重力ポテンシャル井戸の底に落下しブラックホールを形成したのであろう．我々の銀河を含めて，注意深く研究されてきた多くの銀河中心にブラックホールが存在する確かな観測的証拠がある．これらの**巨大ブラックホール**はほぼ $10^6 M_\odot$ から $10^9 M_\odot$ までの範囲にわたっている．ほとんどすべて十分重い銀河の中心にはブラックホールが存在しているという証拠が増えている．

銀河中心のブラックホールは直接観測できない．まず第一に何と言っても黒いからだ．第二に，銀河の特徴的な大きさよりもかなり小さい．典型的な渦巻銀河は直径数キロパーセク[1]で渦巻「バルジ」を持っているかもしれない．$10^9 M_\odot$ ブラックホールは 10^9km（または 10^{-4}pc）オーダーのシュワルツシルト半径をもつ．これはほぼ太陽系の大きさでありバルジの大きさの 1000 万分の 1 である．ブラックホールは周りの物体に及ぼす効果によって間接的に観測されるだけである．

[1] パーセクは銀河系内または系外天文学で頻繁に使われる距離の単位である．1 パーセクは 3.086×10^{13}km または 3.262 光年である．

我々の銀河中心に巨大ブラックホールが存在することを示せたのは，整合性のある観測のモザイクの結果からである．これらの詳しい分析の印象をここで伝えることは不可能である．しかし，基本的なアイディアは，ブラックホールの近くに見える物体に及ぼされる重力的な影響から質量集中を発見することである．球対称質量分布の周りを回る半径 r の円軌道の速度 $V(r)$ は r の内部の質量 $M(r)$ とニュートンの関係式

$$\frac{V^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \tag{13.7}$$

によって結びついている．いろいろな r に対して $V(r)$ を測定することにより，$M(r)$ を決めることができる．銀河中心の小さな領域に大きな質量があることが結論づけられると，コアにブラックホールが存在する証拠となる．分布が球対称でなくても，より一般的な状況でニュートン力学を使って速度と質量を結ぶことができ，(13.7) 式は質量評価に使える．

きれいな例は銀河[2] NGC4258（図 13.3）である．天文学者は電波干渉計（10.3 節）を使って，この銀河の中心領域の周りから詳しい情報を得ている．水蒸気は中心を囲む物質の円盤を追跡する物質である．円盤中の凝縮（「小雲」）により 1.35cm の波長の水メーザーが生じる．これらのメーザーは，電波干渉計でテスト粒子としてたどれる明るい点源であり，それによって銀河中心の時空幾何学を探ることができる．図 13.3 で示したように，それらの速度は，$3.5 \times 10^7 M_\odot$ を中心質量とした場合，ニュートン力学 [(13.7) 式を参照] によって予言される「ケプラープロファイル」上に正確に乗る．よって，NGC4258 の中心にブラックホールが存在することを示す非常によい証拠があることになる．

我々の銀河中心に $3 \times 10^6 M_\odot$ 程度の大きさのブラックホールが存在するよい証拠がある．地球の大気の揺らぎを部分的に埋め合わせる補償光学を使って赤外で観測すると，銀河中心付近の星の運動が驚くべき精度で観測される．図 13.4 は数年間にわたって観測された星の運動である．我々の銀河中心にブラックホールが存在することがこれらの星の運動とニュートン力学から推測できる．これまでに示した 2 つの例のようにして，銀河内の天体の回転が測定されているのは，たった 2,3 個 の銀河だけである．個々の天体の運動が見つかっていないときでも，星の**平均**運動は，たくさんの星からの積分的輝線のドップラー広がりによって測定される．中心に集中した質量の近くで輝線は大きく広がる．この種の証拠から推測すると，たぶん十分重いすべての銀河中心にはブラックホールがあるのだろう．

ブラックホールと活動銀河核

普通に見える銀河のコアから強力な放射が出ており，そのコアは銀河内の星をすべて集めたものよりもずっと明るいことがある．この放射は星の光ではない．波長のスペクトルが星に特徴的な近似的黒体放射にしてはあまりに広がりすぎている．これらは，活動銀河核（Active Galactic Nucleus, AGN）をもつ銀河である．AGN はクェーサーを含む天体の分類であり，宇宙で最も強

---

[2] 最も明るい銀河は歴史的に重要なカタログ中の番号として知られている．NGC は 1895 年から 1908 年の間に出版された *New General Catalog* のことをいい，それ自身は 1864 年に出版された *General Catalog* の改訂版である．最も早い時期のものの 1 つは 1781 年からのメシエカタログであり，その番号はまだ使われている．たとえば M31 はアンドロメダ銀河である．同様に，3C は電波源の *Third Cambridge Catalog* である．他にもまだまだたくさんある．

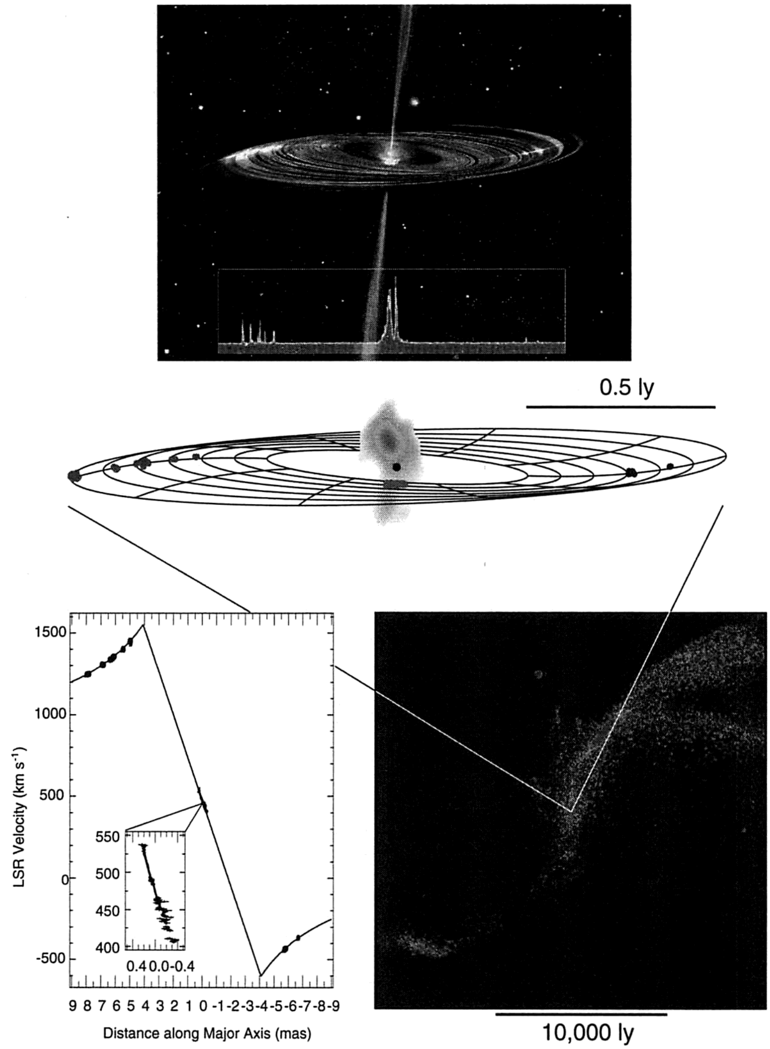


図 13.3　NGC4258 銀河中の巨大ブラックホールの存在の証拠．上図はこの銀河中心の分子降着円盤のスケッチであり，水蒸気の軌跡が集中していることからメーザーによって発見された．下図は，輝線のスペクトルであり，不連続の特徴は速度の違う小雲（ドップラー偏移）に対応する．真中の図はまさに円盤中心の電波像である．小さな塊は電波干渉計で得られたメーザー発光水蒸気雲の像であり，円盤の見えない部分を表すグリッドに重ね合わせられている．左下のグラフに雲の半径速度を，像の長軸に沿った位置の関数として示した．速度はケプラープロファイルを形どり中心質量 $3.5 \times 10^7 M_\odot$ に対応する．ケプラー的振る舞いからのズレは小さく（0.3% 未満），中心質量は全体が半径 0.13pc の円盤の内側の端より内側になければならない．ブラックホールは，これほど小さな体積中に，これほど強く圧縮された質量をもつことが知られている唯一の天体である．右下の像はジェットからの電波放射であり，分子降着円盤の回転軸に沿って伸びている（ジェットは画家のスケッチの円錐として描かれている）．

力な永続的放射源のいくつかをメンバーとしている．明るい AGN は親銀河があまりに暗くて見えないほど遠い距離で見つかり，その AGN のほとんどはこの分類に入る．AGN はいろいろな興味深い性質から特徴づけられるが，ここではそのうちのいくつかについて述べる[3]．

- **高光度** 観測された AGN の光度は $\sim 10^{42}$erg/s から $\sim 10^{48}$erg/s の範囲にある．これがどんなものか知ってもらうために，典型的な銀河の光度は $\sim 10^{44}$erg/s であることを挙げておく．つまり，最も明るい AGN は典型的な銀河のすべての星の和より 1 万倍も明るい．
- **小さいサイズ** 放射領域の大きさは光源が変化する時間内に光が進む距離として評価することができる．光月（光が 1 ヶ月に進む距離）のサイズは希れではない．これに対して，我々の銀河の見える円盤部分の大きさは約 6 万光年である．

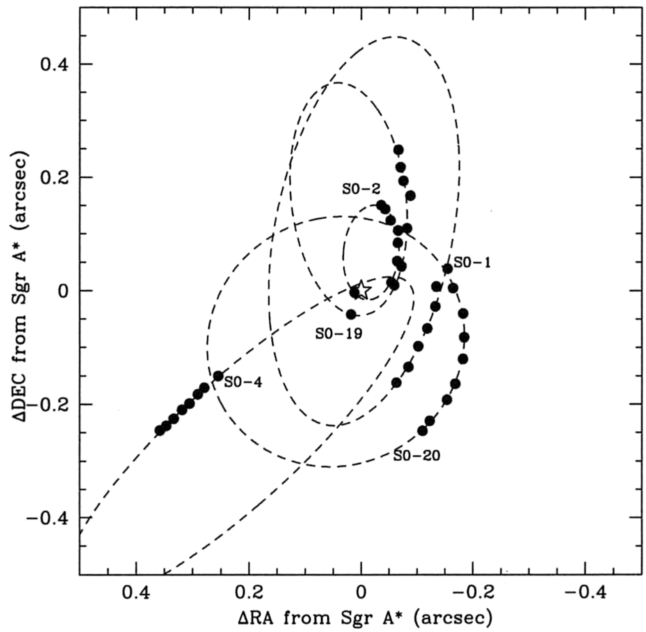


図 13.4 我々の銀河中心のブラックホールの証拠．Ghez et al.（2002）より．☆によって表された我々の銀河中心の位置にある電波源 Sgr A* 付近の星の角度-時間を示した．点は 7 年周期に渡り補償光学技術を使って得られた赤外位置の 1 年平均である（暗い星が明るい星の近くにきたときは 1 つの星の位置だけを示した）．地球に基づく赤経（DEC）と赤緯（RA）の極座標が使われている．データを合わせたケプラーの楕円を空に射影したところが示され，始めの位置の近くに軌道の名称が記されている（星が半径方向にも動いていれば，射影された楕円の焦点にある必要はない）．観測された運動は電波源の位置に $(3.7 \pm 0.2) \times 10^6 M_\odot$ ブラックホールがあることとよく合う．

---

[3] 詳しくは Krolik（1999）を見よ．

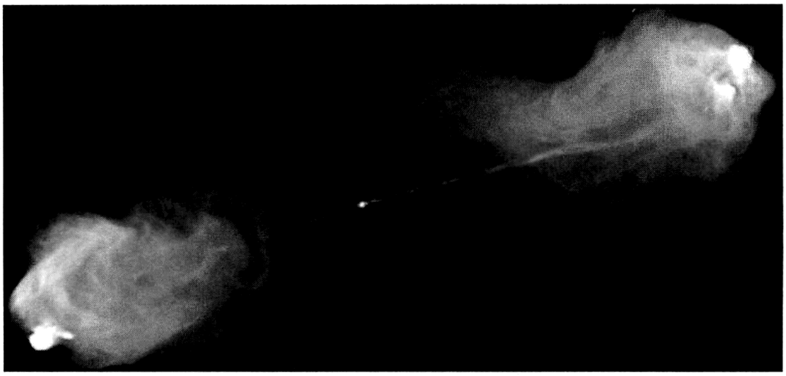


図 13.5　電波銀河 Cygnus A．電波源 Cygnus A（3C 405）を 22cm の波長で撮影した写真である．これは空で最も明るい電波源の 1 つで，宇宙で最も強力な永続的電波源の 1 つである．2 つの電波ローブが，それらの間の小さなドットのコア天体から放たれた高エネルギー粒子のジェットによって作られる．これらのジェットが希薄な銀河間物質により減速させられるとローブができる．ローブ間距離は約 45 万光年である．これは典型的な銀河よりもかなり大きい．この強力な天体の背後にあるエンジンはきっと回転するブラックホールであり，太陽系の直径ほどで，ローブの中間にあるが，電波では見えない．

- **広非熱的スペクトル**　電磁波スペクトルの X 線，可視光，電波帯でほぼ等しく放っている AGN がある．これは 1 個の星やいろいろな種類の星からなる集団から放射される近似的な黒体スペクトルとは似ても似つかない．
- **電波ジェット**　AGN は電波源の中心にあり，どんな大きさの銀河よりも大きく広がった物質の流出のジェットが見られる．これは図 13.5 に示した通りである．

AGN によって放出される異常に強力な放射と電波源の広がったジェットを操っている小さなものとは何だろうか．現代宇宙物理学でありふれた答えは，発生源は AGN のコアにあり，100 万から 10 億太陽質量のオーダーの質量を持つ回転巨大ブラックホールである．回転ブラックホールの分類は第 15 章で詳しく考察する．シュワルツシルトブラックホールは回転ゼロの極限的な場合である．

回転ブラックホールには AGN にエネルギーを供給することができる 2 つの方法がある．その 1 つが降着物質の重力束縛である．この機構は 11.2 節で考えた X 線源の背後にあるものと同じようなものであるが，質量や長さの規模が大きくなって機能している．269 ページのボックス 13.1 で考察したように，コンパクト天体にはたらく重力束縛は，原理的に，静止質量を放射エネルギーに変換する熱核融合よりも効率がよい．したがって，AGN の強力なエネルギー供給の自然な発生源となっている．しかし，300 ページのボックス 15.1 で述べるブラックホールの**回転エネルギー**の電磁的な引き出しはそれとは別の重要な機構である．たぶん，両方とも電波源の全光度に貢献しているのだろうが，回転エネルギーの取り出しが，ブラックホールの回転軸に沿っているジェットの自然な機構になっているのだろう．

13.3 ブラックホールの量子的蒸発 —— ホーキング放射

古典的一般相対論ではどんなものもブラックホールの内部から脱出することはできない．しかし，量子力学が考慮されると，ブラックホールは，質量の逆数に比例する温度をもつ黒体のように輝く．これを 1974 年にホーキング（Stephan Hawking）が発見した．この温度は，太陽質量やこの章の初めで考察した巨大ブラックホールでは無視できるほど小さい．しかし，質量がかなり小さい原初ブラックホールが宇宙初期にできたと考えられており，特に爆発的な蒸発が起きることからそれは重要である．この節は，球対称ブラックホールに注目しホーキング効果を簡単に紹介する．十分に考察するためには量子場の理論が必要なので，議論は必然的に限られる．

粒子と反粒子は対消滅し，放射の形でエネルギーが発生する．逆に，十分大きなエネルギーがあれば，粒子反粒子対がつくられる．たとえば粒子加速器内である．ゼロエネルギーの真空で量子揺らぎが生じ，粒子反粒子対が発生し，短時間後消滅する．エネルギー保存則のため，平坦時空ではこのような揺らぎは長時間続かない（問題 6）．粒子と反粒子のエネルギーは両方とも正でなければならないが，真空のエネルギーは 0 である．平坦時空で真空から粒子反粒子対が永続的に生成すればエネルギー保存が破れるだろう．

ブラックホールの地平近くで粒子反粒子対真空揺らぎを考えよう．地平の一部を含む小さな時空領域の幾何学について特別なものはない．実際，もし領域が十分小さければ，幾何学は平坦時空と

ボックス 13.1　熱核融合 vs. 重力結合

ブラックホールとコンパクト相対論星はなぜこれほど多くの高エネルギー現象の中心に位置しているのだろうか．答えは，重力結合は静止質量を解放する機構において熱核融合（星や水素爆弾のエネルギー供給過程）よりも効率がよいからである．

太陽のコアで水素は燃えて，熱核反応の連鎖によりヘリウムを作っている．以下がその反応である

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He}+(26.731\mathrm{MeV}\ \text{の解放エネルギー}) \tag{a}$$

解放されるエネルギーは静止エネルギーのほんの一部である：

$$\frac{(\text{解放されたエネルギー})}{(\text{静止エネルギー})}=\frac{27\mathrm{MeV}}{4\times 938\mathrm{MeV}}\sim 1\% \tag{b}$$

これは典型的な熱核反応過程である [図 12.1 を見よ]．

熱核反応と重力結合を対比せよ．ブラックホール降着円盤の形成過程において，粒子は遠方の近似的自由状態から，低いエネルギーの中心結合軌道に移る．シュワルツシルトブラックホールの幾何学では単位質量当たりのエネルギー e は一般的に (9.21) 式

$$e=(1-2M/r)u^{t} \tag{c}$$

である．円軌道の場合，u^t は $(1-3M/r)^{-1/2}$ である [(9.48) 式を参照]．自由粒子と半径 r の円軌道に束縛された粒子の静止質量差当たりの解放エネルギーの比は

$$\frac{(\text{解放エネルギー})}{(\text{静止質量})}=1-(1-2M/r)(1-3M/r)^{-1/2} \tag{d}$$

である．

$r=6M$ の最も内側の安定円軌道に対して 6% になる．シュワルツシルトブラックホールに重力的に束縛されることは，熱核融合よりも解放エネルギーにおいてほぼ 6 倍効率がよい．

回転ブラックホールでは，静止エネルギーの 42% までを原理的に解放することができる．これがブラックホールと相対論星が自然界で最も高エネルギー現象の中心に位置する理由である．

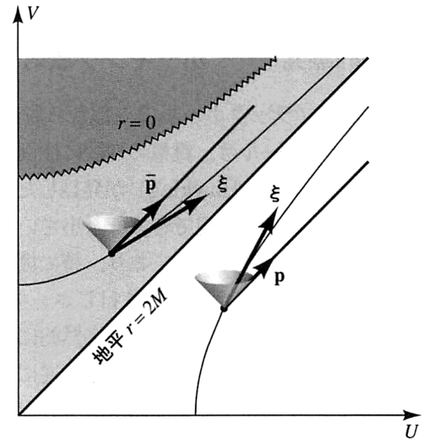


図 13.6　ホーキング効果．このクルスカル図は，ブラックホールの地平の近くの真空揺らぎによって作られた静止質量 0 粒子-反粒子対を示している．粒子と反粒子は 4 元運動量 $\mathbf{p}$ と $\bar{\mathbf{p}}$ で地平の両側で作られる．この 2 つの位置におけるキリングベクトル $\boldsymbol{\xi}$を示した．保存量 $(\mathbf{p}+\bar{\mathbf{p}})\cdot\boldsymbol{\xi}$ が真空の値つまり 0 をとるため，$\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ と $\bar{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}$ は等しくて反対の符号でなければならない．r 一定の双曲線に沿って $\boldsymbol{\xi}$の方向 [(12.15) 式を参照] が 2 粒子の生成の位置に示されている．地平の外部で$\boldsymbol{\xi}$は時間的で，$-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}>0$ である．地平の内部で$\boldsymbol{\xi}$は空間的であり，$-\bar{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}$ は保存則を満たすため，負になる**はずである**．外部の粒子は無限遠に到達し，そこでホーキング放射として見える．ブラックホールの質量は脱出粒子へのエネルギー損失により減り，その値は $-\bar{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}$ である．この図の中の向きのついた線分は 2 点のベクトルの方向を概略的に表しているだけである．

区別できない（7.4 節）．このような領域で，ときどき真空揺らぎにより地平の外部で粒子ができ，内部で反粒子ができる．これを図 13.6 に説明した（内側で粒子が作られ，外部で反粒子がつくられることだってあるが，以下の議論は同じである）．平坦空間の全エネルギーと類似して，シュワルツシルト幾何学の保存量は 9.1 節で定義したように，生成された粒子の全 4 元運動量とキリングベクトル$\boldsymbol{\xi}$ の内積の値である．もし $\mathbf{p}$ が粒子の 4 元運動量であり，$\bar{\mathbf{p}}$ が反粒子の 4 元運動量なら，真空から生じるどんな揺らぎも保存則により

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}+\boldsymbol{\xi}\cdot\bar{\mathbf{p}}=0 \tag{13.8}$$

が成り立つ必要がある．シュワルツシルト座標で$\boldsymbol{\xi}$ の成分は $(1,0,0,0)$ なので [(9.2) 式を参照]

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}=-(1-2M/r) \tag{13.9}$$

となる．よって地平の外部（$r>2M$）で$\boldsymbol{\xi}$ は時間的であり，内部（$r<2M$）で空間的である．この差がホーキング放射の起源である．

地平の外部で $-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}$ は正でなければならない．これは，4 元速度が時間的方向 $\boldsymbol{\xi}$ を向く観測者によって測定されるエネルギーに比例するからだ．もし反粒子も地平の外部にあると，$-\boldsymbol{\xi}\cdot\bar{\mathbf{p}}$ に対して同じ要請がされ，保存条件 (13.8) が満たされなくなるだろう．しかし内部の反粒子に対して$\boldsymbol{\xi}$

は空間的であり，このような要請はない．そこでは $-\boldsymbol{\xi}\cdot\bar{\mathbf{p}}$ はどんな観測者に対してもエネルギーではない．実際，これは，$\boldsymbol{\xi}$の方向を向いた空間的基底ベクトルをもつ観測者の空間運動量の成分である．空間運動量の成分は正ではない．よって，粒子が地平の反対側で生成されると，真空からの対生成過程はシュワルツシルト幾何学の保存則から許される．この過程は，生成対の存在する特徴的間隔が非常に短いため，地平近くが最も適している．

図 13.6 で説明した例で，粒子は無限遠まで届き，ブラックホールからの放射として見ることができるだろう．このような多くの生成対から生じる結果はホーキング放射となる．全体を通じたエネルギー保存から，無限遠で測定するブラックホールの質量は，ちょうど内部の反粒子の $-\boldsymbol{\xi}\cdot\bar{\mathbf{p}}$ の値だけ減少しなければならない．この過程は，粒子が内部で作られ外部で反粒子が作られた場合でも同じように作用する．ブラックホールは粒子と反粒子を同じ量放射するだろう．

ホーキング過程は，重力崩壊で作られる地平のどこでも起きるだろう．しかし，フラックスは，ブラックホール幾何学が時間独立なので，崩壊した後絶え間なく出ていると推測される．これは後に詳しい解析を行い証明する．

ホーキング放射について次元解析を少し行えば，無限遠の静止観測者によって求められるブラックホール質量の損失率 dM/dt を推測できる．t はその静止観測者の固有時である．ホーキング放射は量子力学的過程なので，損失率はプランク定数 $\hbar$ に比例すると推測できる．幾何学単位系で，$\hbar$ はプランク長 (1.6) の 2 乗であり

$$\hbar(\text{in cm}^2) = G\hbar(\text{in erg}\cdot\text{s})/c^3 \equiv \ell_{Pl}^2 = 2.62\times 10^{-66}\text{cm}^2 \tag{13.10}$$

これはすべての量子重力現象を支配する．

ブラックホールによって放射される粒子と反粒子の静止質量が 0 ならば，$\hbar$ から得られるもの以外の長さのスケールはブラックホールの質量 M である．$\hbar$ に比例して dM/dt のように無次元量となる，M と $\hbar$ の唯一の組合せは $\hbar/M^2$ である．よって，ブラックホールがホーキング放射によって質量を失う時間的割合は未定の無次元定数 ν を使って（$G=c=1$ 単位系）

$$\frac{dM}{dt} = -\nu\frac{\hbar}{M^2} \tag{13.11}$$

の形になると期待できる．詳しい量子場理論の計算をすると，ちょうどこの形の損失率が得られる．

場の理論の計算によると，損失率 (13.11) 以上の情報が多く得られる．放射粒子のエネルギー分布である．特にこれらすべての詳しい特徴は 1 つの簡単な事実にまとまられる．ブラックホールがあたかも

$$k_BT = \frac{\hbar}{8\pi M} \tag{13.12}$$

の温度の黒体であるかのように光っている．ここで k_B はボルツマン定数である．この式は幾何学単位（$c=G=1$）であり，ここで k_BT（エネルギー）は長さの次元を持っている．G と c を戻すとこの式は

$$\boxed{k_BT = \frac{c^3\hbar}{8\pi GM}} \tag{13.13}$$

球対称ブラックホールのホーキング温度

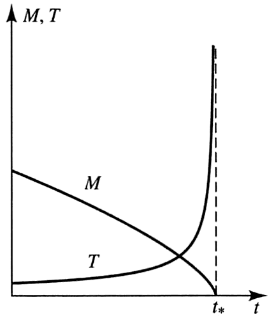


図 13.7　ブラックホールの蒸発．ブラックホールは有限時間内でホーキング放射により蒸発する．質量が減ると温度が上昇する．したがってブラックホールは小さくなると放射率を増していき，結果的に爆発的な最後を迎える．

となる．実は，これは純粋に次元的な理由で推測した放射率 (13.11) と関係がある．黒体はフラックス σT^4 で放射する．ここで σ はシュテファン–ボルツマン定数 $\sigma \equiv \pi^2 k_B^4/(60\hbar^3 c^2)$ である．ブラックホールの地平の面積 $16\pi M^2$ を通過して放射されるエネルギー発生率は $\nu = 1/(15,360\pi)$ の定数で (13.11) 式の形をしている．この議論では放射が伝わる幾何学の効果を無視しており，ν は正しい値とは少し違うが，(13.11) 式は正しい．

太陽質量で表すとブラックホールの温度は

$$T = 6.2 \times 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M}\right) \mathrm{K} \tag{13.14}$$

である．重い星の重力崩壊でできると思われる太陽質量ブラックホールの温度は無視できるほど低い．太陽質量程度や巨大ブラックホールは実際，ホーキング放射で失うエネルギーよりも 2.74K の宇宙背景放射によってより多くのエネルギーを得ているが，両方の効果とも完全に無視できる．しかし原初のブラックホールでは状況が違う．

ブラックホールが放射するにつれ，質量を失い，熱くなり，効率よく放射し，さらに熱くなり，さらに放射の効率がよくなり .... $M(t)$ の形は (13.11) 式から容易に計算できる．t_* の時間で完全に蒸発するブラックホールの場合

$$M(t) = [3\nu\hbar(t_* - t)]^{1/3} \tag{13.15}$$

となる．したがって，放射率はブラックホールが完全に蒸発する時刻 t_* の直前で最も大きくなる (図 13.7 を見よ)．

しかし例 13.2 で示したように，10^{14}g より小さいブラックホールだけが非常に熱く，宇宙年齢にわたり質量の大部分を放射することができる．これはほぼ地球の山程度の大きさである．初期宇宙に密度揺らぎの崩壊によりできた原初ブラックホールのうちこの質量の範囲に入るものがある．これらのブラックホールのうち爆発を 1 つ発見すれば原初ブラックホールが形成された初期宇宙の情報が得られるとともに，量子ブラックホール物理学の大きな証拠となるだろう．

例 13.2. ブラックホールの寿命　(13.15) 式は，ホーキング放射によって完全に蒸発する質量 M の球対称ブラックホールの寿命 τ_{Hawk} の評価ができると言い替えることができる：

$$\tau_{\text{Hawk}} \approx \frac{1}{3\nu}\frac{M^3}{\hbar} = 8.3 \times 10^{-26} \left(\frac{M}{1\text{g}}\right)^3 \text{s} \tag{13.16}$$

太陽質量ブラックホールの寿命は約 140 億年の宇宙年齢よりも遥かに長い．質量 10^{14}g で初期宇宙でできたブラックホールは今爆発しているのであろう．もっと小さいブラックホールはもっと早く蒸発しているだろうし，大きいものはもっと遅く蒸発するだろう．

質量をブラックホールに落とし，ブラックホールの性質を変えよう．その質量は大きくなり，面積も大きくなり，温度は下がる．特に，ブラックホールの特徴における小さな変化は熱力学第一法則と第二法則に支配されていることがわかっている．我々は球対称ブラックホールの限られた領域内で，ブラックホールの熱力学第一法則の形を推測するのに十分な情報を持っている．仕事をしないブラックホールの小さな変化は

$$dM = T\,dS_H \tag{13.17}$$

にしたがう．ここで S_H はブラックホールのエントロピーである．より一般的に，回転ブラックホールの場合，(13.17) 式には，外部トルクによってブラックホールになされる仕事を表す付加的な項がつく（問題 15.15)．ブラックホールのエントロピーは (13.17) 式，温度の式は (13.12) 式から推測することができる．質量 0 のブラックホールのエントロピーが 0 であることを仮定すると，特筆すべき関係

$$\boxed{S_H = \frac{k_B}{4\hbar}A} \tag{13.18}$$

ブラックホールのエントロピー

が得られ，これは**ベッケンシュタイン–ホーキングの公式**と呼ばれる．エントロピーはブラックホールの面積である．

12.2 節で考察したように，古典的に，質量を変えるどんな過程が起きても球対称ブラックホールの面積は増加する．熱力学第一法則から面積を (13.18) 式と同一視することは，エントロピー増大則である**熱力学第二法則**と整合性がとれる．量子力学的に，ブラックホールの質量はホーキング過程で減少することができる．しかし，それができるのは無秩序な熱放射を発生させるという犠牲をともなうときだけである．ブラックホールの全エントロピーと放射が増え，第二法則と整合性がとれる．これが，熱力学第二法則がブラックホールを考慮してどのように一般化されるのかを説明するアイディアである．

問題

1. 図 13.2 はブラックホール X 線連星 新星 Muscae の半径速度曲線である．曲線の対称的な形状から相互軌道が円形に近いことがわかる．この系の質量関数の値を評価せよ．軌道周期は 0.423 日である．

2. **ロッシュローブ**
   (a) 距離 d 離れた固定点にある 2 つの質点 M_1 と M_2 を考えよう．質量をつなぐ軸を通る平面内で全ニュートン重力ポテンシャルの等高線を描け．テスト粒子にはたらくニュートン重力が 0 になる位置を星の間に探せ．
   (b) 質量 M_1 の星が流体の外層で囲まれていて，その質量は重力ポテンシャルに貢献しないとする．外層の境界がなぜ等ポテンシャルになければならないかを説明せよ．外層から物質が第二の質量に降り積もろうとするときの境界の形を描け．これが**ロッシュローブ**である．図 13.1 と比べよ．

   コメント：この問題では質量が空間の固定点にあると想像している．連星系のモデルでは，互いを回りあっている．より難しい問題として，この回転も正しく採り入れてロッシュローブの形を求めよ．
3. 図 13.5 の電波源 Cygnus A のイメージで，一方のジェットがもう一方に比べてかなり明るい．電波源の回転ブラックホールモデルによれば，2 つのジェットが互いに反対方向に放射されることになる．特殊相対論の有名な効果は明るさが違うことを説明するのに役立つ．強度が 100 倍違い，軸が視線方向に対して $45°$ の角度で傾いていると仮定すると，可視光放射の発生源の速度について何がいえるだろうか．
4. [E] 図 13.4 は，我々の銀河中心の約 $3 \times 10^6 M_\odot$ ブラックホールから約 9kpc 離れたところにある星の軌道を表している．
   星が円軌道上にあり，軌道面が視線方向に対して垂直にあると仮定し，中心からの角度間隔の関数として，予測される軌道速度の粗い**評価**を行え．その結果を，数年間にわたって示された角度距離から評価される速度とどのように比べたらよいか．
5. 宇宙初期にできたブラックホールのうち，宇宙が放射に対して透明になった時刻（ビッグバンから約 40 万年後）にホーキング過程を通じて爆発したであろうブラックホールの質量を求めよ．
6. [E] 真空揺らぎで発生する電子陽電子対がどれくらい長く存在できるのか**評価せよ**．真空揺らぎはエネルギーと時間の不確定性原理 $\Delta E \Delta t > \hbar$ と矛盾しない時間 Δt だけエネルギー保存が破れることを仮定せよ．
7. [E] 原初ブラックホールの寿命が終わるときに最後の爆発が起きるが，その 1 秒間で放出されるエネルギーを地球で観測したとすると，同じ時間内で近傍の星から受信されるエネルギーと同じくらいになるブラックホールの距離を**評価せよ**（明確にするため，星は太陽の光度と同じで 10pc 離れているとせよ）．

第 14 章

少しの回転

これまでの章で，多くの物理学の基礎となっていたシュワルツシルト幾何学は厳密に球対称である．回転していない星の外部の幾何学に対しては優れた近似であり，回転していないブラックホールの外部では厳密な幾何学になっている．しかし，自然界で**厳密な**意味で回転していない天体は存在しない．たとえば太陽の赤道は約 27 日の周期で回転している．向心加速度の結果，太陽は厳密には球対称ではなく，回転軸に沿ってわずかに潰れている．しかし球から大きく逸脱しているわけでもなく，赤道の直径は回転軸に沿った直径よりも 100000 分の 1 だけ小さい．差が小さいということが，シュワルツシルト幾何学が太陽外部で曲がった時空に対して優れた近似になっている理由である．

回転天体が作る曲がった時空は，次章で，回転するブラックホールを考察するとわかるように，シュワルツシルト幾何学よりも豊富で複雑な構造を持っている．しかし，制限つきだが扱いやすい場合がある．**遅い回転**である．このとき天体の回転は十分遅く，球対称シュワルツシルト計量からのずれは角速度または角運動量の 1 **次** だけが重要になる．向心加速度は角運動量の 2 **次**なので，天体の形は 1 **次**では回転的に歪められず，球対称である．その場合，なぜ外部の時空幾何学に変化が起きるのだろうか．その答えは，一般相対論では，質量-エネルギーの分布によってだけでなく運動でも曲率が作られることを予言しているからである．時空曲率が小さく，重力源の速度 V も小さいと，これらの効果は典型的に V/c のオーダーで，質量分布それ自身の GM/Rc^2 の効果よりも小さい．これは電磁気のときとそう違わない．実際，場は電荷分布だけで作られるのではなく電流からも作られる．この類似性を推し進めて，$(V/c)(GM/Rc^2)$ 効果は**磁場的重力**と呼ばれることがある．この章で磁場的重力効果の簡単な例を挙げる．それはゆっくり回転する天体によって作られる慣性系の引きずりである．この章で引きずりが小さい場合を扱い，次章では引きずりの大きい回転ブラックホールを扱う．

14.1　慣性系の回転的引きずり

33 ページのボックス 3.2 で，特殊相対論の慣性系は，宇宙の彼方にある物質が静止している系に対して回転していないという実験事実を述べた．この遠い物体すべてがどうにかして回転し始めたものとすると，局所慣性系（その中で，ボックスで述べたフーコーの振子は歳差しない）は，その物体とともに回転すると思われるかもしれない．宇宙の物体のある部分が回転すると，慣性系はわずかに引きずられるかもしれない．一般相対論は，このような慣性系の回転的引きずりを予言

する．

地球の回転でさえ近くの慣性系をわずかに引きずる．無限遠に対する慣性系に発生する地球表面での角速度 ω は，次元的に地球の角速度 $\Omega_\oplus$ と

$$\omega \sim \left(\frac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2}\right)\Omega_\oplus \tag{14.1}$$

の関係があるかもしれない．ここで $M_\oplus$ と $R_\oplus$ はそれぞれ地球の質量と半径である．この章の後半でこの評価が正しいことを確かめ

$$\omega \sim 0.3''/\mathrm{yr} \tag{14.2}$$

となることを知るだろう．したがって，慣性系は毎年，月面上のフットボール場[1]を見込む程度の角度回転する．そんなに小さくても，執筆時，人工衛星実験は一般相対論によって予言されるこの小さな効果を検出中である（283 ページのボックス 14.1 を見よ）．

ジャイロスコープは，慣性系の引きずりを観測するための自然なテスト物体である．ジャイロの自転は慣性系の固定方向を向いているからである．したがって，曲がった時空におけるジャイロスコープ運動の考察は，慣性系の引きずりを考察する手始めとして相応しい．

14.2　曲がった時空のジャイロスコープ

自転する小さなテスト物体は**テストジャイロ**または **テストスピン**と呼ばれる．スピンの振る舞いを調べることは時空の幾何学を探査する方法の一つである．この節では，自由落下するテストジャイロの自転の運動方程式を示す[2]．

テストジャイロは 4 元速度 $\mathbf{u}(\tau)$ が測地線方程式 (8.15)

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma = 0 \tag{14.3}$$

にしたがう**時間的**測地線上を運動する．4 元速度に加え，ジャイロは空間的**スピン 4 元ベクトル** $\mathbf{s}(\tau)$ によって表される．ジャイロが静止している局所慣性系で，スピンが空間的ベクトル $s^\gamma = (0, \vec{s})$ であると期待できる．この系でジャイロの 4 元ベクトル $\mathbf{u}$ の成分が $u^\alpha = (1, \vec{0})$ なので

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{14.4}$$

となる．より一般的に条件 (14.4) はどんな系でも成り立つ．ジャイロの全スピン $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})^{1/2}$ は τ に独立な運動の定数である（問題 1）．その単位は角運動量の単位である．古典力学のように，角運動量の大きさが一定の角度運動は**歳差**と呼ばれる．

平坦時空でスピンの運動方程式は慣性系の中で一定であることを表している：

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = 0 \qquad (\text{平坦または LIF}) \tag{14.5}$$

---

[1] フットボール場であればどんな種類でもかまわない．

[2] 簡単のため，測地線上を運動する自由落下の運動方程式だけをこの章で考える．加速ジャイロの自転の振る舞いはもっと複雑である．

(14.5) 式を曲がった時空へ一般化した形を推測する手助けとして 3 つの事項がある．一般化の式は，テストジャイロが測地線にしたがって運動したとき，スピンがどのように変化するのかを決める．(1) 等価原理から，一般化の式は局所慣性系で (14.5) 式になることがわかる．(2) 一般化の式はスピンの成分に線形であり，大きなスピンは小さなスピンと同じように歳差する．(3) 一般化の式はすべての座標系で同じ形をとる．3 つの基準を満たす方程式は

$$\boxed{\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} s^\beta u^\gamma = 0} \tag{14.6}$$

ジャイロスコープ方程式

である．基準 (1) は，Γ が局所慣性系で 0 になるため，満たされる．基準 (2) が満たされるのは明らかである．基準 (3) をチェックするためには，つまり (14.6) 式の形が同じであるかどうか調べるためには，それとは別の座標系に変換すればよい．そのままで実行できるが，そうすると問題 7.7 で行ったような計量の座標変換を使った繁雑な計算になる．力のあり余った人や懐疑的な人はその通りにこの計算をチェックした方がよいかもしれない．しかし根気のある人は第 20 章まで待った方がよいだろう．そこでエレガントな方法を示す．

我々は (14.6) 式を**ジャイロスコープ方程式**と呼ぶことにする．この方程式からテストジャイロが測地線に沿って運動するとスピンの成分がどのように変化するのかがわかる（図 14.1）．その式の予測の中で $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}$ と $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}$ が測地線に沿って一定であることをチェックすることは難しくない (問題 1)．

14.3 測地線歳差

まず，質量 M の球対称**非回転**物体の周りの軌道上にあるジャイロスコープの振る舞いを考えよう．簡単のため，赤道面内の円軌道を考えよう．ジャイロに乗っている観測者は赤道面でスピン歳差を見るだろう．観測者の系でジャイロは静止しているのだが，スピンは空間成分しか持たず [(14.4) 式を参照]，大きさは一定で，赤道面内の反転のもとで対称であることから，その中で運動し始めれば，赤道面内にい続ける．よって平面内に限られた歳差がジャイロのできるすべてとなる．

軌道の初めにおいて観測者は赤道面内のある方向（たとえば遠方の星の方向）を向いているとしよう．一般相対論によれば，軌道が一回りして閉じたとき，一般的に，ジャイロは初めのときに比べ角度 $\Delta\phi_{\text{geodetic}}$ だけ別の方向を向くことになるだろう．方向の変化は**測地線歳差**と呼ばれ，図 14.2 に説明した．

$\Delta\phi_{\text{geodetic}}$ の値は，回転する観測者の直交基底ではなく，ジャイロ方程式が (14.6) 式の座標系で，直接求められる．シュワルツシルト座標の線素はよく知られている (9.9) 式である:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{14.7}$$

円軌道はシュワルツシルト座標半径 R で，赤道面 $\theta = \pi/2$ にあるとする．4 元速度 $\mathbf{u}$ の空間部分だけが ϕ 方向にあり

$$u^\phi \equiv \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \Omega u^t \tag{14.8}$$

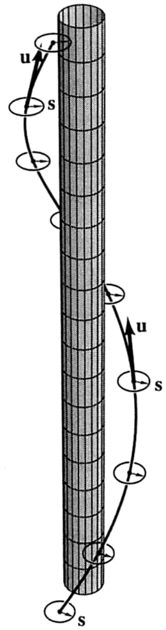


図 14.1　回転しない球対称天体を回る軌道上のジャイロスコープ．軌道速度は光速に比べ小さい．この時空図で，時間は上に流れ，空間は水平に広がっている．図がページに入るように，縦方向（時間）の距離を，横方向の距離に対して 5 倍圧縮した．チューブは，天体の表面の世界シートであり，この周りでジャイロの世界線がねじれる．スピン $\mathbf{s}$ はジャイロの 4 元速度 $\mathbf{u}$ に垂直である．ただし，その関係は時間スケールを縮小したため明らかではなくなっている．スピンはジャイロとともに落下する局所慣性系に固定されたままであるが，天体によって作られる時空曲率のために無限遠に対して歳差している．これが測地線歳差と呼ばれるものである．

ここで $\Omega \equiv d\phi/dt$ は軌道角速度である．これは (9.46) 式

$$\Omega^2 = \frac{M}{R^3} \tag{14.9}$$

により質量 M と半径 R の関係式になる．4 元速度の残りの成分 u^t は $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ の条件により決まる．これは以下の計算では必要ないが (9.48) 式で与えられる．$\mathbf{u}$ の成分は

$$\mathbf{u} = u^t(1, 0, 0, \Omega) \tag{14.10}$$

であり，u^t は (9.48) 式，Ω は (14.9) 式によって与えられる．

シュワルツシルト計量 (14.7) と 4 元ベクトル (14.10) をあわせたジャイロスコープ方程式 (14.6) から軌道上でジャイロのスピンの方向変化を予言できる．スピンの大きさを s_* とし，赤道面内で r の方向を向いていたと仮定する．与えられた初期条件のもとで 4 つの成分 $(s^t, s^r, s^\theta, s^\phi)$ に対して (14.6) 式を時間の関数として解こう．2 成分はすぐ片付けられる．初め $s^\theta = 0$ とすれば，問題の（北極）–（南極）対称性のため，0 のままになる（問題 2）．s^t は (14.4) 式によって残りの空間

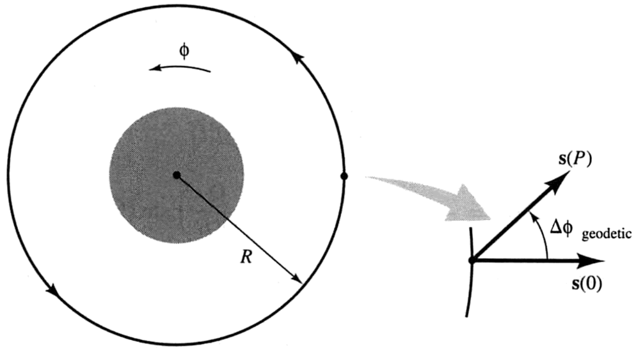


図 14.2　測地線歳差．回転していない球対称天体の赤道面の概略的な図である．ジャイロスコープはシュワルツシルト座標半径 R の円軌道を運動している．軌道の出発時 $t=0$ で，スピンは半径方向を向いている．1 軌道回ると，スピンは軌道運動の方向に，角度 $\Delta\phi_{\mathrm{geodetic}}$ だけ回転してしまっている．

成分に関係づけられる．これを書けば

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = -\left(1-\frac{2M}{R}\right)s^t u^t + R^2 s^\phi u^\phi = 0 \tag{14.11}$$

である．(14.8) 式を使って s^t を解くと

$$s^t = R^2\Omega\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1} s^\phi \tag{14.12}$$

となる．

s^r と s^ϕ 成分だけがまだ解けずに残っている．s^r と s^ϕ について 2 つの線形方程式を与えるようにジャイロ方程式 (14.6) を整理することができる．(14.6) 式の r と ϕ の成分を書き下すのに必要なシュワルツシルト計量のクリストフェル記号はすぐに計算できるが，付録 B にもある．これらと (14.10) 式と (14.12) 式を使って s^t を消去し，ジャイロ方程式 (14.6) の r と ϕ 成分から 2 つの連立方程式を導くことができる：

$$\frac{ds^r}{dt} - (R-3M)\Omega s^\phi = 0 \tag{14.13a}$$

$$\frac{ds^\phi}{dt} + \frac{\Omega}{R}s^r = 0 \tag{14.13b}$$

ここで τ 微分は $u^t d\tau = (dt/d\tau)d\tau = dt$ を通じて t 微分に変換した．

(14.13a) 式を使い (14.13b) 式から s^r を消去すると

$$\frac{d^2 s^\phi}{dt^2} + \left(1-\frac{3M}{R}\right)\Omega^2 s^\phi = 0 \tag{14.14}$$

となる．これは振動数

$$\Omega' = \left(1-\frac{3M}{R}\right)^{1/2}\Omega \tag{14.15}$$

の調和振動子のよく知られた式である．スピンが $t=0$ で r 方向を向いて（$s^{\phi}(0)=0$）始まったとき，$s^r(t)$ と $s^{\phi}(t)$ の解は

$$s^r(t) = s_* \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} \cos(\Omega' t) \tag{14.16a}$$

$$s^{\phi}(t) = -s_* \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} \left(\frac{\Omega}{\Omega' R}\right) \sin(\Omega' t) \tag{14.16b}$$

である．ここで解の規格化は $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})^{1/2}=s_*$ となるように選ばれている（問題 3）．

スピンは成分 $(0,(1-2M/r)^{1/2},0,0)$ で，単位ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ の方向を向いて $t=0$ から出発した．時間 $P=2\pi/\Omega$ 後の 1 軌道完了後，このベクトルのなす角がどうなっているか調べよう．この角度のコサインは，時刻 $t=P$ でのスピン方向の単位ベクトルと $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ ベクトルとの内積をとることで求められる．つまり

$$\left[\left(\frac{\mathbf{s}(t)}{s_*}\right)\cdot\mathbf{e}_{\hat{r}}\right]_{t=P} = \cos\left(2\pi\frac{\Omega'}{\Omega}\right) = \cos\left[2\pi\left(1-\frac{3M}{R}\right)^{1/2}\right] \tag{14.17}$$

である．したがって，図 14.2 に示したように，スピンは 1 回転した後，運動の方向に角度

測地線歳差

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{geodetic}} = 2\pi\left[1-\left(1-\frac{3M}{R}\right)^{1/2}\right] \qquad \text{(1 軌道当たり)}} \tag{14.18}$$

回転して戻ってくる．

スピンに乗った観測者に測定される角度を求めるために，ローレンツブーストを行い，シュワルツシルト座標基底における観測者の系で半径方向の成分を取り出す．しかし，半径方向は運動方向に対して横なので，観測者半径方向のベクトルの成分は $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ のもの [(5.9) 式を参照] と一致する．したがって (14.18) 式も共動観測者が測定する測地線歳差になる．

太陽系で M/R の値が小さいとき，測地線歳差は（G と c を戻すと）

$$\Delta\phi_{\text{geodetic}} \approx \frac{3\pi GM}{c^2 R}, \qquad \frac{GM}{Rc^2} \ll 1 \tag{14.19}$$

に近似できる．地球の周りを半径 R で円軌道をするジャイロスコープは

$$\Delta\phi_{\text{geodetic}} \approx 6.5\times10^{-9}\left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right)\text{rad} \tag{14.20}$$

回転して戻ってくる．ここで $R_{\oplus}=6378\text{km}$ は地球の半径である．これは，年に $8.4''(R_{\oplus}/R)^{5/2}$ の歳差率に対応する．これは非常に小さい値であるが， GP-B 衛星は測定できると期待されている（283 ページのボックス 14.1 を見よ）．実際，(10.4) 式と (10.6) 式の PPN 計量で $1/c$ の最初のオーダーを計算すると，測地線歳差は

$$\Delta\phi_{\text{geodetic}} \approx \left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi GM}{c^2 R} \tag{14.21}$$

となる（問題 7）．$\Delta\phi_{\text{geodetic}}$ を測定することは PPN パラメータを決めることであり，一般相対論で予言される $\gamma=1$ の値をテストすることになる．

14.4 ゆっくり回転する球対称天体外部の時空

球対称天体を 1 つの軸の周りにゆっくり一様に回転させ，天体外部の計量を球対称シュワルツシルト幾何学から変えることにしよう．この章の初めで述べたように，天体の回転的な歪みから生じる変化は天体の角速度 Ω の 2 次となる．言い替えれば，角運動量の 2 次になる．しかし，これらの変化に加え，一般相対論は J の 1 次の計量の変化も予言するが，それは J が小さいと重要になる．$J=0$ のとき，シュワルツシルト座標になる座標系の変化の形を引用しよう．座標系の極軸が回転軸と一致すると仮定すると：

$$\boxed{ds^2 = ds^2_{\mathrm{Schwarz}} - \frac{4GJ}{c^3r^2}\sin^2\theta(rd\phi)(cdt) + (J\ \text{の 2 次と高次の項})} \tag{14.22}$$

ゆっくり回転する物体外部の計量

ここで ds^2_{Schwarz} はシュワルツシルト座標 (14.7) で表した球対称シュワルツシルト幾何学の線素であり，G と c が付けられている．23.3 節で，ゆっくり回転する天体の計量をアインシュタイン方程式から導出することにする．

無次元比 GJ/c^3r^2 は回転の効果を支配する．角速度 Ω で回転する天体に対して，ニュートン理論に基づいて評価すると

$$J \sim I\Omega \sim MR^2\Omega \sim MRV \tag{14.23}$$

となるだろう．ここで M と R は天体の質量と半径で，I は慣性モーメントであり，V は特徴的な回転速度である．したがって無次元比は

$$\frac{GJ}{c^3R^2} \sim \left(\frac{GM}{c^2R}\right)\left(\frac{V}{c}\right) \tag{14.24}$$

となる．回転天体外部の時空曲率は質量と同様，その**速度**に依存し，重力赤方偏移のような $1/c^2$ よりも大きな $1/c$ のオーダーである．これらが磁場的重力効果である．

14.5 ゆっくり回転する天体の時空中のジャイロスコープ

時空の幾何学において回転の効果がジャイロスコープを使ってどのように調べられるかを説明するため，図 14.3 で示した思考実験を考えよう．ジャイロスコープのある実験室がゆっくり回る地球の回転軸に自由落下していく．初めジャイロのスピン軸は回転軸に垂直な方位角方向 ϕ_* を向いている．

地球が回転していなければ，ジャイロスピン軸は落下してもつねに同じ方位角 ϕ_* を向き，そのまま動かないであろう．これはジャイロスコープ方程式 (14.6) を解くと確かめられるが，シュワルツシルト計量における $\phi \to -\phi$ の対称性から直ちに理解できる．この対称性を破らないで歳差することはできない．したがって測地線歳差はこの軌道では 0 になる．しかし，地球の回転はこの対称性を破っており [(14.22) 式を参照]，ジャイロスコープは時間とともに歳差する．それではこれから計算しよう．

下方降下中のジャイロの歳差は測地線にしたがっているため，(14.22) 式の計量とジャイロスコープ方程式 (14.6) によって決まる．地球では歳差率が小さいと推測されるので [(14.2) 式を参

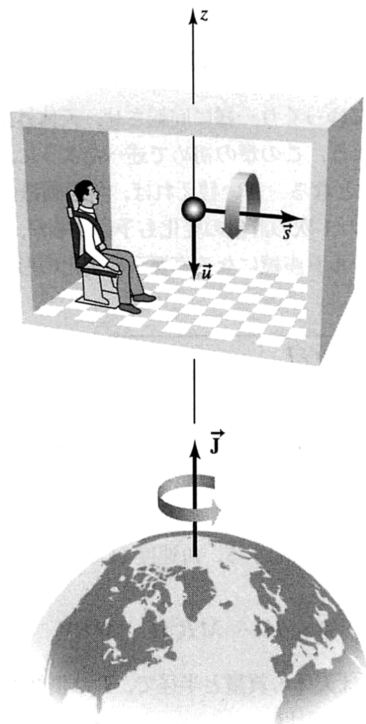


図 14.3　ゆっくり回転する天体による慣性系の引きずりを説明する思考実験．ジャイロスコープは，角運動量 J で回転する地球の回転軸に沿って落下している．ジャイロのスピンは最初 軸と垂直である．もし地球が回転していなければ（$J=0$），ジャイロスコープのスピンは遠方の星に対して変わらないであろう（ 33 ページのボックス 3.2 を見よ）．回転のため，物体の回転と同じ方向に，スピンは角速度 $2GJ/c^2z^3$ で歳差する．これがレンズ–ティリング歳差である．よって軸に沿った局所慣性系は天体の回転によって「引きずられる」．

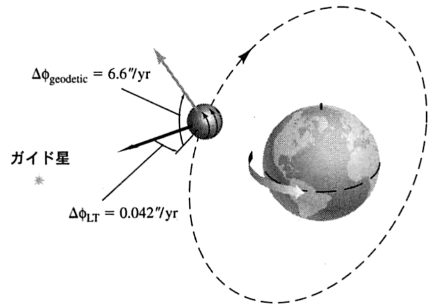
照]，$1/c$ の最低次まで歳差率を解こう．最低次は $1/c^3$ で，(14.22) 式の計量の回転補正のオーダーである．よく知られた変換 $x = r\sin\theta\cos\phi$ など [(7.2) 式を参照] によってシュワルツシルト (r,θ,ϕ) と関係づけられる直交座標 (x,y,z) は，極座標がジャイロが落下する軸に沿って特異なので，計算するのに便利である．これらの座標変換を行うと，計量 (14.22) は

$$ds^2 = (ds^2)_{\text{Sch}-\text{Cart}} - \frac{4GJ}{c^3r^2}(cdt)\left(\frac{xdy-ydx}{r}\right) + (J \text{ の 2 次と高次の項}) \tag{14.25}$$

になる．ここで，$(ds^2)_{\text{Sch}-\text{Cart}}$ は直交座標のシュワルツシルト計量である（その形は必要としないだろう）．ジャイロ方程式を解いて $1/c^3$ のオーダーまで歳差を求めることは，シュワルツシルト幾何学における GM/c^2r の因子は最終的な答えに影響を与えることができないことと指摘することによって，簡略化できる．なぜならそれらは $(GM/c^2r)\times(GJ/c^3r^2)$ のような項を歳差

ボックス 14.1　Gravity Probe B

2004 年 4 月 20 日 NASA は，Gravity Probe B（GP-B）衛星を打ち上げ，地球の回転による測地線歳差と慣性系の引きずりをともに測定する実験を行っている．人工衛星は 4 つの精度のよいジャイロスコープを搭載しているが，そのうちの 1 つを以下に示した．ジャイロスコープは直径 1.5 インチの一体化した水晶の球である．ジャイロスコープは，半分が 2 つ合わさって 1 つの覆いになっている容器の中で，受け皿状の電極によって静電的に浮いており，覆いに入ってくる気体によって回される．回転が 150Hz に達した後，気体はポンプで引き出され，球は自由に回転できるようになる．ジャイロスコープができる限り理想的な自由落下状態で作動していることを確かめるため，ジャイロの 1 つが「検査」質量として使われる．フィードバックループによって制御される小さなスラスター（制御用の小型のロケットエンジン）が，自由落下するジャイロの容器を中心位置に保つように制御し，他の 3 つに対して，引きずりのない自由落下の環境を確保する（168 ページのボックス 8.1 を見よ）．装置全体は，液体ヘリウム温度の超冷却状態に保たれ，ジャイロの方向を超伝導量子干渉素子で読み出す．



衛星は上で説明したように 640km の極軌道上を浮遊する．望遠鏡により，ガイド星を自動追尾できるようになっている．図は初めガイド星を指しているジャイロスピンが測地線歳差とレンズ–ティリング歳差によって変位するところを表している（ともに誇張してある）．測地線歳差の予言値 $6.6''/\text{yr}$ は 0.01% よりもよい精度で検証されるはずで，PPN パラメータ γ を正確に決定できる [(14.21) 式を参照]．$0.042''/\text{yr}$ の慣性系の引きずりの予測値が 1% の精度で測定できるはずであり，「磁場的重力」効果の決定的な実証となるだろう．

率に与え，せいぜい $1/c^5$ の次数にしかならないからである．このことは，最低次歳差率の計算を (14.25) 式で $M=0$ として行っていることと同じである．または，$(ds^2)_{\text{Sch-Cart}}$ を直交座標 $(ds^2)_{\text{flat}} = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ の平坦空間線素で行っているのと同じである．これにより代数計算を節約できる．

ジャイロスコープ方程式を書き下すことは，ジャイロが z 軸に沿って運動しているという事実によってさらに簡単になる．z 軸は計量の回転摂動が 0 になるところである．ただし，x と y についての微分は 0 にならない．実験室の 4 元速度は (t,x,y,z) 座標で t と z 成分をもつ．xy 面内にいるようにスピンをとる．したがって

$$u^\alpha = (u^t, 0, 0, u^z) \tag{14.26}$$
$$s^\alpha = (0, s^x, s^y, 0) \tag{14.27}$$

となる．スピンがこの平面で運動し始めていれば，そこにそのままい続けることを示すのは困難ではない（問題 8）．条件 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}=0$ は z 軸上で自動的に満たされる．

$(ds^2)_{\text{Sch-Cart}}$ を平坦計量で置き換えて (14.25) 式を計算すると，z 軸上で，s^x と s^y のジャイロ方程式 (14.6) 中で 0 にならないクリストフェル記号は $1/c$ の最低次で

$$(\Gamma^x_{yt})_{z\text{-axis}} = \frac{2GJ}{c^2z^3}, \qquad (\Gamma^y_{xt})_{z\text{-axis}} = -\frac{2GJ}{c^2z^3} \tag{14.28}$$

であることがわかる．s^x と s^y の方程式を書くと，$1/c$ の最低次で（$u^t \equiv dt/d\tau$ を使って τ 微分から t 微分に変換する）

$$\frac{ds^x}{dt} = -\frac{2GJ}{c^2 z^3} s^y \tag{14.29a}$$
$$\frac{ds^y}{dt} = +\frac{2GJ}{c^2 z^3} s^x \tag{14.29b}$$

が得られる．これらの式は，地球の回転と同じ方向を向いている座標軸 (x, y, z) に対して歳差するジャイロコープを表している．これはレンズ–ティリング歳差と呼ばれる． 中心から z の距離で瞬間的な回転率は

$$\Omega_{LT} = \frac{2GJ}{c^2 z^3} \tag{14.30}$$

である．この歳差は，物体の中心が静止し，ジャイロスコープが落下している系で計算されている．しかし，厳密に同じ歳差が自由落下実験室系内の観測者によって観測されるだろう．2 つの系をつなぐ z 軸に沿ったローレンツブーストはスピンの横方向 s^x と s^y に影響を与えず，$1/c$ のオーダーで時間の遅れの効果はないからである．

地球によるレンズ–ティリング歳差の大きさを

$$J_\oplus = I_\oplus \Omega_\oplus \equiv M_\oplus \mathfrak{R}_\oplus^2 \Omega_\oplus \tag{14.31}$$

と評価することができる．ここで $I_\oplus$ は地球の慣性モーメントであり，$\mathfrak{R}_\oplus$ の回転半径でまとめられる．地球の場合 $\mathfrak{R}_\oplus/R_\oplus \approx 0.576$ である．よって

$$\Omega_{LT} = 2\left(\frac{GM_\oplus}{c^2 R_\oplus}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R_\oplus}\right)^2\left(\frac{R_\oplus}{z}\right)^3 \Omega_\oplus \tag{14.32}$$

（明らかな値 $\Omega_\oplus = 2\pi/24\mathrm{h}$ を加え）見返しの数値を代入すると

$$\Omega_{LT} = 0.22'' \left(\frac{6378\mathrm{km}}{z}\right)^3 /\mathrm{yr} \tag{14.33}$$

が得られる．これは実際小さい効果であるが，GP-B 衛星実験（283 ページのボックス 14.1）で 1% の精度で測定されると期待されている．

地球を回る実際の軌道上にある GP-B 衛星のようなジャイロスコープは測地線歳差とレンズ–ティリング歳差の両方を経験する．レンズ–ティリング歳差は

レンズ–ティリング歳差

$$\boxed{\vec{\Omega}_{LT} = \frac{G}{c^2 r^3}\left[3\left(\vec{J}\cdot\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \vec{J}\right]} \tag{14.34}$$

のように高度に依存し，$\vec{r}$ が $\vec{J}$ の方向を向くとき，(14.30) 式と一致する．電磁気を習った人たちの場合，これは，$\vec{J}$ が双極子モーメントの役割を果たす特徴的な双極子のパターンであることがわかるだろう．

例 14.1. 回転物体の角運動量を測定 9.1 節で，シュワルツシルト幾何学の漸近的な性質をうまく利用して，遠く離れたテスト粒子の軌道の振る舞いから物体の質量がどのように決められるかを知った．同じように安定して回転する軸対称物体の角運動量も遠方のジャイロスコープの振る舞いから決めることができる．物体がゆっくり回転していれば，ある軌道上で 3 つの方向を向いたジャイロのスピンに生じるレンズ–ティリング歳差を測定し，(14.34) 式を使うと角運動量の 3 つの成分 $\vec{J}$ が得られる．しかし同じ測定法では，物体が**速く**回転していても，軸対称で安定に回転しジャイロが十分離れていれば，物体の角運動量が得られる．$\vec{J}$ がどんなに大きくても，十分大きな r に対して回転効果が平坦空間の計量の小さな補正になっているからである．したがって，(23.3 節でアインシュタイン方程式から示すように) 計量 (14.22) は安定して回転する軸対称物体から遠く離れたところで，形のきれいな漸近的な近似となっている．実際，ちょうど質量がそうであるように，角運動量は時空幾何学の漸近的性質を表す量を使って**定義する**ことができる．このことは，ブラックホールが物質のないときのアインシュタイン方程式の解であることから，ブラックホールの質量や角運動量を理解するのに重要である．

GP-B のような現実の実験で，ジャイロスコープの歳差が測定されるのは座標軸 (x, y, z) の系ではない．むしろ，ジャイロスピンと，遠方の「ガイド」星の間の角度が時間の関数として監視される (283 ページのボックス 14.1 の図を見よ)．予想される角度の時間依存性にはレンズ–ティリング歳差に加え，他のたくさんの効果が含まれている．たとえば問題 5.16 で述べたガイド星の光の光行差や，地球によって光が曲がることが挙げられる．原理的に，地球の回転によってすら光は曲がる (問題 9)．ここではこれらの効果は考えないが，最終的な結果によれば，(x, y, z) 軸は宇宙の遠い物体に固定されていると考えられ，スピンはレンズ–ティリング率でそれらの物体に対して歳差している．

14.6 ジャイロと自由落下系

8.4 節で以前述べように，思考実験において自由落下する実験室内の観測者は，ジャイロスコープを使って自由落下系を構成することができる．観測者は実験室で相互に直交する 3 つの空間軸に 3 つのジャイロを向ける．3 つのスピンは実験室が落下しても直交したままである (問題 1)．それらの方向に沿った 3 つの単位ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{1}}(\tau)$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}(\tau)$, $\mathbf{e}_{\hat{3}}(\tau)$ は実験室の 4 元ベクトル $\mathbf{u}(\tau) \equiv \mathbf{e}_{\hat{0}}(\tau)$ とともに，測地線に沿った各点で正規直交基底をなす．これらのベクトルは，測地線に沿ってクリストフェル記号が 0 になる座標系の**座標**基底である．よって，それらは自由落下系の座標基底ベクトルである．本書のウェブサイトの第 14 章の増補にしたがえば，実際にクリストフェル記号を 0 にでき，さらにこうした座標系を構成できる．地球の回転の結果として，ジャイロに沿った 3 つの基底ベクトルは，遠方の物体と結びついている座標 (x, y, z) に対して，レンズ–ティリング角速度 (14.34) で歳差する．回転物体によって慣性系が引きずられるのはこうした意味である．

問題

1. ジャイロスコープ方程式 (14.6) を使って，$\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}$ と $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}$ がジャイロのしたがう測地線に沿って一定であることを示せ．同じ測地線を運動する 2 つのジャイロ A と B に対して $\mathbf{s}_A\cdot\mathbf{s}_B$ が一定であることを示せ．
2. スピンの空間部分は赤道面の中にあれば（$s^\theta = 0$ となる），その面にある円軌道に対して赤道面内を向き続けることを，ジャイロスコープ方程式 (14.6) から直接示せ．
3. [S](14.16) 式で与えられたジャイロスコープ方程式の解に対して，スピンの大きさ $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})^{1/2}$ が時間的に一定で，解の中にある s_* と等しいことを示せ．
4. [A]（a）14.3 節で考察した回転しない物体の周りの円軌道上にあるジャイロスコープを考えよう．スピンとともに運動し，2 つの空間的基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{1}}$ と $\mathbf{e}_{\hat{3}}$ をそれぞれ r と ϕ 方向を向けたままにしている観測者の正規直交基底 $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$ の座標成分を求めよ．
（b）(14.16) 式のスピンベクトルを（a）でつくった正規直交基底に射影して，
$$s^{\hat{1}} = s_*\cos(\Omega' t), \qquad s^{\hat{3}} = -s_*\sin(\Omega' t)$$
を導出せよ．これは共動系でスピンがどのように歳差するかをはっきりと示している．
5. [S](14.19) 式に数値を代入し，地球を回る軌道上のジャイロスコープの全測地線歳差と測地線歳差率を評価せよ．
6. [S] シュワルツシルト幾何学の安定円軌道で最も大きな測地線歳差を求めよ．
7. (10.4) 式と (10.6) 式で与えられる PPN 計量を再び使って，測地線歳差を導出せよ．
$$\Delta\phi_{\mathrm{geodetic}} \approx \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) 2\pi \left(\frac{GM}{Rc^2}\right)$$
を示せ．その結果，測地線歳差の測定は PPN パラメータ γ を決める別の方法となる．
8. 14.5 節で述べたような，ゆっくり回転する物体の回転軸に沿って自由落下するジャイロの思考実験を考えよう．スピンの空間部分が x-y 面で運動し始めたとすると，$1/c^3$ のオーダーまでで，x-y 平面にい続けることをジャイロスコープ方程式 (14.6) から示せ．
9. [C] 一般相対論は，9.4 節で考えたシュワルツシルト幾何学内における光の湾曲に加え，太陽の回転によって通り過ぎる光線がわずかに曲げられることを予言する．軌道が回転軸に垂直な赤道面にあると仮定して，0 にならない $1/c$ の最低次までで評価し，この湾曲の方向と大きさを計算せよ．太陽に関してこの効果の大きさを評価せよ．10.3 節で考察した観測結果の重要な補正となるか（ヒント：代数計算する前に，$1/c$ の最低次で計量のどの項が最終的な答えに貢献するのか考えよ）．
10. [B] 283 ページのボックス 14.1 の図は地球を回る 1 軌道後の測地線歳差と慣性系の引きずりによるジャイロのスピンの偏移を表している．ジャイロの歳差の方向を説明し，(14.34) 式を使って，歳差のレンズ-ティリング部分の 2 つの効果の大きさを計算せよ．

第 15 章

回転するブラックホール

第 12 章で考察したシュワルツシルトブラックホールは一般相対論で予言されるブラックホール時空の中で最も一般的なものではない．ブラックホールは最も単純な物体で，厳密に球対称で，1 つのパラメータ 全質量 M だけで特徴づけられる．意外にも，真空（物質がない）アインシュタイン方程式の最も一般的な定常ブラックホール解が複雑過ぎることはない．それらは 1963 年 カー（Roy Kerr）が発見した幾何学の族で表され，**カーブラックホール** と呼ばれる．族のメンバーは 2 つのパラメータ 全質量 M と全角運動量 J だけに依存する．カーブラックホールはシュワルツシルトブラックホールに回転をいれて一般化したものである．この章ではそれらの特徴の基礎的な紹介を行う．

15.1 宇宙検閲官

第 12 章の重力崩壊の扱いでは正確に球対称を仮定し，考察を大きく簡略化した．シュワルツシルト幾何学は，真空アインシュタイン方程式の一意的な球対称解である．厳密な球対称崩壊は，内部構造がどうなっていようと，崩壊物体の半径が収縮するにつれてシュワルツシルト幾何学を次々に暴きながら進んでいく．一旦シュワルツシルト半径を超えてしまうと，地平が形成され，不可避な特異点は無限遠の観測者から覆い隠される．

実在の重力崩壊は球対称ではない．非球対称崩壊の分析は非常に複雑な問題であり，アインシュタイン方程式の数値シミュレーションによってのみ取り組むことができる．時間依存する崩壊質量分布から発生する重力波は，取り組まなければならない問題のうちの 1 つに過ぎない（第 23 章）．理論的な研究と数値シミュレーションから，十分進行した実際の重力崩壊の最終状態は**どんなもの**でも著しく単純であり，球対称崩壊の特別な場合と多くの面で似ていることが明らかにされている．物質とともに崩壊する観測者の視点では，最後には必然的に特異点となる．遠方の観測者の視点から見れば最終状態はカーブラックホールと区別できない．カーブラックホールは質量 M と角運動量 J で特徴づけられる時間独立な地平をもち，特異点を隠している．

執筆時，十分進行した一般的な重力崩壊が，必然的にブラックホールを形成し，外部の観測者から特異点を隠すということをアインシュタイン方程式から厳密に行った証明はない．むしろ，これは**宇宙検閲官仮説**と呼ばれる仮説であり，すでに 12.4 節で短く考察した．宇宙検閲官仮説はいろいろな方面から理論的論証により部分的に支持されているが，詳細にわたりすぎるため本書では立ち入らない．我々は，実際の宇宙物理学的状況で起きるような物体の崩壊では成り立っていると仮

宇宙検閲官

定することにする.

宇宙検閲官の予言力を味わうために，互いに相互軌道にある 2 つの中性子星が重力波放射[1]によりエネルギーを失いながら渦を巻いて近づき，最後にはブラックホールになるところを想像しよう．初期状態はたくさんのパラメータで表され，星の質量，軌道の大きさ，周期，離心率，そして自転周期，内部の組成，大気の様子，表面の小さい山の地理などである．この系を詳しく理解するためには，ふつうの密度から原子核密度を超えるまで，古典物理学と量子物理学全体の範囲の知識が必要であり，第 24 章で行うことにする．それに対して，最終的に合体で形成されるカーブラックホールはたった 2 つのパラメータ（質量と角運動量）で特徴づけられ，外部の特徴は古典重力物理学だけで理解できる．崩壊でできたブラックホールの近くで崩壊後物理学が何を明らかにしても（たとえば降着円盤の振る舞い），それはカー幾何学の族中の 1 つの現象として起きている．カーブラックホールは基本的な重力物理学と現実の宇宙物理学を最も明確に橋渡しをする.

15.2 カーブラックホール

質量 M を持ち角運動量 J で回転するブラックホール周辺の時空は線素（$c = G = 1$ 単位系）でまとめることができる：

回転するカー計量

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 \;=\; & -\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4M\,ar\,\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2\,d\theta^2 \\ & + \left(r^2+a^2+\frac{2M\,ra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \end{aligned}} \tag{15.1}$$

ここで

$$a \equiv J/M, \qquad \rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \tag{15.2}$$

である．ここで使った座標 (t, r, θ, ϕ) は **ボイヤー–リンキスト座標**と呼ばれ，回転しないブラックホールのシュワルツシルト座標に似ているが，その関係はすぐに明らかになるだろう．パラメータ a は**カーパラメータ**と呼ばれ，ちょうど質量のように，幾何学単位系で長さの次元を持っている.

計量 (15.1) は真空アインシュタイン方程式の解である．カー幾何学の重要な特徴の多くはこの線素からすぐ得られる.

- **漸近的平坦性** $r \gg M, r \gg a$ のとき，線素は

$$\begin{aligned} ds^2 \approx & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2M}{r}\right)dr^2 \\ & + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{4Ma}{r^2}\sin^2\theta(rd\phi)dt + \cdots \end{aligned} \tag{15.3}$$

になる．ここで各計量の係数の最低次と（存在すれば）それに対する $1/r$ の補正だけ残している．この漸近的な形によってカー計量がブラックホールから離れた平坦時空の幾何学に近

[1] 23.7 節で詳しく述べる.

づくことを確証することができる．9.1 節で考察したように，この時空曲率をつくる全質量は遠い衛星の軌道から決められる．同様に，前章で考察したように，角運動量は離れた軌道を運動するジャイロスコープの歳差から決められる．計量 (15.3) と (14.22) 式を比較すると M を全質量に，J を全角運動量にしてよいことが確認できる．

- **定常，軸対称**　計量 (15.1) は t と独立であり（定常），ϕ とも独立である（軸対称）．これらの対称性に対応する 2 つのキリングベクトルは $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\eta}$ である：

$$\xi^\alpha = (1,0,0,0) \qquad (\text{定常}) \tag{15.4}$$

$$\eta^\alpha = (0,0,0,1) \qquad (\text{軸対称}) \tag{15.5}$$

ここで成分は通常の順序 (t,r,θ,ϕ) である．さらに，カー計量は，θ を $\pi-\theta$ にする，赤道面 $\theta=\pi/2$ についての反転で変わらない．これらは回転体の幾何学に期待されるすべての対称性になっている．しかし，予期されることだが，幾何学は球対称ではない．g_{tt} と g_{rr} にある θ 依存性から十分わかるだろう．

- **回転しないときはシュワルツシルトへ**　$a=0$ のとき計量 (15.1) はシュワルツシルト座標 (9.9) のシュワルツシルト幾何学になる．カー族は 0 角運動量の特別な場合にシュワルツシルトブラックホールを含んでいる．

- **座標特異点，実特異点，地平**　カー計量 (15.1) は ρ または Δ が 0 のとき，特異になる．$\rho=0$ の特異点は $r=0$ かつ $\theta=\pi/2$ のときであるが，実特異点であり，時空曲率が無限大になる場所である．シュワルツシルト座標 r が 0 の値のシュワルツシルト幾何学における実曲率特異点の一般化に対応する．
$a \le M$ を仮定すると，Δ は

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-a^2} \tag{15.6}$$

の半径で 0 になる．シュワルツシルト半径がシュワルツシルト座標の特異点であるように，これら 2 つの半径は計量 (15.1) の座標特異点であることがわかる．実際，$a=0$ のとき r_+ はシュワルツシルト計量の座標特異点 $2M$ に一致する．問題 3 を解くことにより，(15.1) 式をこれらの半径で計量が特異ではない新しい座標に変換できることがわかる．r_+ はカー計量をブラックホールにする地平であることがわかる．次節でそれを示すことにするが，地平の性質の 1 つはすぐ提示することができる．$\rho=0$ の特異点は安全に地平の内部にある．カー幾何学は $r<r_+$（たとえば $r=r_-$）のとき地平の内部で豊富で興味深い構造を示すが，我々の計画ではもっぱら地平線の外部の性質だけに焦点を絞る．そこは宇宙物理学に対して重要なところである[2]．

M と a のすべての値がカーブラックホールに対応するわけではない．地平の半径 r_+ は $a \le M$ のときだけ存在する [(15.6) 式を参照]．したがってブラックホールの角運動量 J は 2 乗質量によって制限を受ける．太陽のようなふつうの天体はこの制限を受けない（問題 1）．極限的な値 $a=M$ ($J=M^2$) をもつブラックホールは**最大極限カーブラックホール**と呼ばれる．このブラックホールは以下の理由で宇宙物理学的に重要である．11.2 節で考察したように，ブラックホールに落ち

[2] 内部については，Hawking and Ellis (1973) を見よ．

る物体は降着円盤をつくる．降着円盤を螺旋運動し，最も内側の安定円軌道に達した後，ブラックホールに落下する物体は角運動量を運び込み，全角運動量 J を最大極限 $J = M^2$ に近づけていく．高温放射体からなる降着円盤の詳しい研究から a はほぼ $0.998M$ に限られるが，最大極限に非常に近いことがわかっている．限界回転に近いブラックホールは多くの宇宙物理学的状況で自然に成長していく．

降着物質が最大極限カーブラックホール近くに重力的に束縛されることによってエネルギーが解放され，第 13 章で考察した X 線源や活動銀河核のような天体は宇宙で最も強いエネルギー発生源になる．(269 ページのボックス 13.1 を見よ）この解放されたエネルギーによって起きる効果を発見することは，ブラックホールを同定する最も重要な方法の 1 つである．我々は 15.4 節でこの問題に戻ることにする．

15.3　回転ブラックホールの地平

ブラックホールの地平は，光線がどんな点からも無限遠に脱出できる時空領域とのヌル 3 次元面内部境界である．地平は，原理的に遠方の観測者が情報を受け取ることができる領域との境界となっている．第 12 章で考察したように，シュワルツシルトブラックホールが最も簡単な例であり，地平は $r = 2M$ でヌル 3 次元面になる．その半径の外部のあらゆる地点から遠方の観測者へ信号を送ることができる．$r = 2M$ の内側のどんな点からも光線は脱出できない．

光が脱出できる領域との境界は，無限遠に脱出できず内部に落ち込むこともできない光線によって作られる 3 次元面である．したがって地平は**ヌル** 3 次元面であり，各点で，2 つの独立な空間的接方向とそれに垂直な 1 つのヌル接方向がある（149 ページの考察を思い出せ）．したがって，定常軸対称ブラックホールの地平は，内部の崩壊と外部への脱出の間で浮いている光線によって作られる，定常・軸対称・ヌル 3 次元面であると推測できるだろう．

3 次元面 $r = r_+$ はカー幾何学の定常軸対称ヌル 3 次元面であり，実際，ブラックホールのカー族の地平である．$r = r_+$ がヌル面であることを示すために，接ベクトル $\mathbf{t}$ を考えよう．t 方向，θ 方向，ϕ 方向は r 一定面に接している．一般的な接ベクトルはこれらの 3 つの方向のどれにも成分があるが，r 方向には成分がない：

$$t^\alpha = (t^t, 0, t^\theta, t^\phi) \tag{15.7}$$

各点で 1 つのヌル接ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ が 2 つの直交する空間的接ベクトルとともに見つかれば，この面はヌルである (7.9 節)．ボイヤー- リンキスト座標 (15.1) のカー計量の形から，(15.7) 式の形のベクトルに対する条件 $\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\ell} = 0$ は $r = r_+$ で評価すると

$$\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\ell} = g_{tt}(\ell^t)^2 + 2g_{t\phi}\ell^t\ell^\phi + g_{\phi\phi}(\ell^\phi)^2 + g_{\theta\theta}(\ell^\theta)^2 = 0 \tag{15.8}$$

のようになる．少し代数計算をすると，これは

$$\left(\frac{2Mr_+ \sin\theta}{\rho_+}\right)^2 \left(\ell^\phi - \frac{a}{2Mr_+}\ell^t\right)^2 + \rho_+^2 \left(\ell^\theta\right)^2 = 0 \tag{15.9}$$

となる．ここで，ρ_+ は $\rho(r_+, \theta)$ を表す．(15.9) 式の唯一の解は $\ell^\theta = 0$, $\ell^\phi = (a/2Mr_+)\ell^t$ であ

る．係数まで決めると，$r = r_+$ 3 次元面の一意的なヌルベクトルは

$$\ell^\alpha = (1, 0, 0, \Omega_H) \tag{15.10}$$

であり，Ω_H は

$$\boxed{\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}} \tag{15.11}$$

回転ブラックホールの角速度

によって定義される．

$\boldsymbol{\ell}$ と互いに垂直な 2 つの空間的接方向を見つけることによって，$r = r_+$ がヌル面であるという議論を完成させることは困難ではない．$(0, 0, 1, 0)$ と $(0, 0, 0, 1)$ の方向でそうなっていることは簡単にチェックできる（問題 6）．これが容易であることは振りかえってみれば明らかである．もし $r = r_+$ がヌル面ならば，$\boldsymbol{\ell}$ もその法線であり，自動的に他の接ベクトルに垂直になる．よって，$r = r_+$ がヌル面であると結論するためには，$\boldsymbol{\ell}$ と独立な (15.7) 式の形の 2 つの直交ベクトルを示すだけでよい．

ヌル方向 $\boldsymbol{\ell}$ は地平を形成する光線の接ベクトルである．これらの方向に発射された光線が $r = r_+$ で地平から出られなくなったままであることを測地線方程式から示すことは難しすぎることはない（問題 5）．地平生成光線は無限遠に対して回転しているが，(15.10) 式で ℓ^ϕ の値が 0 でないことから明らかである．角速度は $d\phi/dt = (d\phi/d\lambda)/(dt/d\lambda) = \ell^\phi/\ell^t$ である．これは (15.11) 式で与えられた Ω_H である．回転ブラックホール内で何が回転しているのか疑問に感じるかも知れない．何と言っても，単に真空の空間なのだが，それは図 15.1 に示したように，角速度 $\Omega_H = a/(2Mr_+)$ で回転する地平を形成する光線である．したがって角速度 Ω_H はブラックホー

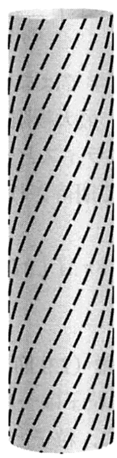


図 15.1 最大極限（$a = M$）で回転するブラックホールの赤道面 ($\theta = \pi/2$) の時空図．このプロットでは，ボイヤー–リンキスト座標 (t, r, ϕ) が円筒座標として使われ，t が上に進んでいる．地平は半径 $r = r_+ = M$ で円筒であり，t 方向に広がっている．このヌル面を作っている光線（太い破線）は角速度 $\Omega_H = 1/(2M)$ で地平の周りを回転している．

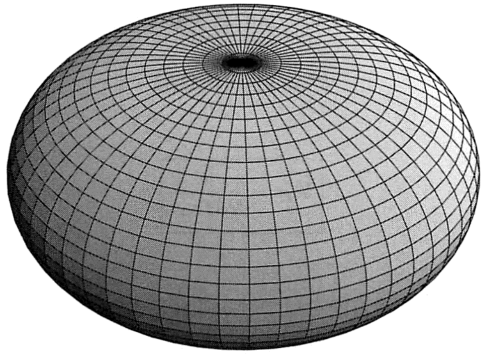


図 15.2　回転ブラックホールの地平．図はカーブラックホールの地平の t = 一定スライス [(15.12) 式を参照] と同じ内的幾何学をもつ 3 次元平坦空間内の曲面である．a/M の値は 0.86 であり，このようなスライスは，平坦空間に軸対称面として埋め込まれるもののうちほとんど最大に近い．極で集まる ϕ 一定の線（経線）と，θ 一定曲線（余緯度 [ある緯度と 90 度との差; 90 度からある緯度を引いた残り]）とともに示した．回転軸に沿って特徴的な潰れ方をしており，流体球が回転したときの歪んだ形によく似ている．

ルの角速度と呼ばれる．さらに，14.6 節で考察したように，慣性系は回転に引きずられる．実際，ブラックホールの角運動量はこの引きずりを測定することで求められる．

カー地平が一定ボイヤー–リンキスト座標半径 r_+ であっても，本来の幾何学は球対称ではない．カー線素 (15.1) に $r = r_+$ を代入し，t = 一定スライスをとると，線素

$$d\Sigma^2 = \rho_+^2(\theta)d\theta^2 + \left(\frac{2Mr_+}{\rho_+(\theta)}\right)^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{15.12}$$

の 2 次元面ができる．これは球面上の幾何学ではない．たとえば，赤道周り $\theta = \pi/2$ の距離は $4\pi M$ である．しかし，極周りの距離は短く，最大極限カーブラックホールでは $7.6M$ である（問題 7）．図 15.2 は平坦空間で地平の t = 一定スライスと同じ幾何学をもつ 2 次元面である．この種の押し潰された球形は定性的に回転体に対して期待されるものかもしれない．地平の面積は (15.12) 式から容易に計算され

地平面積

$$A = 8\pi Mr_+ = 8\pi M\left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right) \tag{15.13}$$

となる．

$r = r_+$ のカー地平は，平坦空間の前光円錐（7.9 節）やシュワルツシルトブラックホールの地平（12.1 節）のような「一方通行」面である．粒子は一度越えることができるが，もう二度とはできない．シュワルツシルト幾何学内でのように，粒子と光線は外部から入って行くことはできるが，内側から出ることはできない．よって地平の内部の事象の情報は無限遠に届かない．そこから出発するすべての光線は内部に閉じ込められたままである．カー幾何学はブラックホールである．

15.4 赤道面における軌道

カー幾何学内のテスト粒子と光線の軌道は，それらが示す複雑な振る舞いや解析的に扱うことのできる範囲に対して特筆すべきものがある．たとえば，一般的な軌道は「面」内に閉じ込められないだろう．シュワルツシルト幾何学内の軌道は，テスト粒子の角運動量保存と幾何学の球対称性の結果として，面内に留まったままになる（179 ページの考察を思い出せ）．しかし，カー幾何学は球対称ではなく軸対称である．対称軸に沿った角運動量の成分だけが保存する．赤道面（$\theta = \pi/2$）に閉じ込められる軌道はあるが，一般的な軌道は面内にないだろう．カー計量軌道のわかりやすい導入的な説明のために，本書では赤道面内の軌道の単純な場合に関心を限ることにする[3]．特に考察の関心は，最も内側の安定軌道の束縛エネルギーを計算することだけに向けられる．この計算値が，なぜ落下物体の静止エネルギーの 42% までもが降着中に放射として解放されうるのか，その理由を理解するための中心的な数値である．

赤道面内の軌道の分析は第 9 章で考察したシュワルツシルト幾何学の軌道の場合と同じように厳密に行うことができる．ただ代数計算が複雑になるだけだ．まず赤道面における反転に対してカー幾何学が対称である（$\theta \to \pi - \theta$）ことから，赤道面 $\theta = \pi/2$ 内で，4 元速度 $\mathbf{u}$ の θ 成分が 0 になる軌道が**存在する**ことがわかる．これらは，$\theta = \pi/2$ に拘束されたカー計量 (15.1) によって支配される：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{4aM}{r}dtd\phi + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)d\phi^2 \tag{15.14}$$

軌道は単位質量当たりの保存エネルギー e と，対称軸に沿った単位質量当たりの角運動量 ℓ をパラメータとして表すことができる．これらはそれぞれカー計量における t 独立性，ϕ 独立性から生じる．対称性に関するキリングベクトル (15.4) 式と (15.5) 式を用いて，これらの保存量は

単位静止質量当たりの保存エネルギーと角運動量

$$e \equiv -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} \tag{15.15a}$$

$$\ell \equiv \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} \tag{15.15b}$$

で表される[4]．9.3 節のシュワルツシルトの場合のように，これらの量を無限遠で評価すれば単位静止質量当たりのエネルギー，角運動量として解釈することができる．対称軸に沿って保存する角運動量 ℓ は，赤道面に対する全角運動量でもある．つねにそうであるように，4 元速度の規格化

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 \tag{15.16}$$

にしたがう測地線方程式の一般的で付加的な 1 つの積分が存在する．

カー計量 (15.1) をよく調べると，e と ℓ が u^t と u^ϕ の線形結合であることがわかる：

$$-e = g_{tt}u^t + g_{t\phi}u^\phi \tag{15.17a}$$

$$\ell = g_{\phi t}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi \tag{15.17b}$$

---

[3] 一般の場合には特に Chandrasekhar（1983）を見よ．

[4] 保存量 ℓ を地平のヌル生成子 $\boldsymbol{\ell}$ と混同してはいけない．不幸にもこれらの記号は標準的なものである．$\boldsymbol{\ell}$の長さ ℓ と間違えることは，それが 0 であるため，ないはずだ．

これらの式を u^t と u^ϕ について解くと

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)e - \frac{2Ma}{r}\ell\right] \tag{15.18a}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\ell + \frac{2Ma}{r}e\right] \tag{15.18b}$$

が得られる．今度はこれらの式を $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ に代入し，$u^\theta = 0$ を使うと，$dr/d\tau$ についての半径方向の式を得ることができる．これはシュワルツシルト計量の (9.26) 式と同じ形に書くことができ

$$\frac{e^2-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r, e, \ell) \tag{15.19}$$

となる．ここで，半径方向の運動を決める有効ポテンシャルは

赤道粒子軌道の有効ポテンシャル

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r, e, \ell) = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2 - a^2(e^2-1)}{2r^2} - \frac{M(\ell - ae)^2}{r^3}} \tag{15.20}$$

である．

光線の半径方向の方程式は (15.18) 式と $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ から同じようにして求められる．その形は，9.4 節のシュワルツシルト光子軌道の考察のように，衝突パラメータ $b \equiv |\ell/e|$ に依存するが，ブラックホールの回転と同じか，または逆かにも依存する．それは ℓ の符号または符号だけを表すパラメータ $\sigma \equiv \text{sign}(\ell)$ によって決まる．半径方向の方程式は

$$\frac{1}{\ell^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}}(r, b, \sigma) \tag{15.21}$$

であり，ここで光子の有効ポテンシャル $W_{\text{eff}}(r, b, \sigma)$ は

赤道面光線軌道の有効ポテンシャル

$$W_{\text{eff}}(r, b, \sigma) = \frac{1}{r^2}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{2M}{r}\left(1 - \sigma\frac{a}{b}\right)^2\right] \tag{15.22}$$

である．

有効ポテンシャル (15.20) と (15.22) はシュワルツシルト幾何学の (9.28) 式と (9.65) 式と同じ r 依存性を示しており，これらは $a = 0$ とすると同じになる．重要な差はポテンシャルがエネルギーと角運動量に依存しているところである．たとえば，ブラックホールと同じ方向に回転をして（ℓ または σ の値が正）無限遠から落下する粒子または光線は，初め反対向きに回転する粒子（ℓ と σ が負）とは別の有効ポテンシャル中を運動する．これらの差は部分的に自転するブラックホールの慣性系の引きずりを反映している．以下の例が示すように，粒子は回転により引きずられる．

例 15.1. 半径方向に落下する粒子の軌道　粒子が，運動エネルギー 0（$e = 1$）で，無限遠から半径方向に動き出し（$\ell = 0$）カーブラックホールに落下する．軌道の形 $\phi(r)$ は $d\phi/dr$ を積分することにより計算することができ，(15.18b) 式と (15.19) 式から求められ

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/d\tau}{dr/d\tau} = -\frac{2Ma}{r\Delta}\left[\frac{2M}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2} \tag{15.23}$$

となる（$dr/d\tau$ は負であることを思い出せ）．半径 r に落ちるまでに掃かれる角度 $\Delta\phi$ はこれを ∞ から r まで積分することによって求められる．

例 15.2. マッド科学者はブラックホールを破壊し，宇宙検閲官を突破しようとしている　カーブラックホールは，M よりも a の値が小さいという制限を受けている．カー計量 (15.1) は $a > M$ の場合も真空アインシュタイン方程式の解であるが，地平がないため [(15.6) 式を参照] ブラックホールを表さない． $a > M$ の場合，カー幾何学の特異点は無限遠から見え，**裸の特異点**の例となる．重力崩壊で $a > M$ のカー解ができることになれば，宇宙検閲官仮説は破れてしまうだろう．あるマッド科学者が，$\ell > 2Me$ の粒子を無限遠から最大極限カーブラックホールに赤道面内で落とすことにより，カーブラックホールを破壊し宇宙検閲官を破ろうと努めている．彼が言うには，静止質量 m の粒子に対してブラックホールの質量 M は $\delta M = me$ 増加し，角運動量は $\delta J = m\ell$ 増加するだろう．$a = J/M$ の変化は $\delta a = (m/M)(\ell - ae)$ となり，$\ell > 2Me$ ならば質量の変化よりも大きくなるだろう．

しかし (15.20) 式の有効ポテンシャルの最高点が $(e^2-1)/2$ [(15.19) 式を参照] よりも大きいと，粒子はブラックホールには落ちないだろう．むしろ粒子は散乱軌道に乗り，図 9.4 で説明したシュワルツシルト幾何学の散乱軌道と同じように，無限遠に戻るだろう．

有効ポテンシャルの最大値を求めるためには直接的であるが，$a = M$ で (15.20) 式から繁雑な計算をしなければならない．ほどほどの場合 $\ell = 2Me$ では特に簡単になる．その場合，最大値は $r = M$ にあり，V_{eff} の最大値は $(e^2-1)/2$ であり，ちょうど粒子を地平の内部から取り出さず，ブラックホールを破壊させないようにする十分な高さだ．ポテンシャルをいくつかの場合にプロットすれば，$\ell > 2Me$ の粒子は絶対に落下しないことを確信できるだろう．

このような例は宇宙検閲官仮説の正当性に確信を築き上げるものである．

赤道面における粒子と光線の軌道における多くの興味深い性質を，半径方向の方程式 (15.19), (15.21) や 4 元速度の他成分の方程式 (15.18) から調べることができる．円軌道の半径や光子の不安定円軌道の半径，光の湾曲，束縛軌道の形状などを計算することができるだろう．これらはすべて，粒子や光線がブラックホールと同じ方向に回転しているのか，逆方向なのかによって変わってくる．たとえば，最大極限カーブラックホール（$a = M$）の幾何学では，同じ方向に回る $r = M$ の不安定円軌道があり，逆方向には $r = 4M$ の安定円軌道がある（問題 11）．しかしすでに述べたように，導入的な考察では，これらすべての特徴を並べたてるのではなく，むしろ宇宙物理学的に最も重要な特徴の 1 つに焦点を絞った方がよいだろう．それは粒子の最も内側の安定円軌道の束縛エネルギーである．

粒子が半径 $r = R$ の円軌道を描くためには，半径方向の初期速度が 0 でなければならない．(15.19) 式から条件は

$$\frac{e^2-1}{2} = V_{\text{eff}}(R, e, \ell) \tag{15.24a}$$

である．しかし，円軌道上に留まるためには，半径加速度も 0 でなければならない．(15.19) 式を

τ について微分すると

$$\left.\frac{\partial V_{\text{eff}}(r,e,\ell)}{\partial r}\right|_{r=R}=0 \tag{15.24b}$$

となる．安定軌道は，R から離れる半径方向の小さな変位がそこから加速的に離れるようにはたらくのではなく，その周りに振動するようにはたらくものである．ニュートン力学の場合と同じように，これは有効ポテンシャルが極小でなければならないという条件である：

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r,e,\ell)}{\partial r^2}\right|_{r=R}>0 \tag{15.24c}$$

(15.24) 式は，カー幾何学中の安定軌道に許される e と ℓ, R の範囲を決める．**最も内側の**安定円軌道（innermost stable circular orbit, ISCO）は不安定になる寸前にあり，そこで (15.24c) 式は等号になる．3 つの方程式 (15.24) は，軌道を特徴づける e, ℓ と $R\equiv r_{\text{ISCO}}$ について解くことができる．3 つの代数方程式の解は解析的に求めることができるが，結果を図で示す方が有益である．a/M の関数として，半径を図 15.3, 束縛エネルギーを図 15.4 に示した．最大極限ブラックホールの場合，特に容易になる．たとえばほどほど安定な同じ方向の円軌道は

$$e=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \ell=\frac{2M}{\sqrt{3}},\qquad r_{\text{ISCO}}=M\qquad \left(\begin{array}{c}a=M\text{ の最も内側の}\\ \text{順回転安定軌道}\end{array}\right) \tag{15.25}$$

である．最も内側の逆回転安定円軌道は，図 15.3 に示したように遠ざかって行く．

軌道の束縛エネルギーは無限遠で静止している粒子のエネルギー（静止エネルギーを含む）とその軌道に入って行く同じ粒子を無限遠で測ったエネルギーの差である．e は無限遠で測った単位静止質量当たりのエネルギーなので，単位静止質量当たりの束縛エネルギーは $1-e$ である．これは，重力束縛の過程で解放される静止エネルギーの割合である．図 15.4 は，(15.24c) 式が等号と

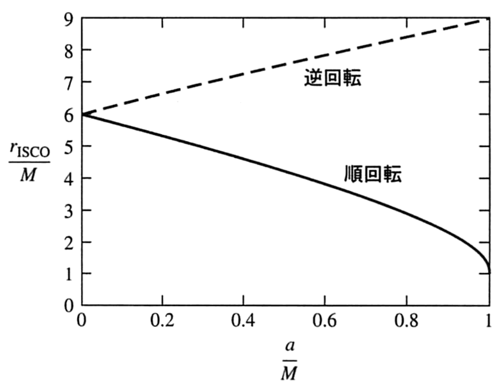


図 15.3　回転ブラックホールの赤道面における最も内側の円軌道のボイヤー・リンキスト半径 r_{ISCO}．実線は最も内側の順回転軌道半径であり，破線は最も内側の逆回転軌道の半径である．ともに，ゼロ回転 $a/M=0$ でシュワルツシルトの値 $r_{\text{ISCO}}=6M$ と一致する [(9.43) 式を参照]．最大極限 $a/M=1$ で，順回転軌道の場合，半径は $r_{\text{ISCO}}=M$ で，逆回転軌道では $r_{\text{ISCO}}=9M$ である．

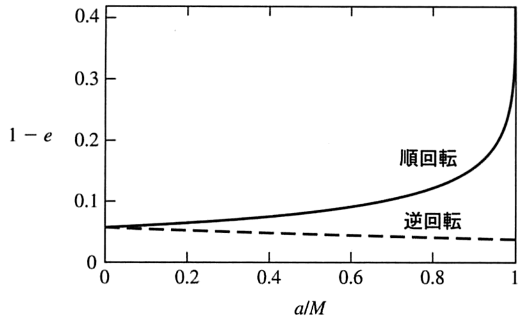


図 15.4　回転ブラックホールの赤道面内の最も内側の安定円軌道の単位静止質量あたりの束縛エネルギー $1-e$. 実線は順回転に対応し，破線は逆回転に対応する．最大極限 $a/M=1$ カーブラックホールの場合，最大束縛エネルギー率は 42% に上がる．降着により $a/M=0.998$ にまで回された現実のブラックホールの場合，最大束縛エネルギー率は約 30% になる．こうしたことから，重力束縛エネルギーはどんな熱核反応によるエネルギー解放よりもかなり効率的である．

して，3 つの方程式 (15.24) を解くことによって得られるカー幾何学中の最も内側の安定円軌道の束縛エネルギーを表している．最も束縛された軌道は，e が (15.25) 式で与えられる最も内側の安定順回転軌道である．最大極限ブラックホールから離れて束縛されていない軌道から最も内側の安定円軌道へ移動するとき解放される静止質量の割合は $(1-1/\sqrt{3}) \approx 42\%$ である．実在する宇宙物理学的ブラックホールでは a の値はわずかに小さく，束縛エネルギーは大きく減る．図 15.4 を見ると $(1-e)$-a/M の曲線は $a=M$ 近くで勾配が大きくなるためである．しかし，これは熱核燃焼から得られる典型的な数パーセントの値よりもかなり効果的である（269 ページのボックス 13.1 を見よ）．

15.5　エルゴ球

静止観測者

たぶん，無限遠に対して静止したままでいたい観測者が味わう苦境よりも時空幾何学中の回転の効果をよく説明するものはないだろう．その観測者の世界線の空間座標 r, θ, ϕ は時間とともに変化することは許されない．これらの観測者が静止世界線に留まるためには，ロケットなど推進力を使わなければならないだろう．このような力がないとブラックホールに落下してしまうからだ．どんなにも強くできるロケット推進力をもった観測者はシュワルツシルトブラックホールの地平にどれだけでも近く留まることができるだろう．しかし，この節で示すように，回転するブラックホールの場合，静止観測者が地平に近づける距離には制限が存在する．

静止観測者の 4 元速度 $\mathbf{u}_{\rm obs}$ には時間成分 $u^t_{\rm obs}=dt/d\tau$ しかない：

$$u^\alpha_{\rm obs}=(u^t_{\rm obs},0,0,0) \tag{15.26}$$

この 4 元速度は単位時間的ベクトル $\mathbf{u}_{\rm obs}\cdot\mathbf{u}_{\rm obs}=-1$ である．この条件を (15.26) 式と (15.1) 式

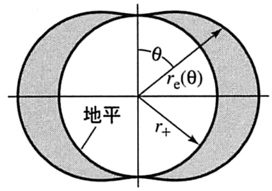


図 15.5　エルゴ球．$a/M = 0.95$ の場合，平坦面上で極座標として r と θ を使って地平 $r = r_+$ の位置とエルゴ球境界 $r = r_e(\theta)$ の位置をプロットした図である．ブラックホールの回転軸は縦である（これは埋め込み図ではなく，たとえばこのプロットで分かるように地平は球ではない [図 15.2 を参照]）．エルゴ球はこれら 2 つの面の間の影のついた領域である．エルゴ球の内部で観測者は無限遠に対して静止することはできない．

を使って書くと

$$\mathbf{u}_{\text{obs}} \cdot \mathbf{u}_{\text{obs}} = g_{tt}(u^t_{\text{obs}})^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)(u^t_{\text{obs}})^2 = -1 \tag{15.27}$$

となる．この条件が満たされるように u^t_{obs} が決まる．しかし，カーブラックホールの地平に十分近いと，この条件を全く満たすことはできない．なぜなら g_{tt} が

遠い方のエルゴ球

$$\boxed{r = r_e(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}} \tag{15.28}$$

の面上で 0 になり，内部で正になるからである．この面の内部で (15.26) 式の形の時間的 4 元速度を静止観測者が持つことは不可能である．

明らかに $r_e(\theta) > r_+$ であり，図 15.5 に示したように面 $r_e(\theta)$ は地平の外部にある．この面と地平との間の領域は，ブラックホールの**エルゴ球**と呼ばれ，その意味はこれから明らかになるだろう．$a = 0$ のとき r_e は r_+ に一致する．これはシュワルツシルト幾何学の結果と等しく，静止観測者は $g_{tt} > 0$ となり，$r = 2M$ の地平の内部では存在できない．回転していると，静止観測者に対して禁止している領域が地平の外部に広げられる．

エルゴ球の内部ではロケットがどんな出力を出しても観測者は r, θ, ϕ の一定値に留まることができないが，無限遠に対して一定の r, θ の値でブラックホールと同じ方向に回転し続けることは可能である．このような観測者は

$$u^\alpha_{\text{obs}} = u^t_{\text{obs}}(1, 0, 0, \Omega_{\text{obs}}) \tag{15.29}$$

の形の 4 元速度をもつだろう．つまり，$\mathbf{u}_{\text{obs}} = u^t_{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi} + \Omega_{\text{obs}}\boldsymbol{\eta})$ である．エルゴ球内の各 r と θ の値に対して，(15.29) 式の形の $\mathbf{u}$ が時間的となるような最大角速度と最小角速度が存在する（問題 14）．

回転エネルギーの取り出し

シュワルツシルトブラックホールからエネルギーを取り出すことは古典的に不可能であるが，カーブラックホールから回転エネルギーを取りだすことは可能である．既に第 13.2 節で触れ，また 300 ページのボックス 15.1 で述べるように，ブラックホールの外部環境と電磁気的につながっ

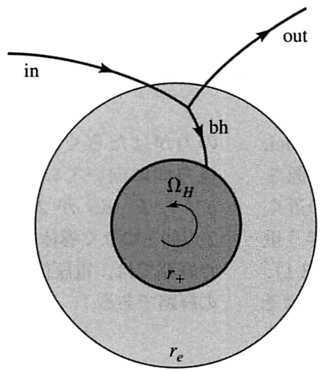


図 15.6 ペンローズ過程．これは回転ブラックホールの赤道面の略図である．内側の円が $r = r_+$ の事象の地平である．外側の円は $r_e = 2M$ のエルゴ球の境界である．その間の領域がエルゴ球である．ペンローズ過程では，粒子（in）は無限遠からエルゴ球の中に落ち，2 つの粒子（out）と（in）に分裂する．粒子（out）は無限遠に脱出し，粒子（bh）は地平を通過しブラックホールに突入する．エネルギー運動量が分裂で保存し，粒子（out）が粒子（in）が持っていたエネルギーよりも大きなエネルギーを持って出てくるように 3 つの粒子の運動量を選ぶことが可能である．それに対応し，ブラックホールの回転エネルギーは減少する．

ている場合，取り出すための現実的な方法がある．しかし原理的に簡単な思考実験から，エルゴ球を利用して，別の方法で回転エネルギーをどのように取り出すのかを知ることができる．図 15.6 で示したように概略的に示した仮説的な状況を考えよう．これは**ペンローズ過程**と呼ばれる．粒子（in）が無限遠で出発し，カーブラックホールのエルゴ球に落下する．そこで 2 つの粒子（out）と（bh）に分裂する．粒子（bh）は地平を通って落下するが，粒子（out）は無限遠に脱出する．粒子（in）が持って入る以上に，脱出粒子（out）が大きなエネルギーを無限遠に持って行くように分裂を調整することができる．こうしてブラックホールからエネルギーを取り出すことができる．

エネルギー運動量は，この分裂で保存しなければならない（これは局所的過程であり，局所的に平坦空間と物理的に区別できない自由落下系で分析できる）．よって分裂点で

$$\mathbf{p}_{\text{in}} = \mathbf{p}_{\text{out}} + \mathbf{p}_{\text{bh}} \tag{15.30}$$

が成り立つ．無限遠に到達する静止質量 m_{out} の粒子のエネルギーは $E_{\text{out}} = -\mathbf{p}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{\xi} = m_{\text{out}} e$ である．ここで $\boldsymbol{\xi}$はキリングベクトル (15.4) である [(7.53) 式を参照]．(15.30) 式とキリングベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の内積をとると E_{out} に対して

$$E_{\text{out}} = E_{\text{in}} - E_{\text{bh}} \tag{15.31}$$

が成り立つ．もしも粒子（bh）が無限遠に到達できたとすると，そのエネルギーは E_{bh} であり，必ず正となるであろう．(15.31) 式は in よりも out の方が小さくなるという要請 $E_{\text{out}} < E_{\text{in}}$ にな

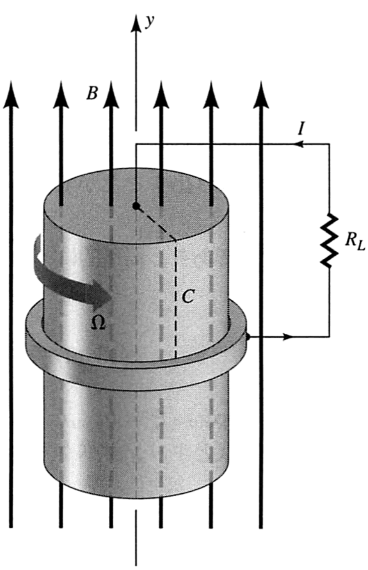
ボックス 15.1 ブラックホールの回転エネルギーの引き出し

13.2 節で述べた活動銀河核（Active Galactic Nuclei, AGN）は宇宙で最も強力で長く持続する放射発生源を持っている．たぶん最大極限カーブラックホールの近くに AGN を操るエンジンがあるのだろう．降着を伴う重力的束縛がエネルギー源の 1 つである（ボックス 13.1）．(15.39) 式で示したブラックホールの回転エネルギーはそれとは別の発生源である．このボックスでは次元解析を少し行い，Blandford–Znajek **機構**をかなり定性的に述べる [a]．これによって，回転ブラックホールから回転エネルギーを電磁気的に取り出すことができる．電磁気学の単極発電機の簡単な例から始める．

軸の周りに角速度 Ω で回転する半径 r_C の円柱導体を考える．その導体は，図に示したように，軸方向に向いた一様磁場 $\vec{B}$ 中にある．

回転により，導体中で軸から距離 ρ 離れた電荷には

$$\vec{F}(\rho) = q(\vec{V} \times \vec{B}) = q(\Omega\rho)B\vec{e}_{\hat{\rho}} \tag{a}$$



[a] より詳しくはたとえば Thorne et al. (1986) を見よ．

の力がはたらく．ここで q は電荷で，$\vec{e}_{\hat{\rho}}$ は軸から半径方向に向いている単位ベクトルである．電圧 $V = q^{-1}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{S}$ が 2 つの接点にかかっている．線積分は 2 点間をつなぐ導体中の経路 C について行う [b]．図に示した経路では，電圧低下に寄与するところは軸から半径 r_C の経路である：

$$V = \int_0^{r_C} d\rho\rho\Omega B = \frac{1}{2}\Omega B r_C^2 = \frac{\Omega F_B}{2\pi} \tag{b}$$

ここで F_B は導体を貫く磁束である（導体で誘導される電流によって生じる磁場は無視する）．電圧の最後の形は，球のような軸対称の形に成り立つ（問題 17）．

接点は導線によって外部抵抗（負荷）とつながっているとしよう．電流が流れ，電力は負荷中に分散していく．回転導体は電気発電機としてはたらき，電流は $I = V/(R_C + R_L)$ となる．R_L は負荷抵抗であり，R_C は導体の抵抗である．負荷に供給される電力 P_L は $R_L = R_C$ のとき最大になる．これはインピーダンスが合う例である．これらの条件のもと，負荷に供給される最大電力は

$$(P_L)_{\max} = I^2 R_C = \frac{V^2}{4R_C} = \frac{\Omega^2 F_B^2}{16\pi^2 R_C} \tag{c}$$

ブラックホールには多くの点でふつうの導体と電磁気的に似た性質がある．これらはブラックホール内の時空におけるマクスウェル方程式からわかる．定性的に少し考察すれば，この主張を支持できる．観測者がブラックホールの中に電荷を落とすと，それに続いて観測する観測者たちは，ブラックホールの外側に広い範囲にわたって電場が存在していることから，電荷があることを知る．非常に大きな r では，その電場は半径方向を向き，クーロンの法則に一致して $1/r^2$ で小さくなる．遠方の観測者の視点では，落ちた電荷は決して地平を横切らず（12.2 節），そこに留まり，導体の表面電荷分布と類似した電荷分布を形成する．**したがってブラックホールは電荷を帯びることができる．**

[b] このボックスでは，$\vec{v}$ は速度で，V は電圧，ρ は軸からの距離，R は抵抗である．本文中で別の意味で使われている記号と混乱しないように．

ブラックホールにある方向から一定の割合で定常的に正の電荷を落とし，別の方向からも同じ割合で負の電荷を落とすとしよう．ブラックホールの正味の電荷は 0 であるが，正味の電荷が一方から他方に移動しており，外部の観測者にすれば，ブラックホールに電気が流れていることになる．**したがってブラックホールに電流を流せる**．ブラックホールは電磁エネルギーを，例えば電磁波を吸収することにより，散逸させることができる．ブラックホールに電流を流すときでも，完全導体でないためエネルギーの散逸が生じる．**したがってブラックホールは電気抵抗を持つ**．以下でその値を評価してみよう．

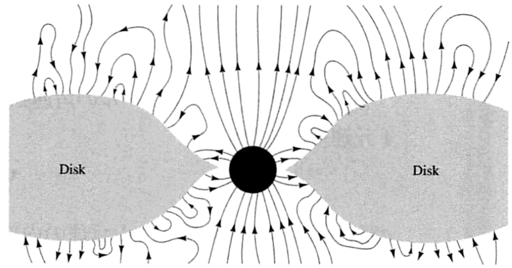
ブラックホールと導体の間の類似性から，ブラックホールの回転エネルギーは，ブラックホールが磁場中にあり，初めの方で示した単極発電機と同じような方法で導線に繋げば利用できることがわかるだろう．推測される出力は (c) 式から評価できるが，そのためにはブラックホールの電気抵抗 R_H を評価する必要がある．簡単な次元評価をしてみよう．抵抗の次元はオームの法則 $R = V/I$ にしたがう．この目的に対して便利なガウス単位系で，点電荷 q から距離 r 離れた電気ポテンシャルは $\Phi_{\rm elec} = q/r$ である．電圧の次元は $[q]/\mathcal{L}$ である．$[q]$ は電荷の次元である．電流の次元は $[q]/\mathcal{T}$ である．よって，ガウス単位系で抵抗の次元は $[R] = \mathcal{T}/\mathcal{L}$ である．$c = 1({\rm s/cm})$ となる単位系で，抵抗は無次元になるのだ．したがって $R \sim 1$ は幾何学単位系でブラックホールの抵抗の意味のある推測値である．これはガウス単位系で $c^{-1}({\rm s/cm})$ に対応し，SI 単位系で約 30Ω である．これは真空中に放射する導波管を特徴づける「真空のインピーダンス」約 376Ω とそう違わない．ブラックホールは真空の曲がった空間**なのだ**．

回転エネルギーが質量 M, 角速度 Ω_H のブラックホールから取りだされる時間的割合は，抵抗の推測値を用いて，ブラックホールのサイズを $r_H \sim M$ で評価することにより，(c) 式から粗く評価することができる．その結果

$$P_L \sim \frac{\Omega_H^2 (B\pi r_H^2)^2}{16\pi^2 R_H} \sim \left(10^{45}\frac{\rm erg}{\rm s}\right)(\Omega_H M)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot}\right)^2 \left(\frac{B}{10^4 {\rm gauss}}\right)^2 \qquad \text{(d)}$$

となる．もしある銀河中心の $10^9 M_\odot$ ブラックホールが無次元積 $\Omega_H M$ の緩やかな値で回転し，数 1000 ガウスの磁場中にあるとすると，13.2 節で考察した活動銀河核に対するエネルギー出力の要請を十分超える．

しかし磁場を供給するものは何だろうか，さらにこの機構が作動するのに必要とされる負荷に単極発電機をつなぐ導線は何と類似しているのだろうか．答えは，必要とされる磁場を降着円盤中の電流が供給し（図を見よ），ブラックホールそれ自身が導線となるというものだ．



もし降着円盤とブラックホールの間をつなぐ導線が存在しなければ，(b) 式で与えられるオーダーの電圧降下がまだ存在することになるだろう：

$$V \sim \Omega_H F_B \sim \Omega_H B\pi r_H^2 \sim (10^{20}{\rm volts})(\Omega_H M)\left(\frac{M}{10^9 M_\odot}\right)\left(\frac{B}{10^4{\rm gauss}}\right) \qquad \text{(e)}$$

この途方もない電圧とそれにともなう電場により，離れた電子はどんなものでも，即座に相対論的速度まで加速されるだろう．電子は光子を放ち，それは電子陽電子対を発生させるだろう（問題 18）．今度は電子と陽電子が加速され放射し，さらに対が発生するだろう．このようにしてできたカスケードは即座にブラックホール付近を電子や陽電子，電場，磁場からなる電気伝導性プラズマで満たすだろう．これは，単極発電機に必要な，ブラックホールと外部の間の電気伝導的なつながりになる．

この出力のすべてがどのように電波ジェットに変わっていくのかという問題は複雑であり，ここで定性的な議論ですら行う気にはなれないが，回転ブラックホールの近傍で電場は十分な加速度を与え，回転軸はジェットの自然な軸を与えるとだけ述べておく．このようにして，単極発電機としてはたらく回転ブラックホールは活動銀河核のジェットを発生させているのだろう．

るだろう．しかし，(bh) は，$\boldsymbol{\xi}$ が空間的ベクトルとなるエルゴ球の外部へ決して出られない：

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}=g_{tt}>0 \qquad \text{（エルゴ球の内部）} \tag{15.32}$$

したがって $-E_{\mathrm{bh}}$ は局所的なエネルギーではなく，空間運動量成分であり，正かもしれないし負かもしれない．$E_{\mathrm{bh}}<0$ となる分裂に対して，$E_{\mathrm{out}}>E_{\mathrm{in}}$ であり，エネルギーがブラックホールから取り出される[5]．

ペンローズ過程によってブラックホールからエネルギーを取り出すと，落下粒子の負の E_{bh} 分だけブラックホールの全質量は減る．しかし，これからすぐみるように，落下粒子のためブラックホールの角運動量も減る．これが，ペンローズ過程がブラックホールの回転エネルギーを取り出すと言う意味である．

落下粒子がブラックホールの角運動量を減らすことを確かめるため，キリングベクトル $\boldsymbol{\xi}$と$\boldsymbol{\eta}$ が 4 元速度 (15.29) と

$$\mathbf{u}_{\mathrm{obs}}=u^{t}_{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{\xi}+\Omega_{\mathrm{obs}}\boldsymbol{\eta}) \tag{15.33}$$

の関係にある観測者がエルゴ球の内部にいてブラックホールと同じ方向に回っているところを考えよう．すべての観測者のように，彼らはブラックホールに落下する粒子のエネルギーは正であると測定しなければならない．よって，条件 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=-1$ によって許されるどんな Ω_{obs} の範囲でも [(7.53) 式を参照]

$$-(\boldsymbol{\xi}+\Omega_{\mathrm{obs}}\boldsymbol{\eta})\cdot\mathbf{p}_{\mathrm{bh}}\geq 0 \tag{15.34}$$

となり，よって

$$E_{\mathrm{bh}}\geq\Omega_{\mathrm{obs}}L_{\mathrm{bh}} \tag{15.35}$$

である．ここで，$L_{\mathrm{bh}}=m_{\mathrm{bh}}\ell_{\mathrm{bh}}$ はブラックホールに落下する粒子の角運動量であり，m_{bh} はその静止質量である．Ω_{obs} の許される値は正であり，回転観測者はブラックホールと同じ方向に回転している（問題 14）．エネルギーを取り出すためには，E_{bh} は負でなければならず，L_{bh} も負であることになる．落下粒子の L_{bh} が負であることから，ブラックホールの角運動量は**減る**．回転エネルギーは，ブラックホールの角運動量が 0 になるまで，このようにして取り出すことができる．

ブラックホールの質量と角運動量はペンローズ過程で減少する．しかしブラックホールの事象の地平の面積は増加するか一定のままである．例 15.3 で，このことがペンローズ過程でどのようになるのかを示す．しかし結果は一般的なものであり一般相対論のブラックホール面積増大定理は，ブラックホールと物理的に意味のある物体の間で古典的にどんな相互作用が起きても面積は単に増加するか，変わらないままであることを示している．

---

[5] この分析はわかりやすいだろうか．13.3 節でシュワルツシルトブラックホールから出るホーキング放射を説明するときに使ったものと似ている．t 変位対称性に対応するキリングベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は地平線外で時間的で，地平線内で空間的である．真空ゆらぎで発生する対のうち 1 つは地平内部で $-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}<0$ であり，$\boldsymbol{\xi}$がそこでは空間的なのでこのようにできる．外部のパートナーは $-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}>0$ をもち，正のエネルギーを無限遠へ運ぶ．回転ブラックホールからも同様にホーキング放射が起きる．問題 15 を見よ．

例 15.3. ペンローズ過程における面積の増加　ペンローズ過程により，回転するブラックホールの質量は減る．面積も減るのだろうか．ブラックホールに落下する粒子（bh）はブラックホールの質量を $\Delta M = E_{\rm bh}$, 角運動量を $\Delta J = L_{\rm bh}$ 変化させる．それにともなう面積 ΔA の変化は (15.6) 式と (15.13) 式から計算することができる：

$$\Delta A = \frac{8\pi}{\kappa}(\Delta M - \Omega_H \Delta J) \tag{15.36}$$

ここで Ω_H は (15.11) 式で与えられ， κ は

$$\kappa \equiv \frac{(M^2 - a^2)^{1/2}}{2Mr_+} \tag{15.37}$$

である．(15.35) 式からエルゴ球内部の r 一定の観測者に許される角速度 $\Omega_{\rm obs}$ に対して $\Delta M > \Omega_{\rm obs}\Delta J$ が成り立つことがわかる．ほとんど地平のヌル生成子のように運動する，地平付近の観測者は最も大きな角速度を持っている（問題 14）．その極限値は Ω_H である．したがって，$\Delta M > \Omega_H \Delta J$ であり，ブラックホールの面積はどんなペンローズ過程でも常に**増加する**．

面積増大定理を使うと，ブラックホールの回転エネルギーをもっと正確に理解することができる．回転ブラックホールの**既約質量** $M_{\rm ir}$ を地平面積を使って

$$M_{\rm ir} \equiv \left(\frac{A}{16\pi}\right)^{1/2} \tag{15.38}$$

と定義しよう．ブラックホールに古典的に何が起きても既約質量は増加するか一定のままでなければならない．(15.13) 式を使って，全質量 M を $M_{\rm ir}$ と角運動量 J で表すと

$$\boxed{M^2 = M_{\rm ir}^2 + \frac{J^2}{4M_{\rm ir}^2}} \tag{15.39}$$

既約質量

となる．ペンローズ過程は J の値を 0 にすることはできるが，$M_{\rm ir}$ の値を減らすことはできない．

現時点でペンローズ過程は活動銀河核（13.2 節）や X 線源（11.2 節）の大きなエネルギー発生源だとは信じられていない．それが作動する条件に，たとえば降着で解放されるエネルギーに匹敵するほど十分頻繁に達しない．しかし，ペンローズ過程により，面積が常に増大する場合，原理的にブラックホールの回転エネルギーを古典的にどのようにして利用できるのかを簡単に説明することができる．その一方で，300 ページのボックス 15.1 で述べた Blandford–Znajek 機構によって，ブラックホールの回転エネルギーを**電磁気的に**取りだすことは活動銀河核の重要なエネルギー発生源になりうる．

問題

1. [E] 太陽と地球についてカーパラメータ a を評価せよ．静止質量よりも大きいか小さいか．
2. [S] 時間の向きを逆にすると，角運動量と回転体の回転の向きも逆になる．(15.1) 式における $t \to -t$ の作用は $J \to -J$ とするのと同じであることを示せ．$\phi \to -\phi$ とすると何が起きるか．
3. [A] 変換

$$dt = dv - \frac{r^2 + a^2}{\Delta}dr, \qquad d\phi = d\psi - \frac{a}{\Delta}dr$$

をボイヤー–リンキスト座標に適用すると，$r = r_\pm$ で特異でない座標系になることを示せ．
コメント： これは，12.1 節で考察した球対称ブラックホールのエディントン–フィンケルシュタイン座標の一般化であり，上の変換で $a = 0$ としたものと (12.1) 式を比較すると一致することがわかる．

4. カー幾何学の未来に向いた光線がすべて $r = r_+$ で出発したとき，光線の r の値が小さくなることを示せ．問題 3 のような特異でない座標系を使え．
5. [A] 回転するブラックホールの地平上のヌル方向を (15.10) 式と同定した．しかし，これらの方向に発射された光線は地平にい続けることができるだろうか．カー計量における光線の測地線を使って，そうなることを示せ．光線は θ 一定に留まることも示せ．
6. $r = r_+$ の 2 つのベクトル $(0, 0, 1, 0)$ と $(0, 0, 0, 1)$ は（a）空間的で（b）互いに直交し，ヌル生成子 $\boldsymbol{\ell}$(15.10) と直交することを示せ．
7. 地平幾何学 (15.12) で，極まわりの距離が常に赤道まわりの距離よりも短いことを示せ．
8. [N] a/M の値が 0, 0.5, 0.86 のときについてカーブラックホールの $t =$ 一定スライスの埋め込み図を描け．内在的幾何学は (15.12) 式で与えられる．図 15.2 は $a/M = 0.86$ のときの結果である．君の描いた図を使って，このような埋め込みが可能な a/M の最大値がなぜ存在するのかを説明できるか．
9. $r = r_-$ 面が，カーブラックホール**内部の**定常軸対称ヌル面であることを示せ．
10. **地平によって囲まれる！** 計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

を考えよう．この計量は漸近的平坦ではないが，我々は $r = 0$ の近くにいると想像しよう．そこから半径 $r = R$ を超えると，二度と戻って来れないことを示せ．

11. [A] 質量 M の最大極限ブラックホールの幾何学に，赤道面で，ブラックホールと同じ回転方向にボイヤー–リンキスト半径 $r = M$ の光線円軌道があり，逆方向に $r = 4M$ の円軌道があることを示せ．
12. カー幾何学において，ボイヤー–リンキスト半径 r の円軌道の角速度 $\Omega = d\phi/dt$ が簡単な公式

$$\Omega = \pm\frac{M^{1/2}}{r^{3/2} \pm aM^{1/2}}$$

で与えられる．ここで上の符号は順回転で，下は逆回転である．この公式の導出方法を示し，これがしたがう代数方程式を示せ．君が本当に代数計算が好きでなければこの方程式を解こうとしてはいけない．

13. [S] カー幾何学の最も内側の共動回転安定円軌道のボイヤー–リンキスト半径がシュワルツシルト幾何学で対応する半径 $r = 6M$ [図 15.3 を参照] よりも小さいからと言って，カー幾何学の軌道がブラックホールに近いというわけではない．結局は，この 2 つは別の幾何学の半径にすぎない．しかし円周は，軌道の大きさの 1 つの不変測定値である．図 15.3 を使って，a/M の値が 0, 0.2, 0.4,0.6,0.8,1 の値の場合，カー幾何学の最も安定な共動回転軌道の円周をプロットせよ．カー幾何学における共動回転安定円軌道の円周は，シュワルツシルト幾何学のものよりつねに大きいか，小さいか．$a/M = 1$ のときに何が起きるか説明できるか．

14. エルゴ球内の固定した半径 r に留まる観測者に許される角速度 Ω_{obs} の範囲を求めよ．観測者が地平に近づけば近づくほどこの範囲は大きく制限を受け，ついには 1 つの値 Ω_H に限られることを示せ．

15. [C] **回転ブラックホールの温度**
    (a) 軸対称体が対称軸の周りを角速度 Ω, 角運動量 J で自転している．ニュートン力学で，角運動量を小さい量 ΔJ 増やすのに必要な仕事が $\Omega\Delta J$ であることを示せ．
    (b) 回転ブラックホールの質量と角運動量の変化が熱力学第一法則のような形になるとき，面積 A の変化に対して，(15.36) 式を再認識せよ．ブラックホールのエントロピーが，シュワルツシルトの場合のように，$k_B A/4\hbar$ であると仮定せよ [(13.18) 式を参照]．カーブラックホールのホーキング温度を求めよ．
    (c) 最大極限ブラックホール（$a = M$）の温度が 0 であることを示し，カー幾何学の性質からこの事実を説明せよ．

16. [B,E] 10^{46}erg の光度をもつ活動銀河核は 300 ページのボックス 15.1 で述べたように最大極限で回転するブラックホールの回転エネルギーからネルギーを供給されている．同じようにして活動銀河核が放射できる最大時間を**評価せよ**．その答えと，約 150 億年の宇宙年齢と比較し，パーセントで答えよ．

17. [B,P,S] 300 ページのボックス 15.1 の（b）式が，対称軸の周りを回転する軸対称導体にかかる電圧になっていることを示せ．

18. [B,E,P] ボックス 15.1 で述べた磁場 $B \sim 10^4$gauss 中の $M \sim 10^9 M_\odot$, $\Omega_H M \sim 1$ の回転ブラックホールを考える．ブラックホール付近の電子が同じような電子または陽電子と衝突してさらなる電子陽電子対を発生させるのに十分なエネルギーを獲得するまでに，電場中をどれだけ長く運動しなければならないか**評価せよ**．

第 16 章

重力波

質量が時空曲率を生み出す．これが一般相対論の核心である．太陽の静止した球形質量はその外側にシュワルツシルト幾何学をつくり出す．（非球形非一様な）質量が運動すると，曲がった時空のさざ波が発生し，遠くへ光速で伝わる．時空曲率中を伝わるさざ波は**重力波**と呼ばれる．重力波が自由に伝達する現象をこの章で考察し，第 21 章で伝達形式をアインシュタイン方程式から求め，重力波の生成は第 23 章で示す．

宇宙には重力波の発生源が多く存在する．連星，超新星爆発，ブラックホールへの崩壊，ビッグバンはすべてその例である．重力波は，電磁波スペクトルのあらゆる周波数帯，X 線，可視光，赤外線，電波とは定性的に異なった天体現象を探る窓となる．

宇宙にはいろいろな発生源があるので，宇宙では重力放射が特別暗いわけでもない．しかし第 1 章で述べたように日常の環境で重力相互作用が弱いことは，重力波が容易に検出できないことを物語っている．執筆時，重力波の効果が 11.3 節と 23.7 節に述べた連星パルサーの軌道で観測されているが，まだ地上では観測されていない．しかし実在する発生源から放出される重力波を検出するのに十分な感度をもつレーザー干渉検出器のネットワークが世界規模で今まさに建設されている．その作動原理を 16.4 節で考察する．

物質との弱い結合が重力波を検出するのを困難にしているのだが，そのことが逆に重力波を宇宙物理学的に興味深くしている．一度発生されればほとんど吸収されないため，原理的に重力波はブラックホールの地平や電磁波の形では見ることのできない宇宙初期の瞬間をぐっと引きよせることができる．

この章では物質のないほとんど平坦な時空を伝わっていく弱い重力波に焦点を絞る．これは最も有用であると同時に最も扱いやすい例である．最も有用というのは，実際の発生源からどんな距離にあっても重力波は曲がった時空を伝わる非常に小さなさざ波だからである．最も扱いやすいというのは，第 21 章と第 23 章で見るように，難しい非線形アインシュタイン方程式を扱いやすい線形近似にして解くことができるからである．この近似解は**線形**重力波と呼ばれる．この章では第 21 章で得られる線形解の形を仮定する．我々は以下の事実を明らかにすることを目指し重力波を分析する．

線形重力波は

- 光速で伝わる
- 横波である

- 2 つの独立な偏極がある
- テスト質量の相対運動に作用する効果により検出できる
- エネルギーを伝達する

16.1 線形重力波

重力波時空の最も単純な例は，1 つの方向に進み，他の 2 つの方向とは独立な曲率をもつ小さなさざ波である．伝達の方向は**縦**方向と呼ばれ，垂直な 2 方向は**横**方向と呼ばれる．この波は横方向にはどこでも同じなので，**平面波**と呼ばれる．

(t, x, y, z) 座標の慣性系で平坦時空の計量は $g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}$ である．$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ であり，平坦に**近い**幾何学の計量は

計量摂動

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x) \tag{16.1}$$

と書くことができる．ここで振幅 $h_{\alpha\beta}(x)$ は平坦空間計量の小さな摂動である．この**計量摂動**が重力波を表すのである．

z 軸方向に伝わる平面重力波時空の簡単な例は以下の計量摂動で表される：

$$h_{\alpha\beta}(t,z) = \begin{array}{c} \\ t \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} f(t-z) \tag{16.2a}$$

ここで $f(t-z)$ は $t-z$ の関数であり，$|f(t-z)| \ll 1$ を満たせば何でもよい．これらの摂動とともに，時空の線素は

平面重力波時空

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + [1 + f(t-z)]dx^2 + [1 - f(t-z)]dy^2 + dz^2} \tag{16.2b}$$

となる．

幾何学 (16.2) は速さ 1 つまり光速で z 軸の正の方向に伝わる曲率の波を表している．曲率におけるさざ波の大きさ（振幅）と形は関数 f で決まる．$h_{\alpha\beta}$ と $f(t-z)$ はすべて無次元であり，重力波の振幅は無次元数である．

たとえば $f(t-z) = a\exp[-(t-z)^2/\sigma^2]$ と選べば，ガウス波束を表す．波束は幅 σ と高さの最大値 a をもち，z 軸に沿って，形を変えずに光速で伝わる．$f(t-z) = a\sin[\omega(t-z)]$ と選ぶと，重力波の振幅が a で，振動数が ω の波を表す．波長 λ は $2\pi/\omega$ である．

(16.2) 式の計量はアインシュタイン方程式を厳密に解いて得られたものではなく，波の振幅の 1 次の（線形化された）展開式を解いたものである．これを第 21 章でみるだろう．これらの線形重力波は，振幅が小さいとき，アインシュタインの正しい解の非常に優れた近似となっている．16.4 節で述べる第一世代レーザー干渉計で検出できる可能性がある重力波の振幅は $\sim 10^{-21}$ のオーダーである．線形近似はこの目的に対して非常に優れている．線形波は重要な性質をもっている．

それは加えることで別の線形波を作ることができ，それが同じ精度でアインシュタイン方程式の解になっていることである．

重力波の計量 (16.2) はたくさんある形のうちの単なる 1 つではない．21.5 節でみるように，座標系をうまく選べば，z 軸方向に進む一般線形平面重力波はつねに (16.2) 式の形の波の和として書くことができ，それは 1 つの偏極に対応し，もう 1 つは別の偏極に対応する．これらの特徴は (16.17) 式に現れている．

16.2　重力波の検出

時空曲率のさざ波をどのようにして検出したらよいだろうか．答えは，我々がこれまで学んできた時空と同じである．つまり，時空曲率はテスト物体の運動を通じて検出できる．テスト粒子は曲がった時空中で測地線に沿って運動する物体であるが，その質量は小さく，それ自身は時空曲率に大きな影響を与えない．

1 つの物体の運動だけでは重力波を検出するのには十分ではない．1 つのテスト質量が自由落下している系でその運動を調べることを想像しよう．重力波がやってきてもこなくてもそこでは静止したままである．等価原理があるため，この運動は平坦時空のテスト粒子と区別できない．重力波，実際に時空の曲率を検出するためには少なくとも 2 つの物体の相対運動を調べる必要がある．

このアイディアを定量的なものにするために，z 軸に進む (16.2) 式の形の重力波の波束を考えよう．波が通る前に 2 つのテスト質量 A, B は (16.2) 式の座標 (t, x, y, z) で静止している．簡単のため，A を原点 $(0,0,0)$ におき，B を空間位置 (x_B, y_B, z_B) におくとする．2 つのテスト質量の初期の 4 元速度は

$$u^\alpha_{(A)} = u^\alpha_{(B)} = (1, \vec{0}) \tag{16.3}$$

線形重力波時空

である（添字 (A), (B) はベクトルの添字ではなく，2 つのテスト質量を区別するためのものである．括弧はそのことを強調するためにつけてある）．波が通過する前，時空は平坦で，テスト粒子は静止したままである：

$$x^i_{(A)}(\tau) = (0,0,0), \qquad x^i_{(B)}(\tau) = (x_B, y_B, z_B) \tag{16.4}$$

波がぶつかったあとの運動を予測するために，計量 (16.2) を使って，測地線方程式を各粒子について解かなければならない．振幅は小さいので，波の振幅の 1 次である運動の補正項 $\delta x^i_{(A)}$ と $\delta x^i_{(B)}$ だけについて解けばよい．

どちらのテスト質量に対しても空間座標 $x^i(\tau)$ の測地線方程式は (8.14) 式

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{16.5}$$

である．これらの方程式で 1 次の変化 $\delta x^i(\tau)$ を計算するためには波の振幅の 1 次だけを評価すればよい．$\Gamma^i_{\alpha\beta}$ は無摂動時空で 0 になるので，

$$\frac{d^2\delta x^i}{d\tau^2} = -\delta\Gamma^i_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -\delta\Gamma^i_{tt} \tag{16.6}$$

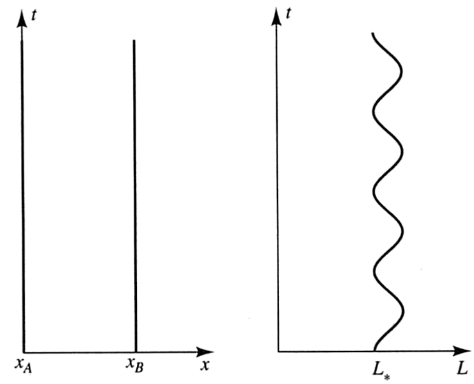


図 16.1　重力波時空におけるテスト粒子の運動．この図は，重力波が z 方向に進んでいる時空の t-x 時空図を表している．2 つのテスト粒子は初め座標 $x=0$, $x=L_*$ にある．波が通ると 2 つの粒子の座標間隔は変わらないが，その間の距離 $L(t)=L_*+\delta L(t)$ は，右図が示すように重力波の振動数で振動する．ここに示した振動の振幅は実際の検出器で期待されるものよりもかなり大きい．重要な発生源からの波の振幅は地球で $\delta L/L_* \sim 10^{-21}$ しかないだろう．

となる．$\delta\Gamma^i_{\alpha\beta}$ は Γ についての 1 次の変化で，u^α は**無摂動** 4 元速度であり (16.3) 式で与えられる．クリストフェル記号 Γ^i_{tt} は計量 (16.2) の場合簡単に評価でき，0 になる．したがって $\delta\Gamma^i_{tt}$ もそうできる．よって，波の振幅の 1 次までで

$$\frac{d^2\delta x^i}{d\tau^2}=0 \tag{16.7}$$

である．初めに $\delta x^i=0$ でテスト質量が止まっていれば $d(\delta x^i)/d\tau=0$ である．(16.7) 式は両方の質量に対しすべての τ で $\delta x^i(\tau)=0$ であることがわかる：

$$\delta x^i_{(A)}(\tau)=\delta x^i_{(B)}(\tau)=0 \tag{16.8}$$

したがって，波が通っても，振幅の 1 次まででは粒子の**座標**の位置は変わらない．

図 16.1 に説明したように，**座標間隔**が変わらなくても，2 つのテスト質量間の**距離**は時間とともに変わる．それがなぜなのか以下の例で説明する．

例 16.1．伝達方向に垂直な面における 2 つのテスト質量間の距離の変化 $\delta L(t)$　z 方向に進む (16.2) 式の形の波と 2 つのテスト質量を考えよう．1 つは原点にあり，もう一方は x 軸に座標距離 L_* 離れている．2 点間の距離は無摂動平坦時空で L_* である．重力波時空 (16.2) 中で x 軸に測った距離 $L(t)$ は

$$L(t)=\int_0^{L_*}dx[1+h_{xx}(t,0)]^{1/2}\approx L_*\left[1+\frac{1}{2}h_{xx}(t,0)\right] \tag{16.9}$$

であり，距離の変化 $\delta L(t)$ は

$$\frac{\delta L(t)}{L_*}=\frac{1}{2}h_{xx}(t,0) \qquad \begin{pmatrix} z=0\ \text{で}\ x\ \text{軸の} \\ \text{テスト質量} \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

である．テスト質量の距離は，図 16.1 に示したように，波の時間変動にしたがって時間とともに変化する．波が振動数 ω，振幅 a, 位相 δ をもち，$f(t-z) = a\sin[\omega(t-z)+\delta]$ と表されると

$$\frac{\delta L(t)}{L_*} = \frac{1}{2}a\sin(\omega t+\delta) \tag{16.11}$$

となる．x 軸に沿った距離の変化率は重力波の振幅の半分で周期的に振動する．

この例は，1 つのテスト質量が原点にあり，もう 1 つが波の伝達方向を横切る平面の任意の位置にある場合にそのまま一般化される．第二のテスト粒子が原点から $z=0$ 面内の単位ベクトル $\vec{n}$ の方向に L_* の距離にあり，波の伝達方向に垂直だとする．平坦時空では直線になっている経路に沿って計算される距離 $L(t)$ は

$$\boxed{\frac{\delta L(t)}{L_*} = \frac{1}{2}h_{ij}(t,0)n^i n^j \qquad \begin{pmatrix} z=0 \text{ 面内の} \\ \text{テスト質量} \end{pmatrix}} \tag{16.12}$$

重力波によってつくられるひずみ率

のように変化する．弾性の分野の用語を借りれば，比 $\delta L/L_*$ は，重力波によって作られる**ひずみ率**と呼ばれる．

(16.12) 式のテスト質量間の空間距離は，無摂動平坦時空で直線経路（測地線）に沿って計算される．重力波はテスト質量の座標を変えないからといって，重力波の曲がった時空中で経路が測地線に沿っているとは限らないし，実際そうではない．16.4 節で議論するように，レーザー干渉計検出器の視点に立ち，テスト質量間を進む光の経路に沿って間隔を計算すべきであろう．平坦時空で光線は，どんな時空でもそうであるように直線経路を進む．しかし，重力波の曲がった時空中で直線経路は平坦空間の直線経路座標から $\delta x^i_{(\ell)}(\lambda)$ ずれる．この変化は波の振幅は 1 次のオーダーであろう（問題 4）．しかしながら，テスト質量間の距離に 1 次の変化に対応するものがない．直線は平坦空間で距離が極値をとる経路であり，その経路からの小さなずれは距離の 2 次の変化にしかならない（3.5 節の最小作用の原理の考察を思い出せ）．したがって (16.12) 式は，振幅の 1 次のオーダーと同様に，光線の経路に沿った距離に変化を及ぼす．

(16.12) 式は，2 つ，またはそれ以上の質量の相対運動を観測することによって，重力波がどのように観測されるかを示している．実際，21.2 節で見るように，通常，テスト粒子の相対運動は局所的時空曲率を**定義する** 1 つの方法である．16.4 節で考察するように，重力波検出器はこの原理に基づいている．当然ながら，実際の検出器ではテスト粒子を前もって，入射波の方向に垂直な面内に配置することはできない．しかし，任意の方向にある 2 粒子の場合に (16.12) 式を一般化するのは全然難しいことではない（問題 3）．

16.3 重力波の偏極

重力波計量 (16.12) によると z 軸方向（縦方向）にある 2 つのテスト質量の間隔に変化は起きないことがわかる．(16.9) 式と同じような式の中で計量の摂動 h_{zz} は 0 になる．重力波が通ると，横の間隔（x-y）だけが時間的に変化する．よって電磁波のように重力波は**横波**である．

重力波に固有な特徴を明確に示す描像は，2 つのテスト粒子だけでなく，それ以上のテスト粒子を考えることで描ける．$z=0$ の x-y 平面に円形に自由粒子を並べ，その中心にもテスト粒子を置

いたところを考えよう（図 16.2）．$f(t-z) = a\sin[\omega(t-z)]$ とした (16.2) 式の形の平面重力波が z 方向を通りすぎると，テスト粒子の座標位置 (x, y, z) は変わらないままであり [(16.8) 式を参照]，特に，テスト質量は x-y 平面に留まったままである．中心質量と円上の質量の間の x-y 平面内での距離はそれぞれの測地線にしたがうが，計量 (16.2) にしたがって時間とともに変動する．これらの距離を計算するために， $z=0$ の x-y 平面に新しい座標 (X, Y)

$$X = \left(1 + \frac{1}{2}a\sin\omega t\right)x, \qquad Y = \left(1 - \frac{1}{2}a\sin\omega t\right)y \tag{16.13}$$

を定義して使うと便利である．これらの新しい座標で x-y 平面の線素は，平坦ユークリッド平面の馴染み深い $dS^2 = dX^2 + dY^2$ に加え a^2 のオーダーの無視できる補正項になる．テスト質量の x-y 座標は時間変動しないが，X と Y は (16.13) 式にしたがって t とともに変動する．x-y 平面におけるテスト質量間の距離は波の振幅の 1 次のオーダーまでユークリッド平面幾何学を使って $X(t)$ と $Y(t)$ 座標から計算される．

波について横方向の平面にあるテスト質量リングの時間的振る舞いを図 16.2 で示した．一般的なパターンは楕円であり（問題 6），その軸が周期的に振動するが，軸の振動は互い違いになる．ある位相では楕円が X 軸方向につぶれ，Y 軸方向には広がる．1/4 周期後には X 軸方向に広がり始め，Y 方向にはつぶれ始める．この振動のパターンはすべての重力波に特徴的で，同定する方法の 1 つになる．

(16.2) 式の計量は重力波で最も一般的なものではない．これは，重力波の 2 つの独立な**偏極**のうちの 1 つの例である．残りの偏極を見つけるために，x-y 軸を角度 φ で回転することを想像しよう．(3.4) 式で (x, y) と回転座標 (x', y') を関係づける．たとえば，$\varphi = -45°$（$= -\pi/4$ ラジアン）を選ぶとすると

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \tag{16.14}$$

となる．この変換を線素 (16.2b) に代入すると，計量の各部分がどのように変換するかを示すことができる．平坦空間部分 $\eta_{\alpha\beta}$ はどんな回転に対しても不変であり

$$h_{x'x'} = 0, \qquad h_{x'y'} = h_{y'x'} = h_{xx} = -h_{yy}, \qquad h_{y'y'} = 0 \tag{16.15}$$

であることが容易に示せる．しかし変換前後の座標を区別することは物理的にはできないので，ダッシュを落とせば，(t, x, y, z) 座標における線形アインシュタイン方程式の別の解になる．その形は

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(t-z) \tag{16.16}$$

である．これは 1 つ目のものとは線形独立な第二の偏極である．テスト粒子のリングの振る舞いは図 16.2 とまさに同じであるが，45° 回転している．(16.2) 式の形の波は通常 +（プラス）偏極と呼ばれ，(16.16) 式のものは ×（クロス）偏極と呼ばれる．z 軸の正に進む最も一般的な重力波は，

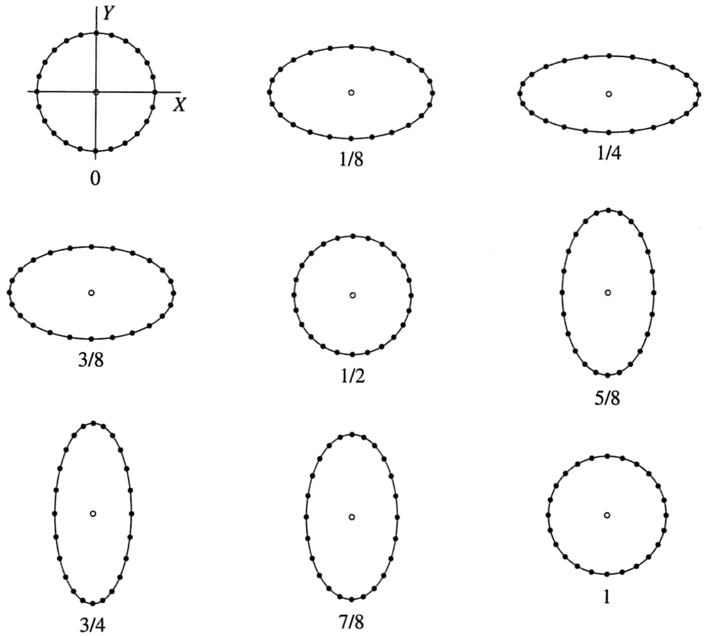


図 16.2 重力波の特徴．(16.2) 式において決まった振動数と振幅 $a = 0.8$ をもった重力波がやってきて，その伝達方向に対して垂直な面内の 24 個のテスト質量の位置の時間的振る舞いをこの図は表している．$t = 0$ でテスト質量●は中心のテスト質量○の周りに円形に並んで静止している．それ以降の時刻を周期の何倍かで，(16.13) 式で定義される座標 (X, Y) の位置の振る舞いを示した．円は初め Y 方向につぶされ X 方向には広がり楕円になる．1/4 周期の時刻で，X 方向につぶされ，Y 方向に広がる．これが続く．このパターンは重力波の偏極の 1 つである．別に，同じ変動になるが，45° 傾くものがある．$a = 0.8$ の振幅は線形であるが限界に近い．しかし実際の検出器でみられるような $a \sim 10^{-21}$ の振幅は図のスケールのものには何の影響を及ぼさないだろう．

2 つの異なる関数を $f_+(t-z)$ と $f_\times(t-z)$ とおくと

$$\boxed{h_{\alpha\beta}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_+(t-z) & f_\times(t-z) & 0 \\ 0 & f_\times(t-z) & -f_+(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \tag{16.17}$$

z 方向の一般線形重力波

の形をしている．最も一般的な線形重力波は，別々の方向に伝達し，それぞれの方向に異なった関数 f_+, $f_\times$ を持った (16.17) 式の計量摂動の重ね合わせになる．

16.4　重力波干渉計

執筆時，図 16.3 のようなマイケルソン干渉計の原理に基づいた多くの重力波検出器が世界中で建設中である．

3 つのテスト質量がワイヤでつるされ，水平方向に自由に揺れるようになっているところを想像しよう．テスト質量（M）のうちの 2 つに鏡がつけられ，3 つ目（S）は，図に示したようにビーム分波器を支えている．レーザー（L）から発射された光の入射ビームは 2 本に分かれ干渉計の垂直な腕に沿って進み，反射し再び合わさって，検出される．簡単化して，干渉計の腕は，ビーム分波器（S）とともに自由落下する系の x 軸と y 軸の方向に向いていると仮定する．さらに，合わさって検出器（D）に入る光だけに関心があるとする．これらのビームは合わさるとき，2 つの腕 $L_{(x)}$ と $L_{(y)}$ の長さの 2 倍の差が波長の整数倍違えば強め合い，半整数倍違えば弱め合う：

$$\Delta L \equiv 2(L_{(x)} - L_{(y)}) = n\lambda, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{強め合う} \tag{16.18a}$$

$$\Delta L \equiv 2(L_{(x)} - L_{(y)}) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{弱め合う} \tag{16.18b}$$

腕の長さの差 $\Delta L = 2(\Delta L_{(x)} - L_{(y)})$ が変化したとしよう．ΔL が強弱の干渉の条件 (16.18) を通じて動くと，検出器で合わさったビームの強度は図 16.4 に理想化された曲線のように見えるだろう．

そして入射重力波は腕の長さを変え，2 つのビームの干渉の仕方を変える．ビーム分波器（S）を図 16.2 のパターンの中心質量として考え，取り囲むパターン中のテスト質量のうち 2 つを鏡付

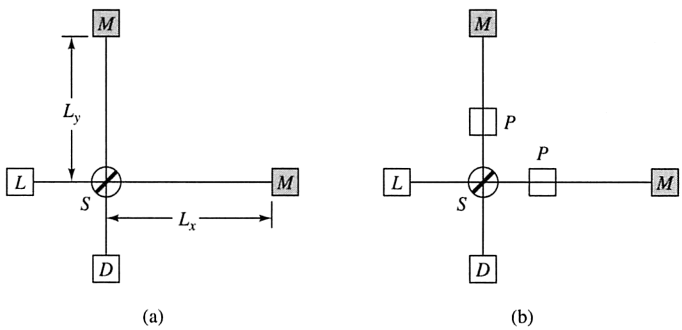


図 16.3　(a) 左図はマイケルソン干渉計重力波検出器の概略図．3 つのテスト質量が垂直方向につるされていて，この図の平面上で水平方向に自由に動けるようになっている．1 つのテスト質量（S）はビーム分波器を備え，他の 2 つ（M）には鏡がつき，干渉計の 2 つの腕の端を決めている．レーザー（L）から出たビームは（S）で 2 つのビームに分割され 2 つの垂直な腕に沿って進む．反射され再び合わさり検出器 D で検出される．入射重力波によって 2 つの腕の長さに小さい差が生じるが，それは干渉の度合によって検出される．(b) 右の図はまだ概略図ではあるが，実際の設計にいくぶん近い．鏡つきのテスト質量に加え部分的に反射する鏡（P）を備えたテスト質量が置かれている．各々の腕にある 2 つの鏡は空洞共振器として作用し，ビームは反射され何回も往復することで，事実上腕の長さを大きくし，干渉計の精度を上げている．

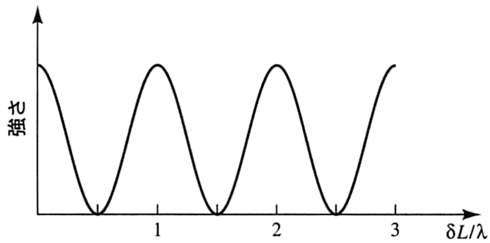


図 16.4 理想的な干渉のパターン．干渉計の 2 つの腕の長さの差 δL が (16.18) 式の強弱の干渉の条件の間で変化するとき，図 16.3 の検出器 D の強度がどのように変わるかを表した図である．曲線は $[1 + \cos(2\pi\delta L/\lambda)]$ のパターンであり，厳密に単色波で 2 つの腕に同じ強度で損失なしでやってきたときの理想的な状況に対応している（問題 10）．δL の小さい変化が重力波の強度の変化から検出される．初期の LIGO 検出器は可視光の波長の 10 億分の 1 のオーダーの δL の変動に対応する強度変化を見つけることができる．これは $\delta L/L$ で 10^{-21} のオーダーの精度に対応する．

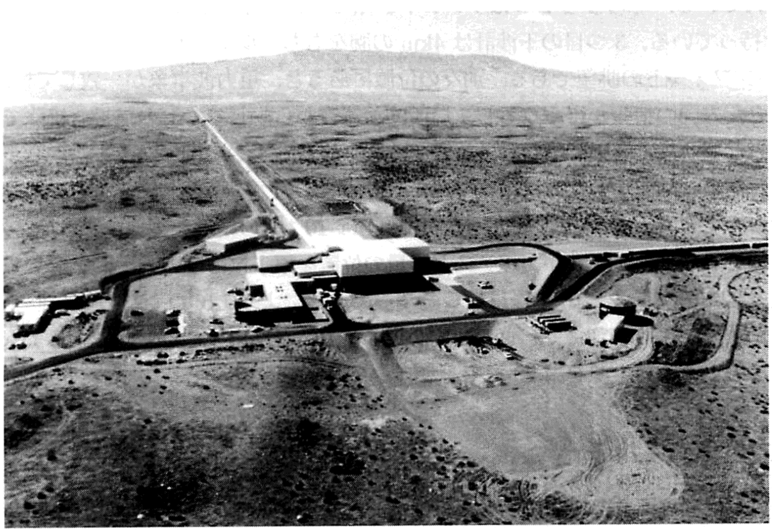


図 16.5 ワシントン州のハンフォードの LIGO 重力波検出器．LIGO はレーザー干渉計重力波観測所にある．2 つの干渉計を収容するビームパイプを覆う 4km の長さのコンクリートが地平線方向および右に伸びている．図 16.3 に示した干渉計の 2 つの端はこれらのパイプの端である．ビーム分波器は前景で，端を覆う建物の中にある．ルイジアナ州のリビングストンにも同じような施設がある．

きの質量だと考えることができる．簡単のため，波が (16.2) 式の形をしていて，z 軸に沿って，決まった振動数 ω で入射したと仮定する．x-y 軸は干渉計の腕に沿っていると仮定すると，波が通過すると，図 16.2 で示したように $L_{(x)}$ は広がったり縮んだりし，$L_{(y)}$ も縮んだり広がったりして，位相がずれ，定量的には (16.13) 式のようになる．具体的には

$$\frac{\delta L_{(x)}}{L_{(x)}} = +\frac{1}{2} a \sin(\omega t), \qquad \frac{\delta L_{(y)}}{L_{(y)}} = -\frac{1}{2} a \sin(\omega t) \tag{16.19}$$

となる．振幅 a と振動数 ω は干渉パターンを監視することで測定できる．もっと一般的に，入射波束の形が見つかるだろう．(16.18) 式と (16.19) 式から，干渉計が長くなれば，それだけ振幅の干渉パターンの変化は大きくなる．別の言い方をすれば，干渉計が長くなれば，精度が上がる．

実際の干渉計は，マイケルソン干渉計に基づいてはいるが，ずっと洗練されている．特に，図 16.3a に説明したテスト質量の簡単な配置の代わりに，高い精度で反射する鏡（M）のついた 1 つのテスト質量と部分的に反射する鏡（P）のついた別の質量によって形成される空洞共振器を 2 つまたはそれ以上使う（図 16.3b を見よ）．共振させると，空洞共振器は，別の腕からのビームと合わさる前に，端から端へビームが多重反射しているかのように振る舞う．こうすることで，干渉計の有効長さとその精度を大いに増加させることができる．図 16.4 で示したような，ごく小さな干渉縞の変化でも検出できると期待されている．

執筆時に，今にも作動が始まろうとしている LIGO 重力波検出器はこのような 3 台の検出器から構成されている．そのうち 2 つはワシントン州のハンフォードに置かれ，そのうちの 1 つは 4km の腕を持っている．3 つ目の干渉計は 4km の腕をもち，ルイジアナ州リビングストンにある．図 16.5 はハンフォードの眺望である．別々の位置にあると，重力波事象が一致して検出されれば，波がやってきた方向の情報が得られるし，局所的な雑音から生じるニセの信号も排除できる．地震による小刻みな揺れは，実験で扱わなければならない雑音の 1 つの例である．しかし，いろいろな雑音源とそれを取り除く巧妙な方法は我々がここで詳しく述べるべきトピックスではない[1]．

2002–2004 年の初期のデータ収集期間で，LIGO は 10^{-21} の精度を達成すると期待されている．この精度を理解するには，これが実際テスト質量の位置を原子核程度の大きさまでモニターすることを思い出せば十分である．10 年後にはレーザーの発達により LIGO は，互いに回り合う中性子星対とたぶん数年に 1 度の割合で起きる合体からの重力波を検出することができるようになっているはずだ．このような発生源を第 23 章でより詳しく考察する．

16.5 重力波のエネルギー

一般相対論における局所的な重力エネルギーはない

ニュートン重力場のエネルギー密度は

$$\epsilon_{\text{Newt}}(\vec{x}) = -\frac{1}{8\pi G}[\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})]^2 = -\frac{1}{8\pi G}[\vec{g}(\vec{x})]^2 \tag{16.20}$$

である．ここで $\Phi(\vec{x})$ はニュートン重力ポテンシャルで，$\vec{g}(\vec{x})$ はニュートン重力場 (3.16) である．電磁気学を習っていれば，これらの式が電磁場のエネルギー密度と似た式になっていると認識で

[1] 詳しくは，Saulson（1994）を見よ．

きるだろう．ニュートン重力エネルギー密度は電磁場のエネルギー密度と同じ形であり，違いは重力の引力に対応して符号が負になっていることである．重力は引力なので，質量の集合体のエネルギーはバラバラになっているときよりも**小さい**．電磁気学を習っていなければ，問題 11 を解くことにより，(16.20) 式の標準的導出ができる．ただし，我々にとって厳密な形は重要ではない．

一般相対論で (16.20) 式に対応するエネルギー密度は何であるか？　実は何もないのだ．ニュートン重力と一般相対論の類似性を追究していけば，計量の 1 階微分から求められる式を探そうとするかもしれない．しかし，結果は座標の選び方に独立であるべきであるが，計量の 1 階微分は局所慣性系ですべて 0 になり，候補となる式は存在しない．それがないということは，重力が十分小さい自由落下研究室で十分小さな期間測定すると 0 になるという等価原理のアイディアとつじつまがあう．

一般相対論の重力エネルギー密度の局所的な概念が存在しないことには深い理由がある．一般相対論では保存量と時空の対称性の関係を扱わなければならない（8.2 節）．シュワルツシルト幾何学の粒子軌道で保存するエネルギーと角運動量は時間変位と回転対称性から直接得られる．電磁場で保存するエネルギーと運動量は，マクスウェル理論で仮定している平坦時空の対称性の結果である．しかし一般相対論では固定された時空幾何学を仮定していない．一般相対論は時空幾何学**の**理論であり，すべての時空を特徴づける対称性は存在しない．局所的エネルギー密度が存在しないことは，時空**中**で作用する力の場としての重力の視点から，曲がった時空**としての**重力の視点への移行の一部である．

短波長近似における重力波のエネルギー

重力場エネルギーに局所的な概念がなくても，時空の全質量エネルギーは，時空が漸近的平坦であると，意味をもつことがわかるだろう．シュワルツシルトまたはカー幾何学の漸近的振る舞いによって，ブラックホールの質量を定義することがその具体的な例である．波長 λ が背景時空曲率のスケール $\mathcal{R}$ よりずっと短い場合，全エネルギーと局所エネルギーの中間に，弱い重力波のエネルギー密度の**近似的**概念がある．このエネルギーは厳密には局所的ではないが，大きさが λ よりも大きく，$\mathcal{R}$ よりもずっと小さい時空体積にわたって平均すればエネルギー密度になる．

エネルギー密度を定義している近似は $\lambda/\mathcal{R}$ が小さくなるほどよくなっていく．たとえば，発生源から遠く離れて，空間がほとんど平坦で $\mathcal{R}$ がほとんど無限大である場所で重力波を計算することで，発生源から重力波として失われるエネルギーの計算の精度を任意に高くすることができる．

短波長重力波のエネルギー密度は第 22 章のウェブサイトの補足で得られる．納得のいく議論と次元解析により，この章で考察中の簡単な平面波の形を推測することができる．ある振動数の波 (16.2) を考えよう．$f(t-z) = a\sin[\omega(t-z)]$ である．弦を伝わる波や電磁波の場合のようにエネルギー密度は波の振幅 a の 2 乗に比例すると推測される．エネルギー密度の次元は幾何学単位系 ($G=c=1$) で (長さ)$^{-2}$ をもつ [これは $\mathcal{MLT}$ 単位系では (エネルギー)/(長さ)$^3 \sim \mathcal{M}/(\mathcal{LT}^2)$ であるが，質量と時間は幾何学単位系で長さの次元をもつ]．ある振動数をもつ平面重力波計量 (16.2) で長さの次元もつ量は波長に比例する振動数の逆数である．したがって，エネルギー密度は $\omega^2 a^2$ に比例しなければならないと推測できる．ウェブサイトの補足で，これが正しいことがわか

り，エネルギー密度 ϵ_{GW} として以下を導出する．短波長近似における重力波の 1 つの偏極で

$$\epsilon_{GW} = \frac{\omega^2 a^2}{32\pi} \tag{16.21}$$

になる．(16.2) 式で空間と時間依存性に何が起きているのかと疑問に思うかもしれない．しかし，(16.21) 式は厳密に局所的なエネルギー密度ではなく，空間と時間でいくつかの波について平均をとったものであることを思い出せ．(16.2) 式の $f(t-z)$ が $\sin\omega(t-z)$ の依存性をもつとき，2 乗平均は 1/2 になる．

波の特徴は他にもこの式からすぐに得られる．伝達方向に垂直な面を通過する重力波のエネルギーフラックス f_{GW} を例を挙げて考えてみよう．これは面を通過する単位面積当たりのエネルギーである．波は速さ 1 で進むので，面の背後にある単位面積，単位長さの円筒に含まれるエネルギーと同じである．要するに $c=1$ の単位系で，エネルギーフラックスはエネルギー密度と同じである：

線形偏極波のエネルギーフラックス

$$\boxed{f_{GW} = \frac{\omega^2 a^2}{32\pi}} \tag{16.22}$$

いろいろな偏極の重ね合わせでできている波のエネルギー密度とフラックスは各偏極の和である．第 22 章を学んでいれば，本書のウェブサイトにあるアインシュタイン方程式からこれらの関係を導出して読みとることができる．

問題

1. 重力波時空 (16.2) が 3 つのキリングベクトル $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$ を持つことを示せ．
2. $f(z-t) = a\exp[-(t-z)^2/\sigma^2]$ のガウス波束を考えよう．
   (a) $x=y=0$ の時空の $z-t$ スライスを示す時空図を描け．波束の振幅が $a/2$ より大きな領域に影をつけよ．原点にあるテスト質量の世界線を示せ．
   (b) その系で静止している 2 つのテスト質量の距離のグラフを描け．1 つは原点にもう 1 つは x 軸に沿って L_* の距離にあるとする．この距離の変化の最大値はいくらか．
3. (16.2) 式の重力波と 2 つのテスト質量を考える．1 つは原点にもう 1 つは (16.2) 式で使われた直交座標で (X,Y,Z) の位置にある．重力波によって作られる質量間の距離の変化が

   $$\delta L(t) = \frac{1}{2}\int_0^{L_*} d\lambda\, h_{ij}(t-n^z\lambda)n^i n^j$$

   で与えられることを示せ．ここで $n^i = (X/L_*, Y/L_*, Z/L_*)$ はテスト質量間の直線経路に沿った単位接ベクトルであり，L_* は摂動を受けていない距離である．
4. [C] 2 つのテスト質量間を伝わる光線の経路において平坦時空の場合からのずれ $\delta x^i_{(\ell)}(\lambda)$ を計算せよ．(16.2) 式の形の重力波が振動数 ω を持つことを仮定せよ．
5. コーヒーがなみなみと満たされたカップを持って，16.2 節で考察したテスト粒子のうちの 1 つに観測者が乗っている．コーヒーカップの大きさは重力波の波長よりもずっと小さい．

重力波が通過するとき，コーヒーがこぼれるようなダメージはあるか．もしそうなら，こぼれない程度に観測者がカップに注ぐとき，口にどれだけ近くまで満たせるか．

6. 楕円の式は $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ である．$a > b$ とすれば a は長軸半径，b は短軸半径である．最初円形に並んでいたテスト粒子が (16.13) 式によって楕円に歪むことを a の最低次で示せ．長軸半径と短軸半径を時間の関数として表せ．

7. 16.3 節で重力波が × 偏極 (16.2) と 45° 回転させた + 偏極で作られることをみた．回転角を任意に選んだものは互いに独立な解ではなく，+ と × の重ね合わせとして書き表されることを示せ．これは，重力波の線形独立な偏極が 2 つしかないことを知る 1 つの方法である．

8. [P]（a）線形偏極した電磁波で，電場が空間の決まった方向に振動している．z 軸方向に伝わる電磁波によって，どんな運動のパターンが，図 16.2 のテスト電荷のリングで作られるか．電磁波は x 方向に偏極しリング面に垂直に入射している（電荷に作用する磁力は無視せよ）．

（b）同じ運動をつくり出す 2 つの重力波の偏極の組合せは存在するか．

9. [C] **円偏極した重力波** 決まった振動数をもつ電磁波が線形に偏極しており，それを，同じ方向，同じ振幅，同じ振動数ではあるが，位相が 90° ずれた電磁波に加えると円偏極になり，空間のどこでも電場ベクトルの矢先が円上を動く．これと同様なことが重力波にも起きる．+ 偏極重力平面波に同じ振幅，同じ振動数，同じ方向だが，× 偏極に位相が 90° ずれた別の波を重ね合わせたものを**円偏極**重力波と呼ぶ．振動数 ω の円偏極重力平面波が楕円に並んだテスト粒子に垂直に入射すると，各テスト粒子は，一定の角振動数で楕円パターンが回転するように，小さな円上を回転することを示せ．回転の角振動数を求めよ．

10. **干渉パターン** 干渉計の別々の腕に進んできた 2 つの光の波の電場は，図 16.3 の検出器 D で それぞれの腕で $a\sin[\omega(t - L_{(x)})]$ と $a\sin[\omega(t - L_{(y)})]$ の形になる．これらが重なると（加えられると），波の強度（振幅の 2 乗に比例する）が図 16.4 で考察した干渉パターンになることを示せ．

11. [S] **ニュートン重力場のエネルギー密度** 位置が x_A, $A = 1, ..., N$ で表される N 個の質量 M_A の粒子を集めて系をつくることを考えよう．系のニュートンポテンシャルエネルギー W は，すでに集まっている粒子のつくるポテンシャルに，無限遠から持ち運ぶことによって求められる．それが

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{A \neq B} \frac{GM_A M_B}{|\vec{x}_A - \vec{x}_B|}$$

であり，質量密度 $\mu(\vec{x})$ の連続分布に対する公式が

$$W = -\frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \frac{G\mu(\vec{x})\mu(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2}\int d^3x \mu(\vec{x})\Phi(\vec{x})$$

であることを示せ．ニュートン場の方程式 (3.18) を使い，この式から $\mu(\vec{x})$ を消去し，発散定理を使って

$$W = -\frac{1}{8\pi G}\int d^3x\, [\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})]^2 = -\frac{1}{8\pi G}\int d^3x\, [\vec{g}(\vec{x})]^2 \equiv \int d^3x\, \epsilon_{\text{Newt}}(\vec{x})$$

とせよ．ここで $\epsilon_{\rm Newt}$ はニュートン重力場のエネルギー密度である．

12. 光速で進む波のエネルギーフラックスが運動量密度に c^2 をかけたものであることを示せ．運動量密度の大きさがエネルギー密度を c で割ったものであることを示せ．
13. LIGO 重力波検出器は，無次元の歪み $\delta L/L \sim 10^{-21}$ を引き起こす振動数 ~ 200Hz の重力波を検出することができる．地上に入射するこのような波のエネルギーフラックスはいくらか．もし重力波が 20Mpc の遠方からやってきたとすれば，重力波が発生したとき，発生源はエネルギーを重力波としてどれだけ速く失っているか．太陽はどれくらい離れれば電磁波で同じフラックスを作りだせるだろうか．
14. [E] 連星系 $\imath$ Boo は地球から「うしかい座」の方向に 11.7pc のところにある．（1pc= 3.09×10^{18}cm）2 つの星が互いに約 6.5 時間の周期で回りあっている．地球周辺の重力波検出器は $\delta L/L \sim 10^{-21}$ の歪みをこの発生源から検出する．地球におけるこの放射のエネルギーフラックスを**見積り**，太陽が同じ場所にあったとして，太陽の電磁波フラックスと比較せよ．**コメント：**地上で待ち受けている重力波検出器はこの重力波を検出することができない．なぜなら，波の振動数があまりに低いからであるが，宇宙の検出器にはそれができる．

第 17 章

観測された宇宙

宇宙論は，空間と時間の最も大きなスケールで宇宙の構造と進化を扱う科学の一分野である．第 1 章で述べたように，こうした大きなスケールでは重力が宇宙の構造を支配し進化を決定している．したがって一般相対性理論は宇宙論の中心にあり，宇宙論は一般相対性理論の最も重要な応用の 1 つである．

空間と時間の最も大きなスケールにおける宇宙の理解は近年，観測的，理論的ともに劇的に進んでいる．本書では，豊富な観測を詳細にわたって述べる十分な余裕はないし，宇宙の構造と進化に対して重要なすべての過程を分析するのに必要な広い範囲の物理も仮定していない．したがって，宇宙論における相対論的重力の役割に的を絞り，最も基本的な観測事実だけを紹介し，最も単純な理論的モデルを作り上げる．

次の章で宇宙論モデルを構成するために，これからの 3 節で，最も遠いスケールの宇宙に関する 3 つの基本的な観測事実を簡単に説明する：

- 宇宙は，銀河と呼ばれる重力的にまとまった物質の集団中に含まれる星とガス，それに拡散放射，未知のダークマター[1]，真空のエネルギーからできている．
- 宇宙は膨張している．
- 大きなスケールの距離で平均すると，宇宙は**等方**（どの方向でも同じ）かつ**一様**（どの場所でも同じ）である．銀河と放射，真空の密度はどこでも同じである．

17.1　宇宙の構成物

宇宙で見える物質はほとんど銀河の中に含まれている．銀河とは星とダスト（塵）の重力的に束縛された集団である（図 17.1）．典型的な銀河には約 10^{11} 個の星があり，全質量は約 $10^{12}M_\odot$ である．原理的に我々が今日関係をもつことができる宇宙の領域には銀河が非常に粗く見積もって 10^{11} 個ある（図 17.2）．もし銀河中の見える物質が最も大きなスケールまで一様に広がっていると

---

[1] この章と次の 2 章で，宇宙論の専門用語を使う．静止質量 0 の粒子（光子や重力子など）を**放射**と呼び，質量のある粒子（陽子，中性子，電子など）を**物質**と呼ぶ．非常に小さい質量をもつニュートリノは，ある状況では近似的に放射のように振る舞うことがあり，別の状況では物質のように振る舞うことがある．

これら宇宙論の章以外では，一般相対論の通常の記法や言葉を使い，この 2 種類の粒子に対して**物質**と呼ぶ．どちらにせよ，どう呼ぶかは本書において重要ではない．現代的な使用法にしたがっているだけで，混乱を意図しているわけではない．

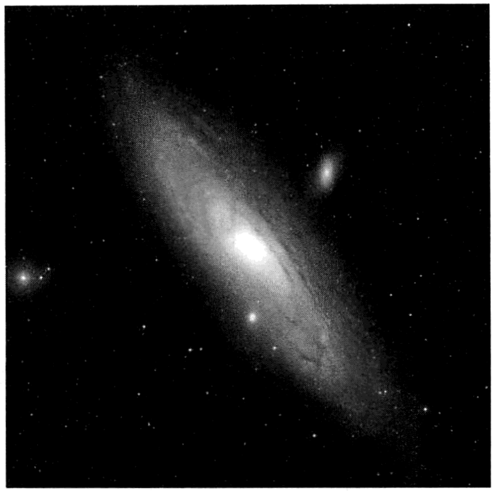


図 17.1 アンドロメダ銀河．星や塵が重力的に束縛された集団が我々に最も近い大きな銀河として存在する．中心の周りの軌道に見える星と塵を引きつける重力のほとんどは，見えないダークマターから起因する（図 17.4 を見よ）．

すると，現時点では

$$\rho_{\mathrm{visible}}(t_0) \sim 10^{-31}\mathrm{g/cm^3} \tag{17.1}$$

の密度に相当し，大雑把に言って 1 立方メートル当たり陽子 1 個があることになる．

銀河に加え，宇宙には静止質量 0 の放射も存在し，それは光子であり，たぶんニュートリノや重力波も含まれる．これらの放射は光速で進み，銀河をつくっている物質とは違い，重力的なかたまりの中には集まらない．見つかっている放射の中で最も大きなエネルギー密度を持つものは**宇宙背景放射**であり，これはホットビッグバンの名残りの電磁波である．実験は感動的なほど正確に行われ，今ではこれが 2.725 ± 0.01K の温度をもつ黒体放射であることがわかっている（図 17.3 を見よ）．黒体スペクトルによく合うことが，ビッグバンがあったことの最も強い裏付けの 1 つとなっている．このスペクトルのピークはマイクロ波域にあり，そのためこの放射は宇宙背景**マイクロ波**放射（cosmic **microwave** background, CMB）とよく言われる．宇宙背景放射の密度は，2.725K の温度をもつすべての黒体放射のように

$$\rho_r(t_0) \sim 10^{-34}\mathrm{g/cm^3} \tag{17.2}$$

である [(18.24) 式を参照]．今日のこの背景放射のエネルギー密度は銀河の物質の平均密度よりもかなり小さい．しかし，次章でみるように，宇宙の早い時期では逆になる．

宇宙の質量のほとんどが銀河内の光る物質でも，既知の放射でもないという証拠がかなり存在する．質量は直接見えなくても重力の影響を調べることで検出することができる．見えない「暗い」物質が存在する簡単な証拠は渦巻銀河の「体重測定」からわかる．渦巻銀河（図 17.1）は中心核の周りを回転する星と塵の円盤からできている．水素の 21cm の輝線のドップラー偏移を測定するこ



図 17.2 ハッブル深宇宙．我々が銀河宇宙に住んでいることを実感させるものはハッブル宇宙望遠鏡のこの画像以外ない．この画像はちょうど満月で張られる角度の 1/30 の宇宙の狭い領域を写しており，我々の銀河の前景の星がたった数個ほどしか入らないような狭い領域である．しかし，写真には，遠い距離を長い時間かけてやってきた光によって表されるかなり暗い銀河がある．遠い銀河からの光は，ビッグバン後 10 億年（現在の宇宙年齢の 6%）以内に放たれたものもあるかもしれない．

とで，円盤のガス雲の速度地図を中心から距離 r の関数として描くことができる（図 17.4）．半径 r の速度 $V(r)$ がその半径の内側の質量 $M(r)$ と

$$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{V^2(r)}{r} \tag{17.3}$$

の関係があると思うだろう．質量のほとんどを含んでしまう半径の外側で $V(r)$ は $r^{-1/2}$ のように減少するだろう．しかし，実際はそのように見えない．むしろほとんどの場合，$V(r)$ は測定できるところまではほぼ一定のままである（たとえば図 17.4 を見よ）．このことは，銀河のない外側で

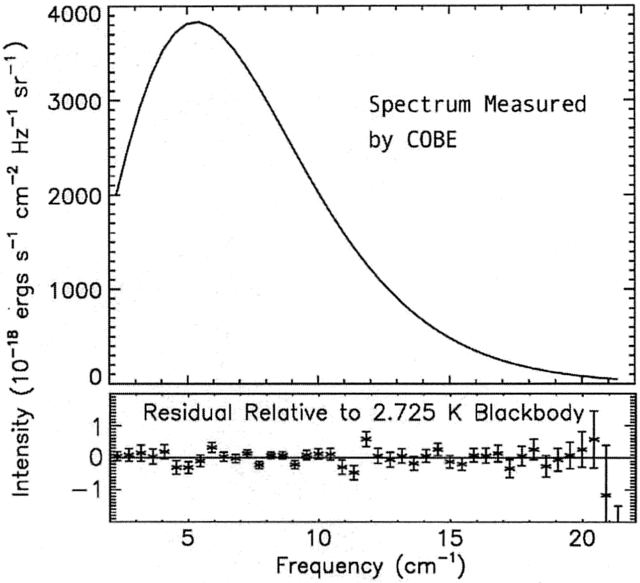


図 17.3 COBE 衛星の FIRAS 分光測光計によって観測された宇宙背景放射のスペクトル (Fixsen et al. 1996). 横軸は, センチメートルの逆数の単位で表した周波数である. 縦軸は単位時間, 単位面積, 単位立体角, 単位周波数のエネルギーで測った強度である. 下のプロットは観測強度と 2.725K の黒体放射分布によって予測されたものとの差を誤差棒とともに示している. 上のプロットはデータにプランク放射法則を合わせたものである. 上下のプロットにおける強度のスケールの差によく注意してほしい. 上のプロットの誤差棒は線の太さよりも小さい. このスペクトルは地上で行われたどの実験よりもプランク黒体放射のスペクトルによく合っている.

さえも, $M(r)$ は $\propto r$ のように増えていることを表しているようだ. 率直に推測すれば, ほとんどすべての銀河は, 暗く見えない物質を, 光で見える物質のたぶん 10 倍以上含んでいることになる.

見える物質と検出されている放射が宇宙の質量のうちごくわずかしか占めていないこと (たぶん数パーセント) の証拠はまだ他にたくさんある.「失われた質量」の性質は宇宙の重要な課題である. ブラックホールから暗い星, その他の重力的に集まった塊から新種の粒子まで, 思索は広げられる. 真空でさえもエネルギー密度がある. ニュートン力学において, 定数をポテンシャルエネルギーに加えても, 運動方程式は変わらないため, 観測には何の効果も現れない. しかし一般相対論では, **すべての**エネルギーは時空を曲げ, 一定の真空エネルギーによって作られた曲率でも発見できる. もし空間がエネルギー密度をもてば, 宇宙膨張に現れる効果を調べることによって知ることができる.

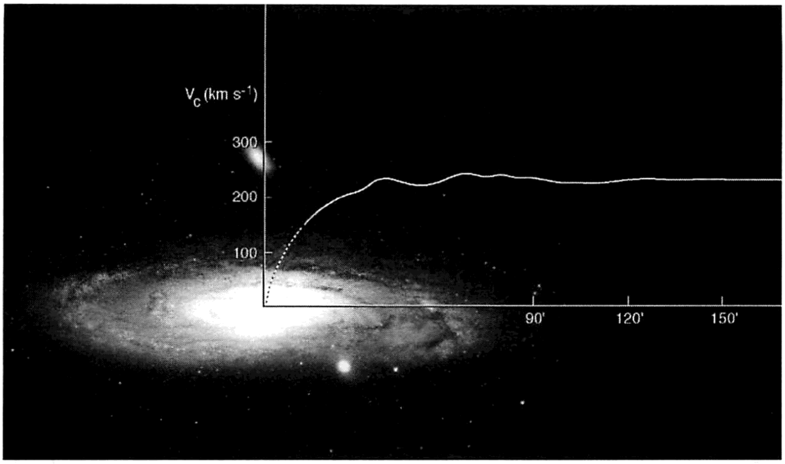


図 17.4 アンドロメダ銀河（M31）の回転曲線（Cram et al. 1980）．水素の 21cm の輝線のドップラー偏移の地図を描くと，銀河中の星の回転速度を中心からの距離 r の関数としてほぼ決めることができる．ここでは距離 r は地球からみた角度間隔を分角で測定してある．中心に質量のほとんどが集中していると，r が大きくなると $\propto r^{-1/2}$ のようには小さくなるはずなのだが，この回転曲線は他の多くの銀河と同じく，そうなっていない．見える物質の回転曲線がわかるレベルでは，内側の質量はまだ r とともに増えている．これは，ダークマターのハローが見える物質よりもたぶん 10 倍重いことの証拠である．

17.2 膨張宇宙

局所銀河群の外の銀河からでた星の光は図 17.5 で説明したように赤方偏移を受ける．平坦時空におけるドップラー効果と解釈すると，この赤方偏移から，局所銀河群外の銀河はすべて我々から離れていることがわかる．その速度 V と波長における偏移 $\Delta\lambda/\lambda$ の関係はドップラー効果の公式

$$V/c = \Delta\lambda/\lambda \equiv z \tag{17.4}$$

によって与えられる．ここで天文学で通常使われる記号 z を使い，$V \ll c$ を仮定した．

距離が測定できるような十分近い銀河に対して，後退速度 V と距離 d の間に単純な線形関係が観測され，ハッブルの法則と呼ばれる：

$$V = H_0 d \tag{17.5}$$

ハッブルの法則

定数 H_0 はハッブル定数と呼ばれ，これからすぐ述べる観測から決められ

$$H_0 = 72 \pm 7 (\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc} \tag{17.6}$$

ハッブル定数

となっている．ここで使われている距離の単位 メガパーセク（Mpc）は銀河間距離に対し，習慣的に使われている．1 パーセクは $3.09 \times 10^{18}\mathrm{cm} = 3.26$ 光年であり，1 メガパーセクは 100 万パー

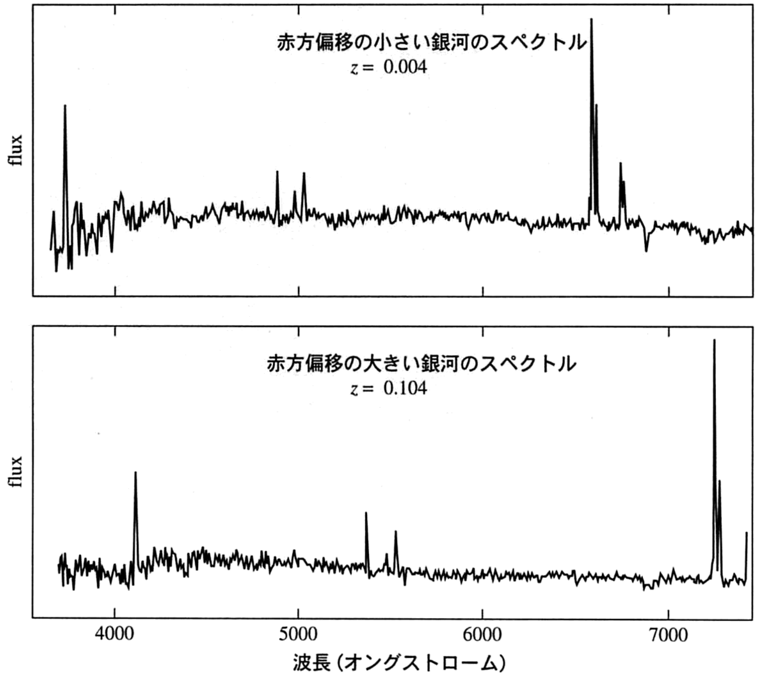


図 17.5 宇宙論的赤方偏移．2 つの銀河のスペクトルが受信強度と波長をオングストロームの単位（1 オングストローム $= 10^{-8}$cm）のプロットとして示されている．2 つのスペクトルの明るい輝線は $\Delta\lambda/\lambda \equiv z = 0.1$ ずらしたとき一致する．これが宇宙論的赤方偏移である．

セクである．宇宙論的な距離のスケールについて，よりよい感覚を身に付けようとすれば，ボックス 17.1 を見よ．

銀河が我々から後退しているということは我々が宇宙の中心にいることを意味しない．実際，ハッブルの法則は，膨張から中心を知ることができないことを示している．別の銀河の観測者は，同じ定数 H_0 のハッブルの法則にしたがって，すべての銀河が彼らから遠ざかっていることを見るだろう．これは図 17.6 の図から定性的に知ることができる．

より定量的に，ハッブルの法則をベクトル形式で書こう：

$$\vec{V} = H_0\vec{d} \tag{17.7}$$

ここで $\vec{d}$ は我々から銀河までの変位ベクトルである．位置 $\vec{d}_{\text{them}}$，速度 $\vec{V}_{\text{them}}$ の銀河を考えよう．この銀河の観測者は，我々には速度 $\vec{V}$ に見える銀河に対して $|\vec{V}| \ll c$ を仮定すると，速度 $\vec{V} - \vec{V}_{\text{them}}$ に測定される．(17.7) 式から

$$\vec{V} - \vec{V}_{\text{them}} = H_0(\vec{d} - \vec{d}_{\text{them}}) \tag{17.8}$$

である．しかし $\vec{d} - \vec{d}_{\text{them}}$ はその銀河の変位ベクトルである．したがってその銀河の観測者は我々と同様 (17.5) 式に支配される宇宙膨張を見ることになる．どの銀河も膨張の中心にない．

ボックス 17.1 宇宙論の距離スケール

宇宙論で用いられる距離スケールの大雑把な感覚を身に付けることを意図して，地球からの距離のリストを挙げた．距離は**パーセク**で引用した．宇宙論で標準的な距離の単位（$1\text{pc} = 3.09 \times 10^{18}\text{cm} = 3.26$ 光年，単位の起源については図 17.7 を見よ）である．しかし，スケールの範囲は，マイクロパーセク（μpc），パーセク（pc），キロパーセク（kpc），ギガパーセク（Gpc）のようなものを使うと便利である．この表の数値はすべて粗いオーダー評価で，典型的なスケールを引用している場合（∼ で示した），数値の範囲は 1 桁大きくなることがある．

- 太陽までの距離　5μpc
- 最も近い星までの距離　1 pc
- 銀河中心までの距離　10 kpc
- 約 30 個の銀河からなる局所銀河群にある銀河までの距離（例えばアンドロメダ 725kpc）　50-1000 kpc
- 最も近い大きな銀河団までの距離（数千個からなるおとめ座銀河団）　20 Mpc
- 銀河の分布の中で最も大きな構造までの距離　∼ 100 Mpc
- 見える宇宙の端までの距離　14Gpc

ハッブルの法則は赤方偏移と距離の現象論的な関係である．近傍の銀河の重力から生じる固有の速度を膨張速度が凌ぐほど遠くにある銀河に対してこの法則は成り立つ．しかし，時空曲率の効果が重要になったり光が我々に届くまでに宇宙が大きく膨張してしまうほど遠くてはいけない．ハッブル定数はこれらの基準を満たす銀河の赤方偏移と距離を測定することで推測される（これらが成り立たない赤方偏移のときは次章で考察する）．以下では，距離がどのように決められるかを少しだけ詳しく述べる．

ハッブル定数を決めるのに必要な銀河までの距離を測定することは容易なことではない．近傍の銀河までの距離は正確に決められる．しかし，宇宙論的赤方偏移は，近傍にあると思われる他の銀河の引力による局所運動を後退速度が上回るほど十分遠方にある銀河に対してのみ正確に測定でき

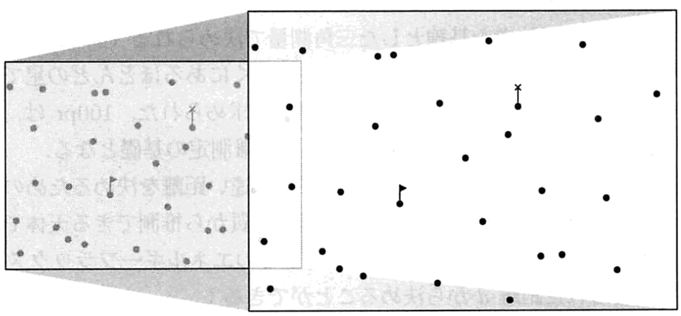


図 17.6 右の点のパターンは，点の大きさをそのままにして左のものを約 20% 倍膨張することで得られる．左のボックス内の点に注目せよ．たとえば，旗がついている点について，いくつかの他の点までの距離を測れ．これらの距離は右のボックスで 20% 増加している．別の銀河を選び，たとえばバツがついているものを選び，同じ測定をすると，同じだけ増えていることがわかる．各銀河の観測者は他の銀河までの距離が増加していることを知るが，どの銀河も膨張の中心にはない．コピー機を使うとあなた自身で膨張させることができる（問題 6）．

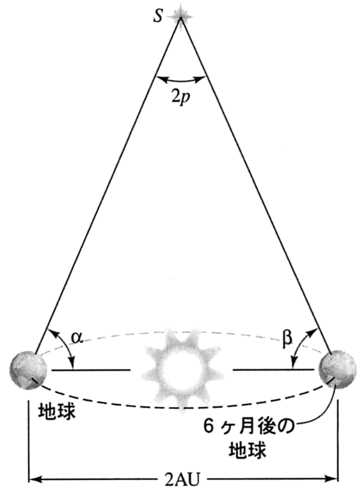


図 17.7 地球の軌道を基線とした三角測量によって近くの星までの距離を決めることができる．星の位置の角度は地球の軌道上の 2 点から観測し，角度 α と β を求め，$2p \equiv \pi - (\alpha + \beta)$ の関係から**視差**が求められる．実際そうなのだが角度が小さいと，距離は $d = (AU)/p$ となる．天文学単位 AU は地球軌道の軌道長半径である（もし p を秒角の単位で表すと，パーセクの距離は $d = 1/p$ になる．これがこの単位のもともとの定義である）．ヒッパルコス衛星によって約 1 万 5 千個の星が 10 ミリ秒角の視差で 10% より精度よく測定された．したがって太陽系近傍の 100pc のオーダーの距離まで探査された．この図はかなり強調されて描かれている．最も近い星である α センタウリまでの 7 万 AU の距離でさえも，このページにサイズを合わせると，点 S はさらにこの上 数キロメートルにあることになる．

る．以下の議論で，近い距離が遠い距離とどのようにつながるかを非常に単純化して述べる．

近くの星までの距離は地球軌道を基線とした三角測量で決められる（図 17.7）．ヒッパルコス衛星は約 12 万個の星の距離を決めた．これらは太陽系の近くにあるほとんどの星で，そのうち太陽から 100pc 以内にある約 1 万 5 千個が 10% 以上の精度で求められた．100pc は，見える宇宙の大きさの 10 万分の 1 より小さいが，これらの距離が他の距離測定の基礎となる．

三角測量で知ることができるこれらの星を超えてさらに遠い距離を決めるための鍵となるものは**標準光源**のアイディアである．標準光源は光度が物理的性質から推測できる天体である．星を例としよう．近くの星の光度 L は見かけの明るさ f（地上でのエネルギーフラックス）と逆 2 乗則を三角測量によって決められた距離 d から決めることができる：

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{17.9}$$

フラックス f を測定し，距離 d を知れば，光度 L が推定できる．

ある青色の星の距離が決められて，すべて**同じ**光度であることがわかったとすると，青い星は標準光源となりうる．近傍の青い星の三角測量によって基準が決まり，星の色がわかってしまえば，光度はわかる．直接測定することができないような遠い星の距離は逆 2 乗則を逆に使えばわかる．

フラックス f を測定し，光度 L を知れば，距離 d が推定できる．残念だが，青い星はよい標準光源ではない．光度は年齢と組成によって変化する．距離はしごのアイディアも同じである．第一段階の距離を使って標準光源を基準化し，次の段階の距離決定に使う．

宇宙論的な距離の本当の物語は，さまざまな種類の標準光源に基づいてさまざまに相互関連し合うはしご間の整合性の中にある．ここですべてを語るのは無理である．最も遠い距離に到達する 3 ステップのはしごを記述することによって，そのアイディアを説明することにする．

この考察の準備として，ここで光度と見かけの明るさを天文学的に測定する方法の説明をするのがちょうどよいだろう．天文学者は光度とフラックスの対数的測定を使い，それぞれ**絶対等級**と**見かけの等級**と呼んでいる．これらがどのように正確に定義されるのかには複雑な事情があるが，そこには立ち寄らず，本書の目的に対しては以下の関係で与えられるものとしておく．**絶対等級** M は全光度 L と

$$M = -2.5\log_{10}(L/L_\odot) + 4.74 \tag{17.10}$$

の関係がある．ここで $L_\odot$ は太陽光度 3.85×10^{33}erg/s である．観測されるいろいろな波長域の光度を測定するために，いろいろな種類の等級がある．見かけの等級 m はフラックス f と

$$m = -2.5\log_{10}(f/f_{\odot\ \mathrm{at\ 10pc}}) + 4.74 \tag{17.11}$$

の関係がある．ここで $f_{\odot\ \mathrm{at\ 10pc}}$ は，地球が太陽から 10pc 離れていたとしたときの地球における太陽のフラックスであり，$3.21 \times 10^{-7}\mathrm{erg/(cm^2 \cdot s)}$ である．天体の見かけの等級は 10pc 離れたときの絶対等級と等しい．差 $m - M$ は f/L の対数測定値である．これを **距離指数** という．それは，もし空間が平坦であれば，$m - M = 5\log_{10}(d/10\ \mathrm{pc})$ となるからである．d は遠く離れた距離である．これは天文学的記法で表した平坦空間の逆二乗則版である．

我々はここで 3 つの異なった標準光源を述べる．それら 3 つで，遠い銀河への距離はしごを構成し，ハッブル則を較正する．

- **主系列**　すでに述べたように，個々の星の色はよい標準光源とならない．しかし，光度と色の関係に現れる統計的な性質は標準光源として使うことができる．図 17.8 は約 1 万 4 千個の星について調べた光度と色の関係のプロットである．これらの距離はヒッパルコス衛星で距離が正確に決められており，見かけの明るさから光度を推測するのに使われる．主系列は左上から右下に伸びる帯状の領域であり，水素を燃やしてヘリウムに変える星からなっている．三角測量で測れないほど遠くの星団にある星について見かけの明るさと色を測定することを考えよう．星団にあることで物理的に連想されることは，その星がすべてほぼ同じ距離にあるということだ．推測された星団の主系列が三角測量で決められた主系列と一致する距離が星団までの距離である．三角測量で距離が決められた星の測定量は標準光源（主系列）の基準を決め，それを使ってさらに遠い星団までの距離決定を行う．
- **セファイド変光星**　セファイド変光星は重く明るく黄色い星であり，表面温度は太陽とあまり違わないが，光度はかなり大きい．近くの銀河中のセファイド変光星の光度は距離はしごの前段階で決められた距離から求められる（セファイドの視差距離も少し求められている）．セファイドの絶対光度と変光周期の間には経験的関係があり，よく成り立つことがわかっている．それらを図 17.9 に示した．この相関関係からセファイド変光星を標準光源とするこ

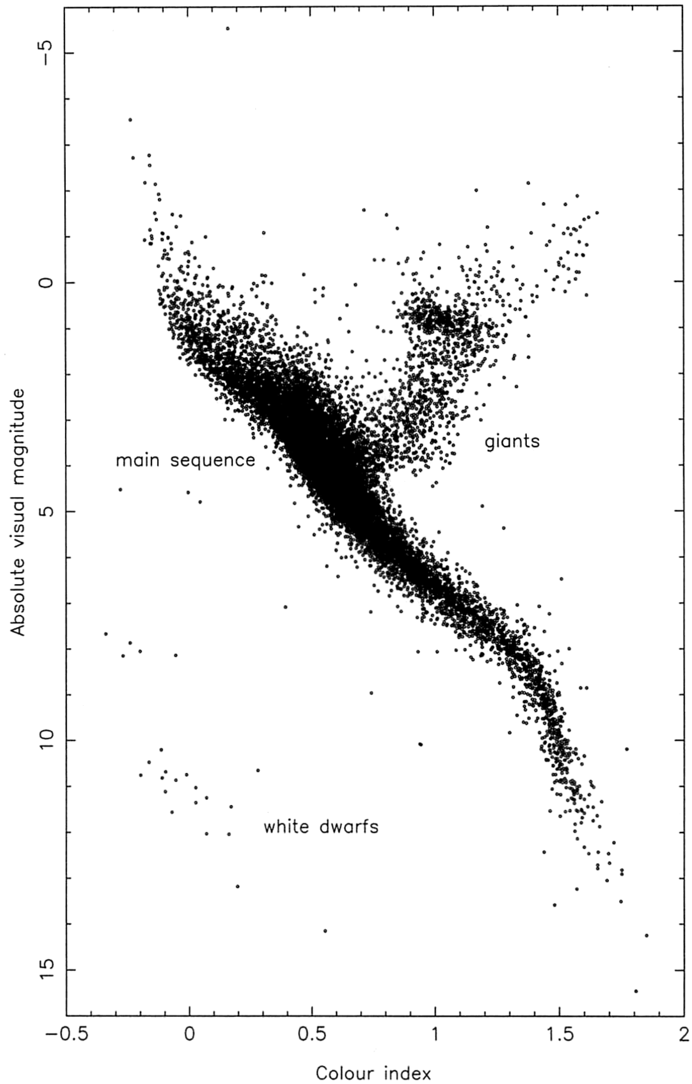


図 17.8　主系列のヘルツプルング–ラッセル図．太陽近傍の約 1 万 4 千個の星の光度と色の関係を示している．それらの距離はヒッパルコス衛星で視差から求められた（図 17.7 を参照）．星の光度は (17.9) 式の逆 2 乗則を使って，距離と見かけの明るさから推測される．縦軸は絶対可視等級の単位で測った可視光あたりの波長の範囲の光度である．この光度の対数的な測定量は (17.10) 式と似ているが，波長域が限られているところが違う．横軸は星の色で，表面温度のようなものである．青く熱い星は左に，赤く冷たい星は右にある．太陽の絶対可視等級は 4.82 であり，色指数は 0.88 である．主系列は左上から右下に伸びる帯状の領域であり，水素を燃やしてヘリウムに変える星からなっている．

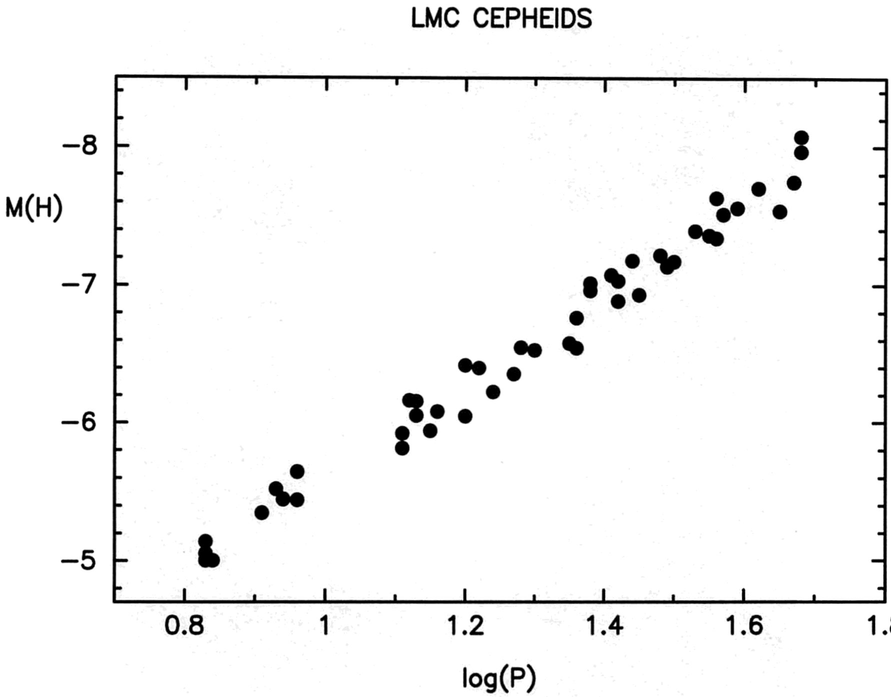


図 17.9 大マゼラン雲のセファイド変光星の周期光度関係（Persson et al. 2002）．大マゼラン雲は銀河系の衛星銀河である．1.6μm 辺りを中心とする赤外 H-band の星の絶対等級と周期の対数（底は 10 で，真数は日の単位）の関係である．周期と光度の相関関係からセファイド変光星を標準光源にできる．セファイド変光星の光度は周期から決めることができ，距離は逆 2 乗則を使って光度と見かけの明るさから決められる．

とができる．色と変光があることがわかれば，周期と見かけの明るさの測定からそこまでの距離を推測することができる．主系列によりセファイド変光星を較正して使えば，星団の主系列では遠くて決められないような銀河までの距離を求めることができる．同じように，セファイド変光星は距離はしごの次の段階の基礎となり，ずっと明るい天体の絶対光度を較正できる．

- **超新星 Ia 型**　超新星は星の破滅的な爆発であり，明るさのピークはそれが所属する銀河に匹敵する（図 17.10）．したがって遠い銀河にあっても検出可能である．典型的には 2,3 週間かけ明るさのピークに達し，数ヵ月かけてゆっくり暗くなって見えなくなる．爆発にはいろいろな機構があり，いろんな種類がある．
  最も明るい超新星は重い星が熱核反応の燃料を使い果たして重力崩壊するのであるが，超新星 Ia 型（SNIa）はそうではない（第 12 章の初めの考察を思い出せ）．Ia 型は，普通の星と相互に回り合っている白色矮星に普通の星から質量が降り積もった結果起きる．白色矮星の質量が，電子の縮退圧が支えられる最大質量に近づくと（239 ページのボックス 12.1 を見

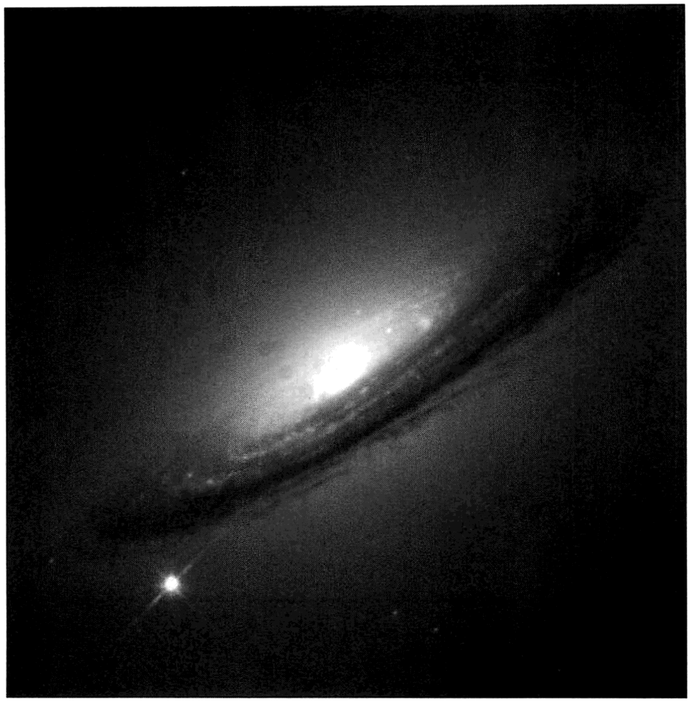


図 17.10　NGC4526 銀河の外側の超新星 1994D．超新星 Ia 型の例は，ピークの明るさで銀河のコアと競合している．これが遠くでも超新星を見つけることができる理由である．ほぼ 20Mpc 離れたところにあり，宇宙の距離スケールでは「近傍」にある．この超新星は何年前に爆発したのだろうか．

よ.）強力な核燃焼波が巻き起こり完全に星を破壊するほどのエネルギーを解放し，爆発が起きる．白色矮星の最大質量は決まっている（$\approx 1.4M_\odot$）ので，1 つの SNIa と別の SNIa には基本的な機構に類似性があり，そしてその 1 つがピークの明るさである．
セファイド変光星から距離が知られている銀河で SNIa 型の超新星爆発が起きれば，ピークの光度は見かけのピーク等級から決められる．SNIa のピークの輝度は似ていて，ピークの明るさと，明るさが減衰していく時間の間には経験的にかなり強い相関が存在する．したがって SNIa は標準光源として使える．ピークの明るさと減衰時間の関係がセファイド変光星で較正されると，セファイド変光星が観測される領域を超えて距離を広げることができる．

この詳細な天文学的三段階の距離スケール結果を図 17.11 に示した．超新星 Ia 型標準光源によって決められた銀河を使って求めた銀河距離と後退速度のプロットである．明らかな線形関係からハッブル定数 H_0 が 72 ± 7(km/s)/Mpc に決まる．どれくらい速く宇宙が膨張しているのかを表している．

それほど遠くない銀河から H_0 が決まってしまうと，ハッブルの法則を使ってずっと遠い天体ま

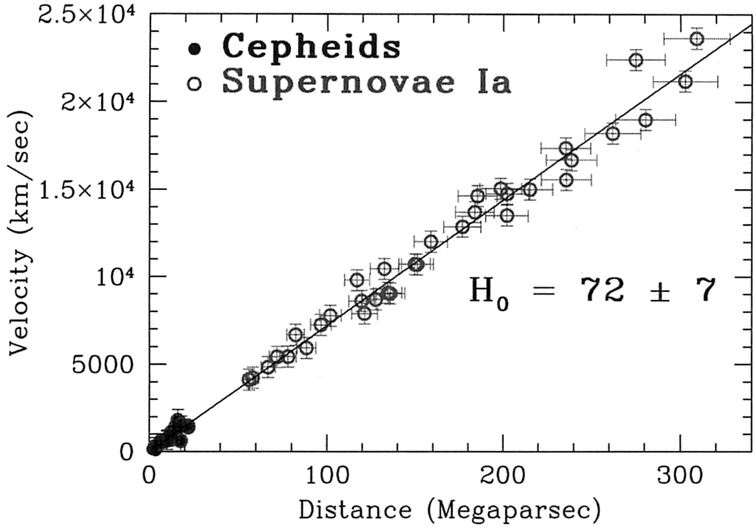


図 17.11　ハッブル図（Freedman et al. 2001）．この図は，超新星爆発 Ia 型の測定で決まった距離に対して，赤方偏移から決まった銀河の後退速度をプロットしたものである．近い銀河は超新星 Ia 型とセファイド変光星の観測の両方を含み，左下の黒丸で表されている．これらの銀河の距離はセファイド変光星で決められ Ia 型の超新星を標準光源として較正するのに使われる．この関係からさらに遠い超新星 Ia 型（白丸）までの距離を決める．速度と距離には線形関係があり，これからハッブル定数は $H_0 = 72 \pm 7 \mathrm{(km/s)/Mpc}$ となる．

での距離を決めることができる．赤方偏移を測定すると，(17.4) 式から後退速度，(17.5) 式から距離を決めることができる．さらに遠い距離には，赤方偏移を距離の目安として使えるが，ハッブルの法則に宇宙の曲率と時間発展の補正を行わなければならならず，これは第 19 章で行うことする．

17.3　宇宙の地図

宇宙の検出可能な物質と放射は大きな距離スケールでどのような形をしているのだろうか．形は時間とともにどのように変化するのだろうか．このような問いに答えるためには，宇宙における物質と放射の位置と分布の地図をつくらなければならない．しかしこれは容易なことではない．距離は莫大であり，時間は長い．我々はビッグバン後約 130 億年に生きている．大雑把にいえば，原理的には光によって宇宙の中のせいぜい直径 260 億光年（$\sim 10^{23}$km!）の領域を観測できることになるだろう．これらの地図から，宇宙は大きなスケールで**等方**であり（どの方向も同じ），**一様**である（どこも同じ）という証拠を受け入れざるを得なくなる．

等方性の証拠

・放射の地図

つくるべき最も直接的な地図は，空の角度スケールの物質の特性をとらえた地図である．その中で最も重要なものは宇宙背景放射の温度地図である．

ハッブル膨張を速度一定のまま時間を遡ると（**ハッブル時間**）

$$t_H \equiv 1/H_0 \sim 140\,\text{億年} \tag{17.12}$$

の時間で銀河間の距離が 0 になる特異状態にたどり着く．もちろん速度一定のまま遡ることが可能であると信じる理由はどこにもない．銀河の速度は重力の法則にしたがって時間とともに変化するからであり，このような初期に銀河が存在していたと信じる理由もない．しかし，実は，次章で見ることになるが，一般相対論がまさにこのような時間でこのような特異点があることを**確かに**予言している．これがビッグバンであり，無限大の密度，無限大の温度，無限大の時空曲率を持っている．この初期では，物質と放射は銀河中に凝縮されておらず，温度で特徴づけられる滑らかで熱い流体の中で互いに平衡状態にあった．

宇宙が膨張するにしたがって，物質と放射は冷えていく．ビッグバン後数十万年過ぎると温度が下がり自由電子は原子核と結合して中性で透明な物質になる．そのほとんどが水素とヘリウムである．温度がほぼ 3000K になった時期，放たれた光はそれ以来宇宙を旅し，我々に届き宇宙背景放射として観測される．たどりつくまでの間 膨張により温度は絶対零度より少し上の 2.73K にまで冷えている．空におけるこの放射の温度地図はビッグバンの宇宙として思い描けるものに近い．図 17.12 は COBE（Cosmic Background Explorer, 宇宙背景放射探査衛星）の観測から得られた宇宙背景放射の 3 つの温度スケールを示したものである．一番上の図はミリケルビンより上の分解能で見た温度分布を表している．2.73K では完全に一様である．次の図はミリケルビンの解像度で見た同じデータを表している．放射がほとんど完全に一様等方に見える慣性系に対して我々が運動することで生じるドップラー偏移による非等方性である．この運動の効果は一番下の図では取り除かれており，この図の解像度はマイクロケルビンである．中心を横切っているのは我々の銀河からの放射である．それを取り去った残りの部分に 10 万分の 1 の揺らぎが見える．初期宇宙の等方性はかなりなものであり，どの方向でも同じである．しかし，厳密な等方性からのずれは重要である．それらは現在までに重力により成長し，今日我々が目にする銀河になった密度揺らぎだからだ．

・物質の地図

宇宙背景放射の温度地図から非常に初期の宇宙像がわかるのと同様に，銀河の角度位置の地図は今日の宇宙の地図となる．図 17.13 は APM 探査（Automatic PlateMachine survey）によって得られた銀河の地図を表している．非常に広い領域を小さい区画に分け，ある明るさの基準を超える銀河の数を各区画で数える．この図では図 17.12 よりずっと多くの構造が見える．これは集合するという重力の作用により宇宙背景放射の放出の時刻と現在までにできた構造である．しかし大きなスケールで平均すると，この図はどの方向もほとんど同じである．今日の宇宙は等方である．

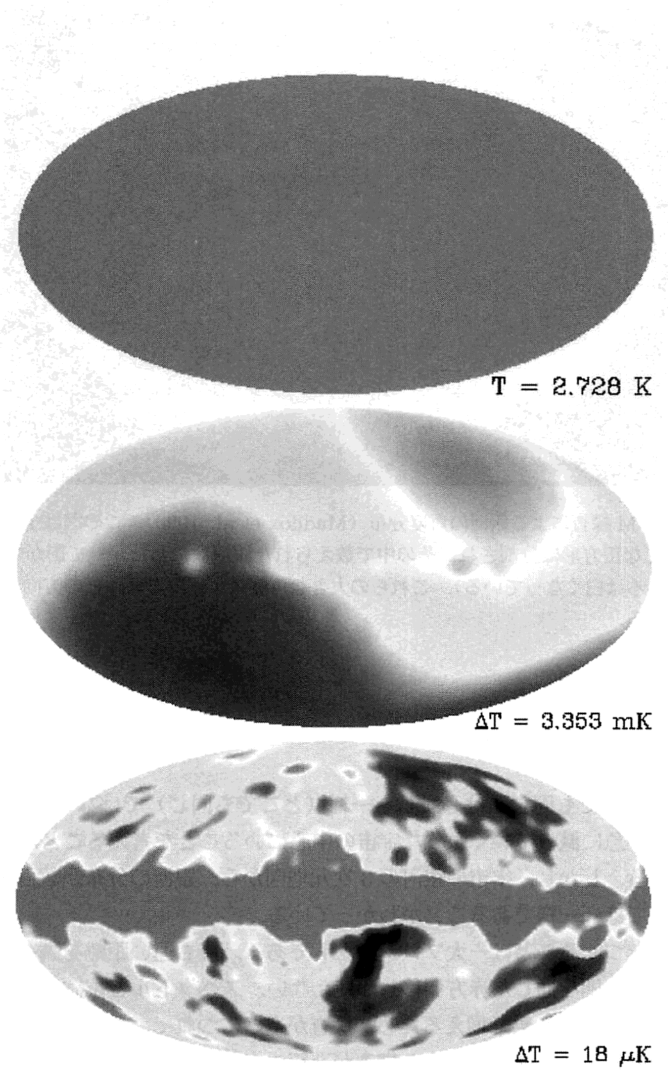


図 17.12 COBE 衛星によって測られた宇宙背景放射の温度（Bennett et al. 1996）．温度スケールの違う 3 つの地図を示した．地図は銀河座標で表されており，銀河面が赤道となっている．一番上はミリケルビンより上の温度解像度の地図である．温度は 2.73K で完全に一様である．真中の地図はミリケルビンの解像度の温度のものを表している．宇宙背景放射の静止系に対して太陽系が運動していることによる双極子非等方性がある．この非等方性が取り除かれると，下の図が得られる．ここにはマイクロケルビンの解像度でも残っている非等方性が現れている．中心を通る暗い帯は銀河からの放射によるものである．その残りの光の変化は放射が放出された時期にあった揺らぎに対応し，これはビッグバンから数百年後のものである．

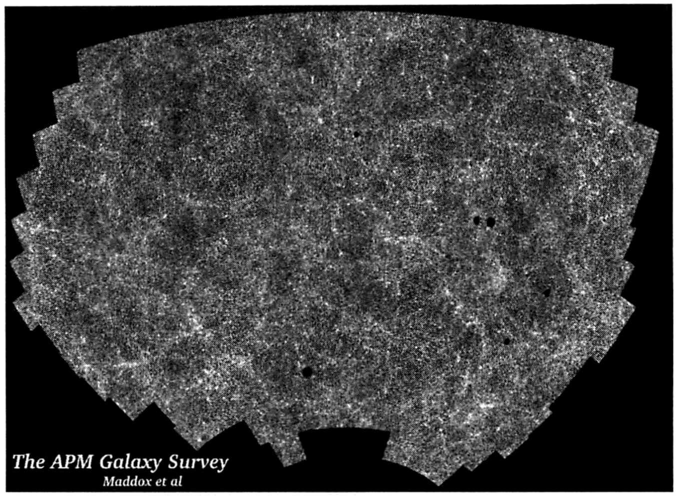


図 17.13　APM 探査による銀河の角度分布（Maddox et al. 1990）．この図は全天のほぼ 1/4 であり，小さな正方形に分割され，その中で数えられた銀河数にしたがって影がつけられている（多いところは白くなっている）．これらの大きな角度スケールでは，どの方向の銀河の数もほぼ同じである．

一様性の証拠

等方宇宙（どの方向でも同じ）は必ずしも一様（どこでも同じ）ではない[2]．たとえば我々から離れると銀河密度が急に減っていくような宇宙の中心にいることを考えることができ，この分布は等方のように見える．しかし，宇宙の銀河の 3 次元地図から，銀河の分布が数百メガパーセクを超える距離スケールでほぼ一様であることがわかっている．

このような地図をつくることは一大プロジェクトである．最も遠い距離を調べるためには，距離の指標としてハッブル則を通じた赤方偏移しか使えない．スペクトルと位置が非常に多くの銀河に必要である．個数は距離の 3 乗で増えるため，探査が進むにつれて，たくさんの銀河が測定されるようになる．本書の執筆時に 2 つの大きな探査が進行中で，それは 2dF 探査と Sloan Digital Sky 探査である．2dF 探査の初期段階の結果が図 17.14 である．確かにこの分布に構造があるのがわかる．小さなスケールでは，銀河が集中しているところに結び目やフィラメントがあり，少ないところにはボイドがある．しかし大きなスケール–z が 0.02 以上の差–では分布の内側にある 1 つの領域と他の領域はほとんど同じである．これは，大きなスケールで宇宙が一様であることを受け入れざるを得ない証拠である．我々は特別な場所にいないようである．

[2] 一様宇宙も必ずしも等方ではない．ある種の銀河がある一方向に運動していることが観測されたとしよう．その速度は宇宙がどこでも同じだが，宇宙に特別な運動の方向ができる．

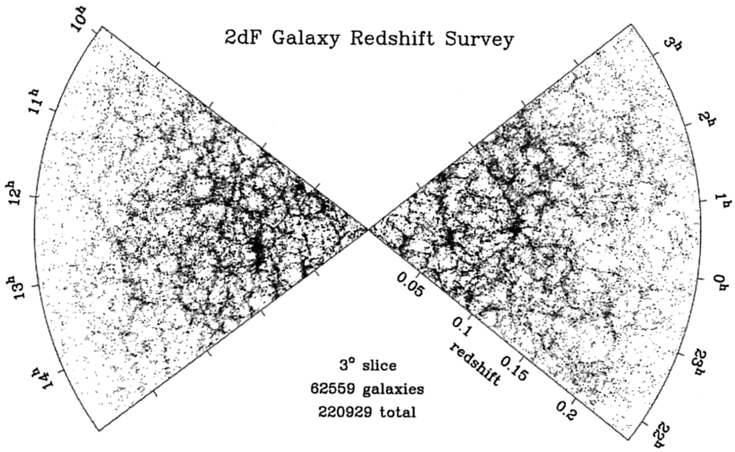


図 17.14 2dF 赤方偏移探査．これは 2dF 銀河赤方偏移探査（Colless et al. 2001）で角度位置と赤方偏移が測定された銀河 220929 個のうち，62559 個の位置の地図である．半径方向の位置はハッブル則にしたがう赤方偏移の単位である．大きな赤方偏移では銀河がまばらになっているように見えるかもしれないが，それは選択効果にすぎない．遠くでは明るい銀河だけが見えるので，大きな赤方偏移で見える銀河数は小さい赤方偏移で見える銀河数よりも少ない．内側の領域では，探査は完全に近く，ボイドやノット，フィラメントがあるのがわかるが，大きなスケールで，銀河の分布は宇宙のある部分とその他の部分とでほとんど同じである．これが一様性である．

問題

1. 赤方偏移 $z = \Delta\lambda/\lambda$ が 0.2 の銀河がある．ハッブル定数を 72(km/s)/Mpc としてハッブル則にしたがうと，光が放たれたとき銀河はどれだけ離れていたことになるのか．
2. [E] $0.005''$ より大きな視差が太陽系からそう遠くないところの星 120000 個で測られている．太陽近傍で立方パーセク当たりの星の数を評価せよ．
3. [P] プランクの放射法則から，小さい振動数幅 $d\omega$ で，小さい立体角 $d\Omega$ に対して垂直方向から小さい面積 dA を通って短い時間 dt 内に入射する温度 T の黒体ガス中のエネルギー dE が決まり，それは

$$dE = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_BT)-1}dtdAd\Omega d\omega$$

である．図 17.3 の上の図のデータが黒体スペクトルに合うと仮定して，放射の温度を求めよ（図 17.3 にプロットされた振動数は $\omega/2\pi c$ であることに注意せよ）．（**ヒント**：この問題を解くにはいくつかの方法があるが，容易な方法を使え）

4. [E] アンドロメダ銀河（M31）までの距離は 725kpc である．図 17.4 のデータを使って，アンドロメダ銀河の中心から $150'$ の球面内の質量を $M_\odot$ の単位で求めよ．

5. [E,S] 図 17.14 の 2dF 探査のデータを用いて宇宙が近似的に一様であるようなスケールを評価せよ．
6. **コピー機による膨張**　宇宙膨張に中心は存在しないことの実演として，図 17.6 に関係した以下の実験を行え．OHP で使うようなトランスペアレンシーをもってきて，図 17.6 のボックス中の 1 つのように銀河を表す点をほぼ一様に打って覆う．これらの点を別のトランスペアレンシーに 20% 拡大してコピーする（実在の銀河は大きさが膨張しないだろう．したがって点の膨張は無視する）．トランスペアレンシーを並べ，膨張後の 1 つの銀河の位置が以前の位置の上になるようにする．他の銀河は外向きに運動しているように見えるだろう．同じことを別の銀河でも試す．どう見えるだろうか．
7. 見かけの等級が 3.9 の太陽によく似た星があり，その星の近くから発信された電波信号が受信された．この信号はいつ発信されたか．
8. ある遠い星団の主系列は，(見かけの等級) $=$ 6(色指数) $+$ 18 の関係でよく合わせられる．それらの星が太陽近傍のものと同じであると仮定すると，この星団はどれくらい離れているか．
9. セファイド変光星が見かけの等級 22, 周期 25 日で観測された．この星までの距離を求めよ．

第 18 章

宇宙モデル

前章で述べた観測から，我々の宇宙が数百メガパーセクの空間スケールで近似的に一様等方であることがわかる．最も単純な宇宙モデルはこれらの対称性を第一近似として強いる．たとえば，銀河の物質と放射は，空間中で厳密に一様で滑らかな密度分布によって近似される．同様に，時空の幾何学は空間の一様性と等方性を厳密に組み込む．単純化の仮定をして**フリードマン–ロバートソン– ウォーカー**（FRW）宇宙モデルの族を定義する．これがこの章のテーマである．

18.1　一様，等方時空

一様等方宇宙モデルの時空幾何学から始めよう．一様等方時空の幾何学は空間のどの点の周りでも球対称（等方）で，他の点と同じ（一様）である．一様性と等方性は**空間**の対称性のことで，**時空**のことではない．一様等方時空は，3 次元空間的スライス上の 3 次元幾何学が一様等方であるものの族である（4 次元時空中の 3 次元スライスとして見た空間的曲面は 7.9 節で考察した）．

平坦ロバートソン–ウォーカー計量

一様等方宇宙論幾何学の最も簡単な例は線素

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)} \tag{18.1}$$

平坦 FRW モデルの線素

によって表される．ここで $a(t)$ は**スケールファクタ**と呼ばれる時間座標 t の関数である．計量 (18.1) は一様等方宇宙論モデルである．時空が $ds^2 = -dt^2 + dS^2$ のように時間と一様等方空間幾何学 dS^2 にわけることができるからだ．$t =$ 一定の空間的な面の幾何学は線素

$$dS^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{18.2}$$

によって表される．どんな瞬間 t でも (18.2) 式が $dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ の形になるように，新しい座標 $X = a(t)x$, $Y = a(t)y$, $Z = a(t)z$ をとることができる．各 $t =$ 一定の空間スライスの幾何学は平坦 3 次元空間であり，一様等方性がはっきりしている．(18.1) 式は**平坦ロバートソン–ウォーカー計量**と呼ばれる．これは時空が平坦というわけではなく，空間スライスの幾何学が平坦だからだ．スケールファクタがアインシュタイン方程式を満たすと**フリードマン**–ロバートソン–ウォーカー（FRW）モデルになる．

FRW モデルの銀河と放射の分布は滑らかに均され**宇宙論的流体**になる．個々の銀河はこの流体中の粒子と考えてよく，どんな時刻でも 3 次元座標 x^i によって示される．銀河の速度 dx^i/dt は

FRW モデルの近似では 0 にならなければならず，そうでなければ，特別な方向ができてしまい，等方性の仮定と矛盾する．座標 (x, y, z) は**共動**となり，個々の銀河がいつも同じ座標 x^i にある．同様に x^i も放射の静止系を定義し，そこでは CMB 温度は図 17.12 で説明されるような双極的な非等方性を示さない．

$a(t)$ が時間とともに増加することで，線素 (18.1) は膨張する宇宙を表すことができる．これをみるために，座標間隔 Δx, Δy, Δz 離れている銀河の組の世界線を考える．**座標**距離 $d_{\text{coord}} \equiv (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$ は時間が経っても変わらない．しかし，時間一定面の物理距離 $d(t)$ は計量 (18.2) で定義され

$$d(t) = a(t) d_{\text{coord}} \tag{18.3}$$

となる．これは $a(t)$ が時間とともに増加すれば大きくなる．(18.1) 式が膨張宇宙を表しているというのはこういうことである．当然ながら，宇宙がどこから膨張しているのかと疑問を抱くのではないだろうか．この種の疑問は，境界がなく無限に広がった宇宙では意味をなさない．例 18.1 が理解の助となるだろう．

例 18.1. 膨張とは何か．どこへ，どこから? ほぼ一様に干しぶどうが入ったパン生地を思い浮かべ，それを焼いてレーズンパンを作る．パンは焼けていくにつれて膨らんでいく．この家庭的な例は宇宙論と通ずるところがある．干しぶどう間の相互作用を伝える生地のかわりに，銀河間の相互作用を伝える重力を考えよう．1 つの銀河から宇宙を見るように，焼けていく生地の宇宙を 1 つの干しぶどうから見ることを想像しよう．膨張しているものは干しぶどう間の距離であり，生地の密度は減少している．

現実のレーズンパンの生地には境界があるため，その周りの空間に膨張していき，大きなスケールで一様ではない．しかし，もしパンがすべての方向に無限に広がっていると，境界はなくなり，厳密に一様になり，したがって何かの「中に」膨張しているという表現は意味を失う．単に膨張しているだけだ．同様に，どこか「から」膨張しているということにも意味がない．膨張はすべての干しぶどうから同じように見え，各々の干しぶどうは他のすべての干しぶどうが半径方向に後退しているように見えるだろう (17.2 節のハッブルの法則の考察を思い出せ)．

これまで，銀河宇宙が境界の中に入れられているという観測的な証拠は微塵も存在しない．ただし境界が存在することはありうることではある．宇宙には今のところわからない中心があり，今のところ見えていない境界が存在すると仮定することはできるが，その仮定は内部の観測の予測に影響を与えるものではないし，計算を複雑にするだけである．観測されている一様等方性が宇宙に広がっていると仮定するのがもっとも単純でエレガントである．厳密な一様モデルでは中心も境界もない．こうした理由で，宇宙が何かの中に膨張しているとか，どこかから膨張してきたということには意味がないのだ．

ロバートソン–ウォーカ計量が唯一の一様等方時空幾何学ではない．

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathcal{L}^2 \tag{18.4}$$

の形の線素は，$d\mathcal{L}^2$ が時間に依存しない一様等方 3 次元**空間**[1] の線素であれば，すべて一様等方時空になる．これらをまとめて**ロバートソン–ウォーカー計量**と言う．平坦 3 次元空間は 1 つの例であるが，曲がった可能性も 2 つある．1 つは，4 次元ユークリッド空間内の 3 次元球面である．しかしながら，曲がった FRW モデルに触れることを以下の 2 つの理由のために 18.6 節まで延ばしておく．(1) 平坦 FRW モデルは簡単な考察の基本であり，曲がった場合を含めるときに変更する必要がほとんどない．(2) 平坦なロバートソン–ウォーカー計量は単なるアカデミックな練習問題ではない．次章で考察するデータから，我々の宇宙を最もよく表しているのは平坦一様等方モデルであることがわかっている．最も単純なモデルが最も現実的なものでもある．

18.2　宇宙論的赤方偏移

平坦なロバートソン–ウォーカー計量 (18.1) は時間依存している．粒子がこの幾何学の中で動くと，時間依存するポテンシャル内で運動しているかのように，粒子のエネルギーは変化する．光子ではエネルギーが振動数に比例しているのだが，エネルギーの変化は宇宙論的赤方偏移となる．これから単純な公式を求めてみよう．

まず初めに，(18.1) 式の線素を極座標に書き換えてみよう：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{18.5}$$

これらの座標系の原点を我々の位置に合わせる．図 18.1 に示したような，座標距離 $r = R$ 離れた銀河の観測者を考えよう（座標 r は共動座標であり，$r = R$ はすべての時間にわたり，同じ銀河を指している）．遠い銀河の観測者が振動数 ω_e の光子を時刻 t_e で発射し，現在 t_0 我々に届いたとする．観測された光子の振動数 ω_0 はどうなっているのだろうか．

遠い観測者から放たれた光のパルスは半径方向のヌル曲線上

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2(t)dr^2 \tag{18.6}$$

を進む．t_e と t_0 の間の時間内に，パルスは空間座標距離 R を進む．(18.6) 式を積分すると

$$R = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{18.7}$$

が得られる．この式は発信時間と受信時間の間に進んだ座標距離をつなぐ．

遠い銀河の観測者が等しい時間間隔 δt_e で一連の光のパルスを遠い銀河の観測者に発信するとしよう．これは振動数で $\omega_e = 2\pi/\delta t_e$ である．受信でのパルスの時間間隔 δt_0 は (18.7) 式から計算できる．すべてのパルスは同じ空間座標間隔 R

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = R = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{18.8}$$

[1] 実際，座標が最も一般的な一様等方時空が (18.4) 式の形になるように常に選ぶことができる．

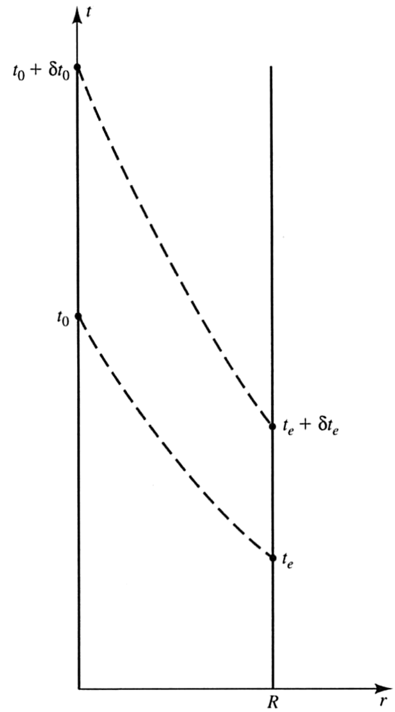


図 18.1 宇宙膨張の中で光信号を交換する 2 人の観測者．観測者は一様な面内で静止しており，2 人の世界線はこの t-r 時空図の鉛直方向に伸びている．$r = R$ の観測者が 2 つの信号を時刻 t_e, $t_e + \delta t_e$ に送り，$r = 0$ の観測者は時刻 t_0, $t_0 + \delta t_0$ で受信する．宇宙は膨張しているので，光線のしたがう曲線は (t, r) 座標で直線ではない．特に，$r = 0$ で光子 2 個が受信された時間間隔 δt_0 は発信されたときの時間間隔 δt_e よりも大きくなっている．これが宇宙論的赤方偏移である．

をやってくるからである．δt_e と δt_0 が小さいと仮定すると，左辺の積分と右辺の積分の差は，ちょうど上限が少し伸びたのと，下限が少し縮んだ分になる．正味の差は 0 になる．つまり

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} - \frac{\delta t_e}{a(t_e)} = 0 \tag{18.9}$$

となる．これは振動数 $\omega = 2\pi/\delta t$ では

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}} \tag{18.10}$$

となる．空間的に平坦な FRW モデルで得られたが，この関係は 18.6 節で考察する他の一様等方宇宙でも成り立つ（問題 21）．時間 t とともに $a(t)$ が増加する膨張宇宙内で，比 $a(t_e)/a(t_0)$ は 1 よりも小さく，受信の振動数 ω_0 は発信の振動数 ω_e よりも小さい．これが宇宙論的赤方偏移であ

る．宇宙が膨張するにつれて，光子の振動数は減少し波長はスケールファクター $a(t)$ に比例して大きくなる．したがって

$$\boxed{1+z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}} \tag{18.11}$$

宇宙論的赤方偏移

となる．天文学者は z を**赤方偏移**と呼び，これは「最も遠いクェーサの z は 6.6 である」というように使う．赤方偏移していないものは現在の赤方偏移 $z=0$ に対応する．

特別な場合として，銀河が受信の時刻に少ししか離れておらず，座標間隔 R が小さい場合を考えよう．受信の時間は (18.3) 式から

$$d = a(t_0)R \tag{18.12}$$

である．銀河から来たどんな光線でもヌルの経路（$ds^2=0$）に沿って我々のところまでやってくる．(18.6) 式から光の進む座標時間 Δt は近似的に $(\Delta t) = a(t_0)R + (R^2$ のオーダーの項) である（$a(t_0)$ であるか $a(t_e)$ であるかは関係ない．この差は R^2 のオーダーでしかない）．したがって進む時間も d であり， $t_e = t_0 - d$ となる．ともに R^2 の差は無視した．(18.10) 式を小さな d で評価すると，波長における小さな変化は

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left[\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right] d \qquad (\text{小さい } d \text{ で}) \tag{18.13}$$

となる．ここで $\dot{a} \equiv da/dt$ である．これがハッブルの法則［単位系を $c=1$ として (17.4) 式と (17.5) 式を参照］であり，(18.13) 式でハッブル定数と時空の幾何学がつながる：

$$\boxed{H_0 \equiv H(t_0) \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}} \tag{18.14}$$

ハッブル定数

現在測定できるハッブル定数 H_0 は現在の時刻 t_0 における (18.14) 式の値である．図 18.2 に，スケールファクタから得られるハッブル定数の簡単な幾何学的構成を示した．観測者の時刻が違えば測定されたハッブル定数も違う．ハッブル定数は時間の定数ではなく，我々の立場から見た宇宙膨張を表す数値であるという意味で，定数である．

通常 (km/s)/Mpc の単位で引用されるけれど，ハッブル定数が時間の逆数の次元を持っていることは (18.14) 式から明らかであろう．H_0 の逆数は**ハッブル時間** t_H と呼ばれる．10 億年の単位（1Gyr $= 10^9$yr =10 億年）で

$$t_H \equiv \frac{1}{H_0} = 9.78h^{-1}\text{Gyr} \tag{18.15}$$

となる．ここで h は 100(km/s)/Mpc の単位で測定されたハッブル定数であり，つまり

$$h \equiv \frac{H_0}{100(\text{km/s})/\text{Mpc}} \tag{18.16}$$

である（宇宙論研究者は方程式を h を使って書くことを好んでいる．ハッブル定数は我々の宇宙を特徴づけるパラメータのうち最もよく決まっているものの 1 つではあるが，完全に決まっているわけではないからだ．本書では $h \approx 0.72$ の値を使う）．ハッブル時間は宇宙論で便利な時間の単位である．図 18.2 では，ハッブル時間が宇宙年齢の粗い評価になっていることを表している．

18.3 物質と放射，真空

FRW モデルは前章で触れた，互いに相互作用しない 3 成分からなる宇宙論的流体に対して簡単なモデルを仮定している．つまり圧力のない物質と放射，真空である．銀河の流体を圧力のないガスとすることはよい近似である．相対論屋の言い回しでは**ダスト**というが，銀河の典型的なランダム運動は $\sim 10^2$km/s であり，運動エネルギーが静止エネルギーよりもかなり小さいためである．放射は宇宙背景放射を含んでおり，ニュートリノ類も含み，ニュートリノは質量 0 またはあっても十分小さいため今も相対論的に運動している．最後に，真空のエネルギーも含める．これらの成分は非常に初期の宇宙で本当は相互作用していたのだが，宇宙の歴史のほとんどで独立であったと仮定しても悪くはないだろう．

FRW モデルの熱力学第一法則

一様等方宇宙の進化全体はスケールファクタ $a(t)$ に含まれている．たとえば，宇宙における物質と放射，真空密度の進化は $a(t)$ から求めることができる．宇宙は一様なので，これらの量は t だけに依存し，熱力学第一法則（局所的なエネルギー保存）によって a とつながっている．この法則が述べていることは，ある決まった粒子数を含んでいる体積 $\Delta\mathcal{V}$ 中のどんな変化 $d(\Delta\mathcal{V})$ に関して，この体積中の全エネルギーの変化は，なされた仕事から流れ込んだ熱量を引いたものになるということである．どんな方向からでも熱が流れ込めば，等方性の仮定を壊すことになるだろう．言い替えれば，一様性は温度 T が時間だけに依存することを意味し，ある瞬間でどこかが他のところに比べて熱いとか冷たいということはないため，熱の流れは 0 になる．体積 $\Delta\mathcal{V}$ 中の宇宙論的流体の熱力学第一法則により，体積の無限小変化 $d(\Delta\mathcal{V})$ とそれに対応する全エネルギーの無限小変化 $d(\Delta E)$ が結びつき

$$d(\Delta E) = -p\,d(\Delta\mathcal{V}) \tag{18.17}$$

となる．ここで p は体積中の物質にはたらく圧力 p である．全エネルギー密度を ρ とすると，体積中のエネルギー ΔE は $\rho\Delta\mathcal{V}$ となる．

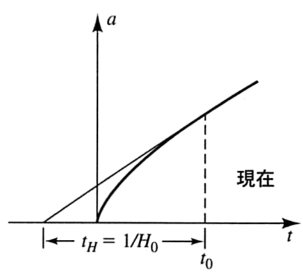


図 18.2 スケールファクタとハッブル定数の関係．(18.14) 式から，時刻 t_0 のハッブル定数の逆数は t_0 における $a(t)$ の接線と t 軸との交点の関係にあることがわかる．ハッブル時間 $t_H = 1/H_0$ は $\ddot{a}(t) < 0$ の減速 FRW モデルの年齢の上限となり，粗い評価になっている．物質と放射のどんな組合せが優勢になっても減速する（問題 23）．

座標間隔を Δx, Δy, Δz に固定すると，座標 (x, y, z) は共動なため，粒子数が変わらない体積を定義できる．これらの座標間隔の積 $\Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}$ は体積の物理的な大きさではない．物理体積は (7.29) 式と (18.2) 式から

$$\Delta\mathcal{V} = a^3(t)\Delta\mathcal{V}_{\text{coord}} \tag{18.18}$$

となる．(18.18) 式を (18.17) 式に代入し，dt で割ると

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3 \Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}) = -p\frac{d}{dt}(a^3 \Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}) \tag{18.19}$$

が得られる．$\Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}$ は時間と独立なので，両辺で割ることができ

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\rho(t)a^3(t)] = -p(t)\frac{d}{dt}[a^3(t)]} \tag{18.20}$$

宇宙論の熱力学第一法則

が得られ，これが一様等方宇宙論の熱力学第一法則の形となる．FRW モデルで仮定されるエネルギーの 3 形態にこの式がどのように適用できるのか見てみよう．別々の種類の物質が相互作用しない時期で (18.20) 式は各々別々に適用できる．

物質

すでに述べたように，銀河中の物質を無圧力ガスと近似してもよい．内部エネルギーがないので，エネルギー密度 ρ_m は銀河の静止質量だけであり，(18.20) 式は

$$\frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0 \tag{18.21}$$

となり，静止質量の保存を表す．明らかに ρ_m はスケールファクタとともに

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0)\left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right]^3 \tag{18.22}$$

のように変化する．ここで t_0 は現在の時刻である．よって物質密度の時間依存性はスケールファクタ $a(t)$ によって決められる．

放射

温度 T の黒体放射ガスのエネルギー密度 ρ_r と圧力 p_r は

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r \tag{18.23}$$

の関係にあり，$c \neq 1$ の単位系で ρ_r は

$$\rho_r = g\frac{\pi^2}{30}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \tag{18.24}$$

である．ここで k_B はボルツマン定数でケルビンとエネルギーの単位を変換する（たとえば $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$erg/K）．$g$ は放射を構成する静止質量 0 粒子の自由度の数である．光子には

2 つの偏極があるので $g = 2$ である．より現実的に，3 種のニュートリノを含めたときも (18.24) 式のような公式になることがわかるが，$k_B T <\sim 1\mathrm{MeV}$ で正しい実効的な g の値は 3.4 程度になり，これは目下，我々の目的では十分であろう（たとえば，Kolb and Turner 1990 を見よ）.

(18.23) 式を (18.20) 式に代入して，積分をすると容易に

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^4 \tag{18.25}$$

が得られる．または (18.24) 式を使い温度 T で表すと

$$T(t) = T(t_0) \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right] \tag{18.26}$$

となる．よって放射エネルギー密度と温度の時間依存性はスケールファクターで決まり，温度はスケールファクタの逆数で変わる．宇宙が $a = 0$ のビッグバンから始まったとすると，無限大の温度から始まり，膨張するにつれて冷えていった．元素の初期存在量のような，宇宙の物質の大規模スケールの多くの重要な性質は高温での初期の熱平衡から冷却していくことで生じると理解できる．いくつかはボックス 18.1 に手短に述べた.

現在は物質が放射に対して優勢であるが，初期宇宙では逆になっていた．現在の密度がどんな値であっても，$a(t)$ が現在よりも小さく，ρ_r が ρ_m よりも大きかった初期の時刻が存在した．そのとき，宇宙は**放射優勢**であった．(17.1) 式と (17.2) 式の数値と (18.22) 式と (18.25) 式の関係から，$a(t_0)/a(t) \sim 10^3$ のときに，つまり現在の宇宙の大きさの 10^{-3} 倍のとき，物質が放射より優勢になった．よって，現在までの宇宙の歴史のほとんどにわたって，宇宙の物質は放射よりも優勢であった.

真空

真空のエネルギー密度 ρ_v は最後のケースである．執筆時，真空のエネルギーの値を決める基本的理論は存在しない．その兆し　さえも予言されていない．泥沼に入り込まないようにするため，このテキストでは，真空エネルギーとして（i）空間と時間で一定（ii）現在の観測でわかっているように正の符号をもつもの（第 19 章）に焦点を絞る．熱力学第一法則 (18.20) から圧力が

$$p_v = -\rho_v \tag{18.27}$$

であることがわかり，これは空間的と時間的に一定であるが負である．負の圧力はゴム紐における張力のようなものである．それは圧縮されるときに仕事が必要ではなく，膨張の際に仕事が必要だ．真空エネルギー密度は歴史的な事情から（$c \neq 1, G \neq 1$ の単位系で）

$$\rho_v = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \tag{18.28}$$

と書かれる．ここで Λ は長さの逆 2 乗の次元をもつ定数であり，**宇宙定数**または**宇宙項**と呼ばれる．物質と放射のエネルギー密度は宇宙膨張により減少していくのだが，真空のエネルギーが存在すれば一定のままである．したがって無限に膨張する宇宙の長期的未来では真空エネルギーが優勢になる.

(18.24) 式と (18.28) 式を除けば，物質と放射，真空の考察は他の単位系で行わなかった．$\mathcal{MLT}$ 単位系（たとえば g-cm-s）では圧力は (力)/(面積) = $(\mathcal{ML}/\mathcal{T}^2)/\mathcal{L}^2$ であり，厳密にはエネルギー密度と同じあり (エネルギー)/(体積) = $\mathcal{M}(\mathcal{L}/\mathcal{T})^2/\mathcal{L}^3$ である．温度は伝統的にケルビンの単位を使い，ボルツマン定数 k_B でエネルギーに変換する．初期宇宙の宇宙論では温度にエネルギーの単位，つまり電子ボルトを使うと便利である．次の節で宇宙論のアインシュタイン方程式を導入するが，それには幾何学単位系 ($c = G = 1$) が便利である（9.1 節を思い出せ）．圧力とエネルギー密度の単位は $\mathcal{L}^{-2}$ であるが，温度は $\mathcal{L}$ である．幾何学単位で，温度 T の放射ガスのエネルギー密度の関係 (18.24) は

$$\rho_r = g\frac{\pi^2}{30\ell_{Pl}^2}\left(\frac{T}{\ell_{Pl}}\right)^4 \tag{18.29}$$

となる．ここで $\ell_{Pl} \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33}\mathrm{cm}$ [(1.6) 式を参照] であり，T の単位は cm である．重力の現れない公式にプランク長さを見つけて驚いただろうか．本当は幾何学単位系で $\hbar = \ell_{Pl}^2$ というだけのことである．

18.4　平坦 FRW モデルの進化

熱力学第一法則 (18.20) に加え，アインシュタイン方程式の 1 つの結果だけが，FRW 宇宙モデルにおけるスケールファクタの時間的振る舞いを求めるのに必要とされる．それは（幾何学単位系で）

$$\boxed{\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = 0} \tag{18.30}$$

平坦 FRW モデルのフリードマン方程式

である．ここで $\dot{a} \equiv da/dt$ であり，ρ は物質と放射，真空のエネルギー密度である．

この力学方程式は**フリードマン方程式**の特別な場合であり，一般的な方程式は (18.63) 式で出会い，22.4 節でアインシュタイン方程式から求めるだろう．非常に大雑把に言えば，(18.30) 式は，平坦 FRW 宇宙で膨張の運動エネルギーが自己引力の重力ポテンシャルエネルギーとちょうどバランスをとっていると考えることができる．これは 18.7 節でより詳しく考察する．

スケールファクタがどのように時間に依存するのかを理解するために (18.30) 式を解く前に，現在の時刻 t_0 で評価し，$a^2(t_0)$ で割るだけで，平坦 FRW モデルにおける現在の全質量密度 ρ_0 と，(18.14) 式で定義されるハッブル定数 H_0 の間にある重要な関係が求められる．つまり

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho_0}{3} = 0 \tag{18.31}$$

である．平坦 FRW モデルの現在の密度は**臨界密度**と呼ばれ，その値は

$$\boxed{\rho_{\mathrm{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi} = 1.88 \times 10^{-29}h^2\mathrm{g/cm^3}} \tag{18.32}$$

臨界密度

である（「臨界」がどんな意味をもっているのか後に知るだろう）．この全密度で物質や放射，真空

ボックス 18.1　宇宙の熱史

FRW モデルの始まりであるビッグバンで温度は無限大である．十分初期の瞬間で宇宙は高温であり，物質は最も基本的な要素に分解されていた．そのときいろいろな種類の基本粒子が熱平衡状態になっていたとしても何の問題もないであろう．例としてニュートリノの種類の量を考えよう．ニュートリノ（ν）と反ニュートリノ（$\bar{\nu}$）は電子（e^-）と 陽電子（e^+）と

$$\nu + \bar{\nu} \leftrightarrow e^+ + e^-, \qquad \nu + e^- \leftrightarrow \nu + e^- \qquad \text{など} \tag{a}$$

のような反応を通じて相互作用している．

もし ν と $\bar{\nu}$ の種類が多過ぎると，最初の反応によって対消滅し，少な過ぎると電子と陽電子の対消滅によって作られる．熱平衡ではこれらの粒子数は反応によりバランスをとるようになっている．十分初期の時期 [a] では，他のすべての種類の粒子についても同じである．

宇宙が膨張するにつれて，それらは (18.26) 式にしたがって温度は下がる．単位時間あたりの反応数 Γ は (a) 式のような過程に対して温度とともに低下する．粒子密度は膨張のため減少し，1 粒子当たりのエネルギーも減り，断面積は時間とともに減少する．反応率 Γ が宇宙の膨張率よりも小さくなると

$$\Gamma < \dot{a}(t)/a(t) \equiv H(t) \tag{b}$$

となり，反応はもはや宇宙膨張と競合して平衡状態を維持できるほど十分とはいえなくなる．(b) 式になったときの値で存在量は「凍結する」．ニュートリノにこれが起きるのは約 1MeV の温度で，ビッグバンの約 1 秒後である（例 18.2 を見よ）．黒体スペクトルを示す宇宙ニュートリノ背景放射はビッグバンの予言の 1 つであるが，現在これを発見するのは不可能である．

ビッグバンから残っている粒子と原子核の残存量を詳細に理解することは，宇宙論や素粒子論でともに重要な課題であり，魅力的で実り多い．詳しく残存量を理解するのに必要な素粒子論は本書の範囲を超えている．しかし宇宙の熱史で 3 つの重要な過渡期について述べることはできる．

[a] グラビトンは熱平衡にない．それらの相互作用を支配している結合定数 G が宇宙膨張率も支配しているからである．

バリオン合成（$T \sim 10^{14}$GeV, $t \sim 10^{-34}$ 秒）．強い力と電弱力の特徴的なエネルギースケール 10^{14}GeV より低いエネルギーの素粒子相互作用では，全バリオン数は保存する．陽子と中性子はよく知られたバリオンの例であり，バリオン数は各々 +1 である．反陽子と反中性子はバリオン数 −1 である．バリオンと反バリオンは現在の宇宙で同等に存在していない．もしそうなっていれば，物質と反物質の対消滅から生じる反応は観測されているものよりももっと多いであろう．バリオン数が保存すると，この非対称性は宇宙の初期条件だけに起因することになる．しかし，10^{14}GeV より高いエネルギーでは，バリオン数は保存しないかも知れず，以前考察したように，ニュートリノの種類の量がずっと低いエネルギーでそうだったように，バリオンと反バリオンの量は熱平衡によって決められるのかもしれない．物質と反物質の相互作用の小さな差（加速器のエネルギーで証拠がある）により熱平衡のバリオンと反バリオンの量に非対称性が生じる．温度が 10^{14}GeV より下がると，これらの反応は“凍結し”現在観測される非対称になる．

元素合成（$T \sim 0.1$MeV, $t \sim 3$ 分）．温度が 0.1MeV に下がると，自由陽子と自由中性子が結合して軽い原子核ができる．元素の原初量はこれによって固定され，質量比で約 75% の水素と約 24% のヘリウムになる．他の軽元素の量はかなり少ないが重要である．これらの量はバリオンの個数密度で大きく変わり，ビッグバン宇宙論の重要な検証となっている（詳しくは 372 ページのボックス 19.1 を見よ）．

再結合（$T \sim 0.3$eV, $t \sim 4 \times 10^5$ 年）．温度が 0.1 電子ボルトよりも下がると，電子と原子核は結合して原子，特に水素原子 [b] になる．宇宙は放射に対して透明になり，残った光子は宇宙背景放射になる．

バリオン数の非対称性と元素の原初量，宇宙背景放射は宇宙の熱史の遺物である．これらの遺物はそれらが作られた初期の時代の情報を多く含んでいる．

[b] 電子と原子核が再結合するという表現は誤解を招く．それ以前では決して結合したことがなかったからだが，再結合は標準的な用語である．

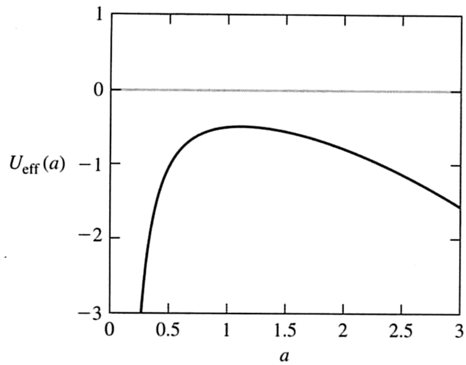


図 18.3 平坦 FRW モデルの有効ポテンシャル．(18.36) 式で定義された有効ポテンシャル $U_{\rm eff}(a)$ を示しており，現在 真空と放射，物質の 3 つが等しく存在する FRW モデルを説明のために使った：$\Omega_v = \Omega_r = \Omega_m = 1/3$（我々の宇宙には放射が少なく，真空のエネルギーが多い．その有効ポテンシャルに対しては図 18.9 を見よ）．スケールファクタ $a(t)$ の進化は，この有効ポテンシャル中のエネルギー 0 粒子のニュートン的な運動と同じである．宇宙は $a = 0$ のビッグバンから始まり，$a \approx 1$（現在）まで減速し，永遠に加速する．初め，放射が優勢であったが，後に物質が優勢になり，まだ減速していたが，最後に真空が優勢になり，加速の相に入る．

エネルギー密度を割り，習慣的に現在の相対比率は[3]

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_{\rm crit}}, \qquad \Omega_r \equiv \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{\rm crit}}, \qquad \Omega_v \equiv \frac{\rho_v(t_0)}{\rho_{\rm crit}} \tag{18.33}$$

で表される．これらの平坦モデルに対しては $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v \equiv \Omega = 1$ となる．

力学的方程式 (18.30) で気をつけなければならない点は，この式が係数までは決められないということである．もし $a(t)$ が解ならば，正の定数 K をとすると $Ka(t)$ も解になる．このことは，線素 (18.1) の形が $a(t)$ を $Ka(t)$ とし，x^i も x^i/K としても変わらないという事実を反映している．規格化の任意性は平坦 FRW モデルの特徴であり，空間曲率をもつモデルではそうはならないだろう．平坦 FRW モデルのスケールファクタにある任意の規格化定数を決める方法はいろいろある．我々は現在の時刻でスケールファクタを 1 に規格化することにする [$a(t_0) = 1$]．このように選んでも物理的な結果は変わらない．

規格化として $a(t_0) = 1$ を選んだことによる有利な点はスケールファクターの関数として表した全密度が簡単な形

$$\rho(a) = \rho_{\rm crit}\left(\Omega_v + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4}\right) \qquad (a(t_0) = 1) \tag{18.34}$$

になることである． $a = 1$ のとき，(18.33) 式からこの式は現在で正しく，a が別の値でも正しい．a が熱力学第一法則 [(18.22) 式，(18.25) 式と (18.28) 式を参照] によって決められ，a とともに密

[3] 執筆時，真空のエネルギーに Ω_Λ も広く使われている．

度が変化していくからである．これによって力学的方程式 (18.30) は

$$\frac{1}{2H_0^2}\dot{a}^2 + U_{\text{eff}}(a) = 0 \tag{18.35}$$

と書くことができる．ここで

$$U_{\text{eff}}(a) \equiv -\frac{1}{2}\left(\Omega_v a^2 + \frac{\Omega_m}{a} + \frac{\Omega_r}{a^2}\right) \qquad (a(t_0) = 1) \tag{18.36}$$

である．(18.35) 式はニュートン力学で保存するエネルギー（この場合，0）の式に似ている．平坦 FRW モデルの時間発展について解くことは，ニュートン力学において，有効ポテンシャル U_{eff} 中で一次元の運動をするエネルギー 0 の粒子の運動について解くことと同じである．U_{eff} の形を図 18.3 に示した．

(18.35) 式は物質と放射，真空エネルギーについて別々に解くことができ，現在で $a = 1$ としたときには次のような結果になる．これらを方程式に代入することでも確かめられる．

- **物質優勢**，$\Omega_m = 1, \Omega_r = 0, \Omega_v = 0$:

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3} \tag{18.37}$$

- **放射優勢**，$\Omega_m = 0, \Omega_r = 1, \Omega_v = 0$:

$$a(t) = (t/t_0)^{1/2} \tag{18.38}$$

- **真空優勢**，$\Omega_m = 0, \Omega_r = 0, \Omega_v = 1$:

$$a(t) = e^{H(t-t_0)} \tag{18.39}$$

　である．ここで

$$H^2 \equiv \frac{8\pi\rho_v}{3} = \frac{\Lambda}{3} \tag{18.40}$$

　である．

[もしこの H の定義をハッブル定数と混同してしまうことが気になるなら，H は (18.39) 式の形の膨張に対するハッブル定数であり［(18.14) 式を参照]，この場合時間の定数であることを指摘しておく.]

3 つの場合すべてで，宇宙は t が大きくなると際限なく膨張する．放射優勢と物質優勢の場合は，宇宙は $t = 0$ で $a = 0$ の特異点から始まる．これは物理的特異点であり，物理的な量，つまり密度が発散する．$t = 0$ の瞬間がビッグバンである．真空優勢の場合には，$t = -\infty$ で a は 0 になる．これが特異点かどうかははっきりしない．密度 ρ_v が一定だからだ．しかしいずれの場合も我々の宇宙には物質と放射があり，ビッグバン特異点がある[4]．

[4] 実際，純粋に真空の場合では $a = 0$ は特異点ではない．特異点であるためには，a が 0 になるだけでは十分ではない．緯度一定の線に沿って地球を輪切りにすることを考えよう．輪切りの半径は北極で 0 になるが，そこで幾何学は特異とはならない．

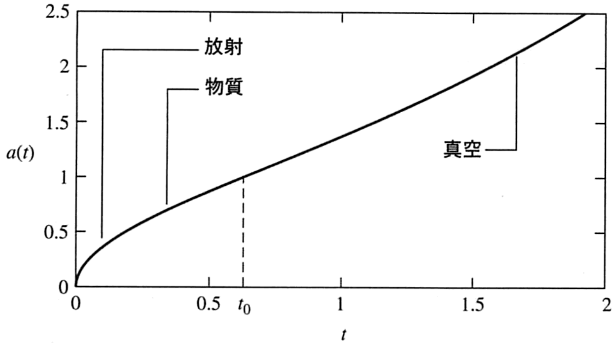


図 18.4 平坦 FRW モデルの進化の段階．平坦な FRW モデルの膨張におけるいろいろな段階を説明のための便宜的なモデル $\Omega_r = \Omega_v = \Omega_m = 1/3$ で示した．これは図 18.3 の有効ポテンシャルである．初め，膨張は放射優勢（$a(t) \propto t^{1/2}$）で，後に物質優勢（$a(t) \propto t^{2/3}$）で，最後に真空優勢になる（$a(t) \propto \exp(Ht)$）．現在の年齢 t_0 で $a(t_0) = 1$ の規格化を行っており，現在の時刻を図中の破線で示した．この曲線は一般的な FRW モデルで，*Mathematica* でプログラムを作って計算した．これは本書のウェブサイトで利用できる．

図 18.4 は 3 種類の物質が存在するときの進化の様子を表している．進化はいろいろな種類のエネルギーが優勢になる段階を経て進んでいく．初め宇宙は放射優勢であるが放射の密度は物質と真空よりも速く減っていき [(18.25) 式または (18.34) 式を参照]，続いて物質優勢になる．物質密度も減少し [(18.22) 式を参照]，最後に一定の真空エネルギー ρ_v が重要になり，指数的な膨張が引き起こされる．

例 18.2. 初めの数分 元素の原初量は，温度（時間の単位）が $\sim 0.1\text{MeV}$ に下がり，元素量を変える熱核反応が止まるビッグバン後の時刻に設定される（詳しくは 348 ページのボックス 18.1 と 372 ページのボックス 19.1 を見よ）．**いつ**起きるのだろうか．すでに述べたように初期宇宙は放射優勢である．エネルギー密度は $g = 3.4$ の温度の関数 (18.29) でうまく近似できる．スケールファクタ $a(t)$ は $t^{1/2}$ に比例する．(18.30) 式でスケールファクタとエネルギー密度をつなぎ，(18.29) 式でエネルギー密度と温度をつなげば，以下のようになる：

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi}{3}\rho(t) = 2.75g\frac{1}{\ell_{Pl}^2}\left(\frac{T}{\ell_{Pl}}\right)^4 \tag{18.41}$$

これは，幾何学単位系で測ったとき，センチメートルの時間とセンチメートルの温度の間の関係である．時間を秒で測り，温度を MeV で測ったときは

$$t = 1.3\left(\frac{1\text{MeV}}{T}\right)^2 \text{秒} \qquad (\text{放射優勢 } g \approx 3.4) \tag{18.42}$$

となる．したがって $T \sim 0.1\text{MeV}$ は $t \sim 130$ 秒に対応し，これは最初の数分である．

18.5　ビッグバンと宇宙の年齢と大きさ

第 18.7 節と第 19 章でみるように，平坦な場合と同様，我々の宇宙のモデルとなり得る曲がった FRW 宇宙論はビッグバンから始まった．ビッグバンはスケールファクタ $a(t)$ が 0 になり，宇宙の幾何学が特異になる時刻の瞬間である．ビッグバンの特異な性質は (18.22) 式と (18.25) 式から明らかである．物質と放射は $a=0$ で無限大となる．22.3 節で時空曲率がビッグバンでどのようにふっ飛ぶのか定量的に知ることになるだろう．

ビッグバンは空間の 1 点で起きる爆発ではない（340 ページの例 18.1 を見よ）．物質と放射の密度はある t の値で一様性と整合性を保ちながら，(x, y, z) のすべての値で発散する．ビッグバンは時間のある瞬間に空間のすべての場所で起きる．特異点では時空の幾何学の概念は，アインシュタイン方程式のような時空の法則のように予言能力とともに壊れる．物理学とは予言をする学問だと考える限り，宇宙はビッグバンで始まったことになる（このことに関してボックス 18.2 を見よ）．このような理由により，習慣的にビッグバンに時刻 $t=0$ を合わせる．

我々は t_0 で表されるある時刻の宇宙に生きている（添字 0 で現在を表すという宇宙論の習慣にしたがっている）．ビッグバン以来の時間は**宇宙の年齢**である．ハッブル時間 t_H はこの年齢の粗い評価値（ある仮定をあわせると上限）となる．18.7 節で考察するように，年齢を正確に決めるためには，どの FRW モデルが我々の宇宙を最もよく表しているかを決めなければならず，より多くの観測的情報が必要となる．

例 18.3. 平坦な FRW モデルにおける年齢とハッブル定数　観測により，物質がエネルギーで優勢な成分であり，我々が線素 (18.1) の平坦な FRW モデルに生きていることがわかったとしよう．(18.37) 式からスケールファクタは $a(t) \propto t^{2/3}$ である．(18.14) 式からハッブル定数と年齢は

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = \frac{2}{3}t_H \tag{18.43}$$

の関係にある．現在の観測で支持されているハッブル定数として 72(km/s)/Mpc を仮定すると，上式はほぼ 9Gyr の年齢になる [(18.15) 式を参照]．しかし，我々の銀河で最も古い星の年齢は約 12Gyr であり，我々の宇宙は空間的平坦な物質優勢 FRW モデルに一致することはない．物質優勢を示すこれらの観測が何か間違っているに違いない．

宇宙はどれだけ大きいのだろうか．幾何学が (18.1) 式であれば，不用意な答えは「無限大」である．t 一定の平坦空間スライスの体積は無限大だからだ．次節で有限の体積の FRW モデルを知ることになるが，重要な問題は観測可能な宇宙がどれだけ大きいかということだ．見ることのできる部分はどれほどになるか．

原理的に，ビッグバン以来光速またはそれより遅い速さで信号が伝わることのできる宇宙論的時空の一部だけが観測される．言い替えれば，ビッグバンと過去光円錐を境界とする領域内にある事象の情報だけを得ることができるのである（実際，宇宙の遠い領域について我々が知ることのできる情報のほとんどは，電磁波によって伝えられるため過去光円錐上にある）．情報が得られる領域の半径の非常に粗い測定値は，ct_H で定義される**ハッブル距離**であり，$2998h^{-1}$Mpc である．もう

ボックス 18.2 ビッグバン以前はどうなっていたのか

もし宇宙検閲仮説が正しければ（254 ページと 15.1 節を見よ），重力崩壊で生じた特異点はブラックホールの中に隠される．しかしビッグバン特異点は我々の過去の中に見える．今でも宇宙背景放射の中にビッグバンよりすぐ後に生じた光を見ることができる．ビッグバンが存在する限り一般相対性理論の特異点の問題から逃れられない．これがこのボックスのタイトルである．

この疑問の意味と答えはともにそれが問われている理論的な文脈による．この章の FRW モデルの文脈では，22.3 節でみるようにビッグバンは密度も曲率も無限大の特異な瞬間である．一般相対性理論の特異点定理によると，この特異点は FRW モデルの高い対称性による人工物ではないことになる．むしろより広い文脈で捉えると，当然と思われる物質についての仮定，例えば，エネルギーが正であるとすれば，現在の宇宙の状態と整合性のある一般相対論的宇宙論モデルは**どんなもの**にもビッグバン特異点が存在する（問題 28）．たぶん物質は初期宇宙ではこれらの仮定にしたがわず，ビッグバンは，それより初期の再収縮段階から非常に小さいサイズになったときの「跳ね返り」に過ぎなかったのかもしれない (問題 27)．しかし，執筆現在，こうした考えに対する理論的な動機はほとんどなく，特異点は避けられないようだ．

時空の古典的なアイディアは特異点で破綻する．そして時空の古典理論である一般相対性理論はビッグバン以前に何が起きていたのかを，ビッグバン以降の事象，特に現在の観測から決める術を失う．一般相対論的ビッグバン宇宙論の文脈では，このタイトルにある疑問を問いかけることは，ほとんど何も答えられないために，できなくなる．ビッグバンで時間が始まったということが最も簡単な答えになるだろう．

しかしさらに一層広い文脈では，古典的一般相対論は重力の量子論に対する近似でしかなく，特異点が存在することは，古典論が破綻し量子論の予言が重要になることの兆しとなる．10 ページで考察したように，密度がプランク密度 $\rho_{Pl} \equiv (\hbar c/\ell_{Pl})/\ell_{Pl}^3 \sim 10^{94}\mathrm{g/cm^3}$ に達したとき，時空の幾何学の量子揺らぎが顕著になると推測される．この密度とそれ以上のものが特異点で達成される．量子重力では時空幾何学が量子変数となり，一般的に確定値をとらずに揺らぐ．そこでは「以前」と「以後」の意味を与える幾何学は存在しない．ビッグバン以前に何が起きたかを問うことには，時間の古典概念が特異点で破綻してしまうため，意味がないようだ．

少し正確な測定値を求めるために，第 21 章のブラックホールに対して行ったように，光線が 45° の直線上を運動するような FRW モデルの座標を導入すると非常に便利である．この性質を持った座標は

$$dt = a(t)d\eta \tag{18.44}$$

となる新しい時間座標 η を定義することで導入できる．宇宙論でこの時間は**共形時間**と呼ばれる．たとえば，平坦 FRW モデルの線素 (18.5) は

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{18.45}$$

となる．半径方向に広がる光線は $ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dr^2) = 0$ の曲線上を伝わる．つまり，η-r 時空図内の 45° の直線上を伝わる．

図 18.5 は $r = 0$ の原点が我々の世界線と一致するようにとった FRW モデルの η-r 時空図である．図に別々の時刻の観測者の光円錐を示した（もしそのうちの 1 つの時刻が t_0 ならば，光円錐の 1 つは我々の光円錐であろう）．ビッグバン以来の時間内で観測者に光線がたどり着くことのできる最大半径 r_{horiz} は (18.7) 式 に $t_e = 0$ を代入すると得られる：

$$r_{\mathrm{horiz}}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \tag{18.46}$$

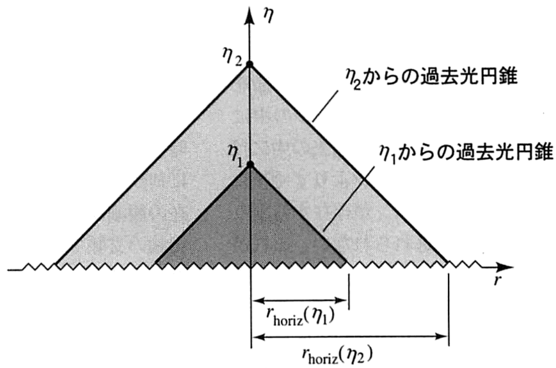


図 18.5 平坦物質優勢 FRW モデルの光円錐と地平．(18.44) 式で定義される共形時間座標を使って平坦 FRW 時空の η-r 時空図を示した．ビッグバンは $\eta = 0$ の線である．我々の世界線は $r = 0$ の η 軸上にある．ビッグバンから間隔 η とその 2 倍の間隔で 2 つの事象を世界線上に示した．事象の観測者は光円錐内側のすべての点から信号を受信することはできるが，外側の点からはできない．原点から黒丸までの座標距離は共形時刻 η のところから見える最も大きな共動半径 $r_{\text{horiz}}(\eta)$ である．観測の時刻で見える領域の大きさは (18.46) 式で与えられる．時間が経つにつれて見える領域は大きくなっていく．

共動半径 $r_{\text{horiz}}(t)$ は宇宙論的流体粒子の領域を 2 つに分け，その 1 つでは観測者が時刻 t で情報を得られる領域，もう 1 つが情報を得られない領域である．これを半径とする時空の 3 次元曲面は観測者の**粒子地平**[5] または短縮して**地平**と呼ばれ，地平は文脈が宇宙論的であるとわかっているときに使われる．図 18.5 に示したように，3 次元曲面の半径は観測者の時間に対して時間的に一定であるが，その値は観測者の時間に依存することに注意する．t が大きくなると，地平も大きくなる．観測者にたどりつく情報はビッグバン以来増えるからである．観測者の時間で地平までの物理的距離は

地平までの距離

$$d_{\text{horiz}}(t) = a(t)r_{\text{horiz}}(t) = a(t)\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \tag{18.47}$$

である．文字 d を使ってはいるが， d_{horiz} は原理的に見える領域の現在における物理的**半径**であり，直径（diameter）ではない．地平までの**距離**なので，d_{horiz} と表される．

我々はビッグバン後の時刻 t_0 に生きている観測者である．現在，情報を受け取ることのできる領域の半径は $d_{\text{horiz}}(t_0)$ である．現在，我々の宇宙に最もよくあう FRW モデルではほぼ 14Gpc であることがわかっている（問題 33）．それは**原理的に**情報を受け取ることのできる領域の半径である．19.2 節でわかるように初期宇宙が光に対して透明ではないため，光で見える宇宙の半径はそれよりも小さい．

[5] **事象**の地平は時空の因果関係によって事象の領域を分ける．**粒子**地平は観測者によって見えるかどうかで領域を分ける．地上では地平の向こうのものを見ることができず，宇宙論では粒子地平の向こうを見ることができない．

例 18.4. 平坦物質優勢と平坦放射優勢 FRW モデルの地平の大きさ (18.47) 式を (18.37) 式と (18.38) 式で評価すると，物質優勢と放射優勢の平坦 FRW モデルの地平の大きさは

$$d_{\mathrm{horiz}}(t) = 3t \qquad (\text{物質優勢}) \tag{18.48a}$$
$$d_{\mathrm{horiz}}(t) = 2t \qquad (\text{放射優勢}) \tag{18.48b}$$

となる．(18.48a) 式と (18.43) 式から，物質優勢宇宙の現在の地平の大きさが

$$d_{\mathrm{horiz}}(t_0) = 2t_H \approx 8\mathrm{Gpc} \qquad (\text{物質優勢}) \tag{18.49}$$

ここで t_H にはハッブル定数 72(km/s)/Mpc を長さの単位として代入した．この数値とすでに触れた 14Gpc との差は，「お買い得」FRW モデルでは物質に加え真空エネルギーが多く含まれているためであり，これは次章でみることになるだろう．

18.6 空間的に曲がったロバートソン–ウォーカー計量

平坦ロバートソン–ウォーカー線素 (18.1) は一様等方宇宙時空幾何学の一例であり，それだけしかないわけではない．一様等方宇宙の一般的なロバートソン–ウォーカー線素は (18.4) 式の形

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathcal{L}^2 \tag{18.50}$$

をしている．ここで $d\mathcal{L}^2$ は一様等方 3 次元空間の線素である．ここには 3 つの可能性だけがある．$d\mathcal{L}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ の平坦空間は既に述べた可能性のうちの 1 つである．他の 2 つをみてみよう．

閉じた FRW モデル

仮想的な 4 次元平坦ユークリッド空間中の単位円面は **3 次元球**と呼ばれる一様等方空間幾何学である（すべてのスケールは結局 (18.50) 式のスケールファクタ $a(t)$ で表される）．仮想空間に直交座標 $X^\alpha = (W, X, Y, Z)$ を使うと 3 次元空間は曲面

$$\delta_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \tag{18.51}$$

である．この曲面の点は極座標角を 4 次元に一般化したもので表される：

$$\begin{aligned} X &= \sin\chi\sin\theta\cos\phi, \qquad Z = \sin\chi\cos\theta \\ Y &= \sin\chi\sin\theta\sin\phi, \qquad W = \cos\chi \end{aligned} \tag{18.52}$$

ここで 3 つの角度 (χ, θ, ϕ) の範囲は $0 \le \chi \le \pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ である．(χ, θ, ϕ) が 3 次元面 (18.51) の点を表すことをみるために，(18.52) 式をこの式に代入し，さらに面のどの点も決められた範囲の角度の 1 つに対応することを確かめよ．3 次元面の線素は (18.52) 式を

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \tag{18.53}$$

に代入することで得られ

$$d\mathcal{L}^2 = dX^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{(閉じた宇宙)} \tag{18.54}$$

となる．これは一様等方 3 次元空間，つまり 3 次元球の計量である．

4 次元平坦空間で 3 次元球として定義されていることから明らかなように，この空間の体積は有限であり，境界がなく**閉じている**．有限面積で境界がないということは球面の 3 次元への拡張である．実際，(18.50) 式と (18.54) 式の FRW モデルの平坦空間スライスの空間体積を，座標全体にわたって (7.29) 式を積分することで計算できる：

$$V(t) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\chi\, a^3(t)\sin^2\chi\sin\theta = 2\pi^2 a^3(t) \tag{18.55}$$

宇宙が膨張するにつれ体積は大きくなり，再収縮すれば小さくなる．

開いた FRW モデル

残りの 3 次元空間の一様等方幾何学はすでに 149 ページの例 7.12 の 3 次元面の例としてすでに考察している．これはローレンツ双曲面の幾何学であり，平坦 4 次元ユークリッド空間中の球の 3 次元球と類似して，4 次元時空中の 3 次元曲面である．直交座標 $X^\alpha = (T, X, Y, Z)$ を使い，線素

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dX^\alpha dY^\beta = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \tag{18.56}$$

で仮想平坦時空中の点を表すと単位双曲面 [$a = 1$ として (7.74) 式を参照] の方程式は

$$\eta_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = -T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -1 \tag{18.57}$$

で表し直すことができる（似た式 (18.53) にあるように，この平坦時空が埋め込み面として 3 次元幾何学を表す便利な方法の 1 つに過ぎず，大文字を使うことにより，宇宙論的時空幾何学とは関係がないことを強調した）．これらの方程式の類似性が示すように，計量 $\eta_{\alpha\beta}$ の平坦時空の 3 次元面 (18.57) は計量 $\delta_{\alpha\beta}$ のユークリッド空間における球 (18.51) の拡張となっている．球の式 (18.51) と埋め込まれた幾何学の線素 (18.53) を変えない回転操作の組合せによって，球面のどの 2 点も互いに入れ換えることができる．双曲線の式と平坦時空の線素 (18.57) を変えることのないローレンツブーストと回転の組合せによって，双曲面上のどの 2 点も入れ換えることができる．したがって両曲面の幾何学は一様で等方である．

極座標 (18.52) の双曲面への拡張は

$$X = \sinh\chi\sin\theta\cos\phi, \qquad Z = \sinh\chi\cos\theta$$
$$Y = \sinh\chi\sin\theta\sin\phi, \qquad W = \cosh\chi \tag{18.58}$$

である．ここで範囲は $0 \le \chi < \infty$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$ である．双曲面を定義する (18.57) 式は (18.58) 式とすることで満たされ，これらの関係を (18.56) 式に代入すると (7.76) 式の双曲面の線素が得られる：

$$d\mathcal{L}^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \qquad \text{(開いた宇宙)} \tag{18.59}$$

この FRW モデルの空間スライスの体積は無限大である．したがってこれらのモデルは**開いている**．

一般的な FRW 計量

平坦な，**閉じた**，**開いた**という習慣的な名前はそれぞれ (18.5)，(18.54)，(18.59) の 3 つの一様等方幾何学を区別するために使ってきた．しかし，それらの空間曲率で区別した方がよいかもしれない．第 21 章で曲率の測定量を導入する．一様であるためには，空間曲率がこれらの幾何学の各点で同じであることが必要となる．平坦の場合には，いたるところで空間曲率は 0 であり，閉じた場合には空間曲率はどこでも正の一定値であり，開いた場合には，どこでも負の一定曲率である．図 18.6 に，一様等方空間幾何学になっている 2 次元面の埋め込み図を示した．これらの空間曲率は互いに違う．

一様等方宇宙モデルの 3 つの線素は以下のようにまとめられる：

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \left\{\begin{array}{c}\sin^2\chi\\ \chi^2\\ \sinh^2\chi\end{array}\right\}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \qquad \left\{\begin{array}{c}\text{閉じた宇宙}\\ \text{平坦宇宙}\\ \text{開いた宇宙}\end{array}\right\}} \tag{18.60}$$

ここで (18.5) 式の半径座標 r を別の場合との類似性を強調するために χ と書いた．すべて 3 つの場合を同時に書き表すために，座標 χ を新しい半径座標 r へ以下のように変える：

$$r = \sin\chi \quad (\text{閉じた宇宙}), \qquad r = \chi \quad (\text{平坦宇宙}), \qquad r = \sinh\chi \quad (\text{開いた宇宙}) \tag{18.61}$$

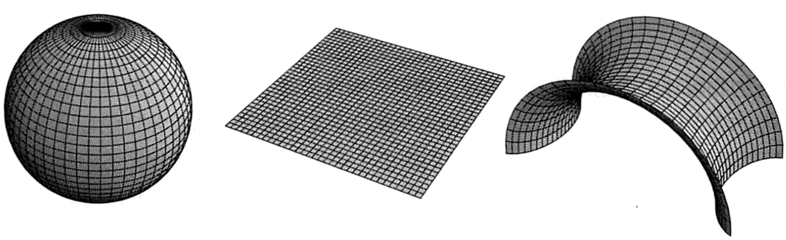


図 18.6 FRW 宇宙モデルでの一様等方な空間の宇宙幾何学の 3 つの埋め込み図．左と真ん中の図は閉じた FRW モデル (18.54) と平坦モデル (18.1) 中の t 一定，$\theta = \pi/2$ の 2 次元スライスの埋め込み図であり，7.7 節で構成の仕方を述べた．これらは球（閉じた宇宙）と平面（平坦）である．これらは，それぞれ一定の正曲率面とゼロ曲率面であり，詳しくは第 21 章でみるだろう．開いた FRW 計量の t 一定，$\theta = \pi/2$ スライスは 3 次元平坦空間で軸対称面として埋め込むことはできない（やってみよ）．右の面は一定負曲率をもち，埋め込まれているのは一部だけである（幾何学は一様なのでどの部分がそうなっているというものでもない）．これがどのようになっているのか知りたければ問題 30 を解け．

(18.60) 式の 3 つの線素は統一した形

一様等方宇宙論モデルの計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{18.62}$$

で書くことができる．ここで $k = +1, 0, -1$ はそれぞれ閉じた宇宙，平坦宇宙，開いた宇宙である．

(18.60) 式または (18.62) 式でまとめられたロバートソン–ウォーカー計量はそれぞれ一様等方空間の時間発展を表すことができる．$a(t)$ が増えて時間が経てば空間は大きくなり，$a(t)$ が減少すれば空間は小さくなる．宇宙の進化の情報はすべて，アインシュタイン方程式で決められるこの 1 つの関数に含まれている．これを次で考察する．

18.7　宇宙の力学

フリードマン方程式

平坦 FRW モデルの力学的方程式 (18.30) に小さな補正だけ行えば，空間曲率を含んだ方程式を一般化することができる．一般的な方程式は

フリードマン方程式

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = -k \tag{18.63}$$

である．ここで $\dot{a} \equiv da/dt$ で， k は (18.62) 式に現れた定数であり，その値 ±1, 0 で FRW モデルの空間幾何学の曲率を表す．よって一般相対論は宇宙の時間進化と空間幾何学を結びつける．(18.63) 式は**フリードマン方程式**と呼ばれる．このアインシュタイン方程式を 22.4 節で導出することになるが，例 18.5 で直感的な動機付けをしている．

例 18.5. 無圧力物質球の運動方程式　無圧力物質の場合には (18.63) 式に簡単な解釈をすることができる．一般的な FRW 時空 (18.62) 式の原点を囲むテスト粒子の球殻を想像しよう．共動半径座標 $r = r_s$ で球殻に座標値をつける．球殻の内側で $1 - kr^2$ を 1 に置き換えるのがよい近似となるように $r_s \ll 1$ のところにする．球殻の固有半径 $R(t)$ と内側の固有体積 $V(t)$ は

$$R(t) = a(t)r_s, \qquad V(t) = \frac{4\pi}{3}[a(t)r_s]^3 = \frac{4\pi}{3}R^3(t) \tag{18.64}$$

で与えられる [(18.62) 式と (7.29) 式を参照]．一様宇宙のエネルギー密度 $\rho(t)$ は空間の定数なので球殻の内側の物質の質量は

$$M(t) = \rho(t)V(t) = \frac{4\pi\rho(t)}{3}R^3(t) \tag{18.65}$$

である．(18.63) 式に $\frac{1}{2}r_s^2$ をかけて，(18.64) 式と (18.65) 式を使ってフリードマン方程式を書くと

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2(t) - \frac{M(t)}{R(t)} = -\frac{1}{2}kr_s^2 \tag{18.66}$$

となる.

r_s は時間の定数なので（共動座標），(18.66) 式の右辺は一定である．テスト粒子の球殻の静止質量をかけると (18.66) 式は球殻に関するニュートンのエネルギー保存の式になる．第一項はニュートンの運動エネルギーに対応し，第二項はニュートン重力ポテンシャルエネルギーに対応する．フリードマン方程式が予言する宇宙の運動はニュートン理論における無圧力物質の球殻の運動と同じである．この結果を得るには物質が無圧力であることを仮定しなければならない．そうしなければ，ニュートン理論の質量 $M(t)$ に圧力を加えなければならなくなるが，その項はフリードマン方程式にはない.

フリードマン方程式を $a^2(t)$ で割り，現在 t_0 で評価すると，曲がった FRW モデルに (18.31) 式を一般化させたものになる：

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho_0}{3} = -\frac{k}{a_0^2} \tag{18.67}$$

もし現在のエネルギー密度 ρ_0 が (18.32) 式で定義された臨界密度 ρ_{crit} よりも大きいと，宇宙は正に曲がり（$k=+1$），閉じている．ρ_0 が ρ_{crit} よりも小さければ，宇宙は負に曲がり ($k=-1$) 開いている．平坦であるためには ($k=0$)，現在の密度 ρ_0 は臨界密度と等しくなければならない．2 つのパラメータ H_0 と ρ_0 は宇宙が開いているか，閉じているか，平坦なのかを決める．次章でそれらの決定方法を吟味する.

宇宙論では現在の全密度を臨界密度の比として表して測定することが標準となっている．その比を無次元パラメータ

$$\Omega \equiv \rho_0/\rho_{\mathrm{crit}} \tag{18.68}$$

として導入する．(18.33) 式で宇宙論的流体の各成分についてこの形で表した．正に曲がった FRW モデルでは $\Omega > 1$ であり，平坦モデルでは $\Omega = 1$, 負に曲がったモデルでは $\Omega < 1$ である．よって平坦モデル（ゼロ曲率）はちょうど開いた宇宙（負曲率）か閉じた宇宙（正曲率）かの境界となっている．これが，ρ_{crit} が臨界密度と呼ばれる由縁である．現在の密度を測定し，Ω を決めれば，宇宙の曲率を知ることができるだろう．しかし，真空エネルギーの量は局所的な実験では検出できず，前章で述べた宇宙のダークマターの量も知られていないため，見えるものを調査するだけでは物質密度を決めることは不可能である．その代わり，次章では宇宙の幾何学を測定することで Ω を決める方法を考察する[6].

フリードマン方程式の空間的に曲がったモデル (18.63) の解は，宇宙流体の 3 つの成分をそれぞれについて，初等関数で表すことができ，例 18.6 に物質優勢の場合を示した（問題 18, 19 も見よ)．しかし，我々の宇宙は物質と放射，それにたぶん真空エネルギーが共存している．それでは，一般的な場合に目を向けることにしよう．定性的かつ定量的に.

---

[6] これがどういうことか，かいまみたければ，15 ページのボックスの考察を思い出せ.

例 18.6. 物質優勢 FRW 宇宙モデル　ビッグバンから十万年後からほぼ現在にわたって，宇宙の進化を支配するエネルギー密度で優勢だったのは物質だった．放射と真空エネルギーがない場合の物質優勢 FRW モデルは例として挙げるのにふさわしい．この特別な場合では，フリードマン方程式の解は以下のパラメータ方程式で表されるように閉じた形で表すことができ，図 18.7 に示した（問題 17）．正曲率モデルの場合を考えよう：

$$\left.\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(\Omega-1)^{3/2}}(1-\cos\eta) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(\Omega-1)^{3/2}}(\eta-\sin\eta) \end{aligned}\right\} \qquad k=+1, \qquad \Omega>1 \tag{18.69}$$

この閉じたモデルは $a=0,\ t=0,\ \rho=\infty$ の $\eta=0$ でビッグバン特異点から膨張する．$\eta=\pi$ の最大体積にたどり着き，$\eta=2\pi$ でふたたび $a=0$ の「ビッグクランチ」特異点に収縮する．全期間はしたがって $(\pi\Omega/H_0)(\Omega-1)^{-3/2}$ である．最大空間体積は (18.55) 式から

$$V_{\max} = \frac{2\pi^2}{H_0^3}\left[\frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}\right]^3 \tag{18.70}$$

である．

負の曲率モデルは同様に

$$\left.\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(1-\Omega)^{3/2}}(\cosh\eta-1) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(1-\Omega)^{3/2}}(\sinh\eta-\eta) \end{aligned}\right\} \qquad k=-1, \qquad \Omega<1 \tag{18.71}$$

である．このモデルも $t=0$ のビッグバン特異点から膨張するが，永遠に膨張し続ける．この 2 つのモデルは膨張するにつれて減速していく．このことは，重力の引力によって膨張が遅くなってい

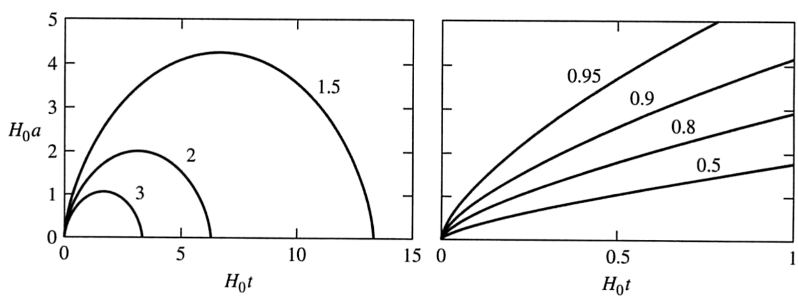


図 18.7　物質優勢 FRW モデル．(18.69) 式と (18.71) 式で表されるスケールファクタ $a(t)$ の時間依存性を，閉じたモデルの場合を左図，開いたモデルの場合を右図に示した．各曲線に $\Omega=\Omega_m$ の値をつけた．縦軸は両方の場合で同じであるが，横軸は違っている．すべてのモデルはビッグバン $t=0$ から膨張する．正曲率は最大半径に到達し，特異なビッグクランチに再収縮する．負曲率は永遠に膨張し続ける．$\Omega\to 1$ では，曲線は縦軸に近づいていく．

ると理解できる．負曲率モデルは引力から「脱出」し永遠に膨張し続けるが，正曲率モデルはそうではない．

正に曲がったモデル $\Omega > 1$ と負に曲がったモデル $\Omega < 1$ の境界にある空間的に平坦モデル $\Omega = 1$ はどうか．Ω が 1 に近づくと，閉じたモデルの存在する期間と最大空間体積はともに無限大に近づき，開いたモデルと閉じたモデルのスケールファクタは $\Omega = 1$ で発散する．その考え方は，スケールファクタが曲率半径に比例するという限られた場合に正しい．曲率ゼロは曲率半径が無限大である．しかし，349 ページで説明したように，厳密な空間的平坦モデルではその考え方は，スケールファクタの絶対的な大きさは任意であり，物理的な量はスケールファクタに依存しない．$\Omega \to 1$ の極限で，(18.69) 式または (18.71) 式のどちらをスケールしなおしても (18.37) 式になるだろう．

フリードマン方程式の一般解

FRW モデルの定性的な理解と定量的な計算をするために，スケールし直した無次元変数でフリードマン方程式 (18.63) を使って表現し直すと便利である．現在の時刻 t_0 で，次元のある変数に添字 0 をつけて区別して使い，これらのスケーリングを定義する．たとえば，現在の値 $a_0 \equiv a(t_0)$ を使い，次元のないスケールファクタの測定量を

$$\tilde{a}(t) \equiv a(t)/a_0 \tag{18.72}$$

によって定義する．(18.11) 式から，このスケールされた変数が，時刻 t で共動銀河から放たれた放射の赤方偏移 z と $\tilde{a} = 1/(1+z)$ で直接関係することがわかる．

同様に，現在のハッブル定数 H_0 の逆数として定義されるハッブル時間 t_H [(18.15) 式を参照] は時間の無次元測定量を定義するのに使われる：

$$\tilde{t} \equiv t/t_H = H_0 t \tag{18.73}$$

(18.32) 式で定義された臨界密度は密度の便利なスケールとなる．現在の密度は，(18.33)，(18.68) 式で表されるように，さまざまな Ω を定義して，この臨界密度と比較して測定される．例えば

$$\rho_r(t) = \rho_{\rm crit}\Omega_r/(\tilde{a}(t))^4 \tag{18.74}$$

等など．曲率に対しても Ω_c を

$$\Omega_c \equiv -k/(H_0 a_0)^2 \tag{18.75}$$

で定義して導入すると非常に都合がよい．この定義を使って，現時点 t_0 の量で表したフリードマン方程式 (18.63) は

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_v + \Omega_c = 1 \tag{18.76}$$

である．しかしこのエレガントな関係は Ω_c が他の Ω と違って，閉じた宇宙で負になりうるため，誤解を与えやすい．

これらの再定義の報酬はスケールされたフリードマン方程式 (18.63) であり

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right)^2 + U_{\text{eff}}(\tilde{a}) = \frac{\Omega_c}{2} \tag{18.77}$$

となる．ここで有効ポテンシャル U_{eff} [(18.36) 式と同じもの] は

$$U_{\text{eff}}(\tilde{a}) \equiv -\frac{1}{2}\left(\Omega_v \tilde{a}^2 + \frac{\Omega_m}{\tilde{a}} + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2}\right) \tag{18.78}$$

によって定義され，Ω_c は (18.76) 式から他の Ω で表される．平坦 FRW モデルに対して，(18.72) 式と (18.73) 式が考慮されると，(18.77) 式と (18.78) 式はそれぞれ (18.35) 式と (18.36) 式になる．すでに考察したように，(18.77) 式は，1 次元で運動するニュートン粒子のエネルギーの関係に似ている．この場合 $\tilde{a}$ が座標で，$\Omega_c/2$ はエネルギーである．

FRW 宇宙論モデルを構成するためには以下のことをすればよい．(1) 4 つのパラメータ $H_0, \Omega_r, \Omega_m, \Omega_v$ を決める．(2) 後ろの 3 つを使い，$d\tilde{a}/[\Omega_c - 2\tilde{U}_{\text{eff}}(\tilde{a})]^{1/2} = d\tilde{t}$ として，両辺を積分することで $\tilde{a}(\tilde{t})$ について (18.77) 式を解く（数値的に行うために本書のウェブサイトに *Mathematica* のプログラムがある）．(3) (18.73) 式で H_0 を使って，$\tilde{t}$ を t に変換し，(18.75) 式から a_0 の値を求める．その結果 $a(t)$ は

$$a(t) = \frac{1}{H_0|\Omega_c|^{1/2}}\tilde{a}(H_0 t) \tag{18.79}$$

となる．

スケールされたフリードマン方程式 (18.77) は時間の関数としてスケールファクタ $a(t)$ を決めるだけでなく，現在の年齢 t_0 も固定することができ，我々の時間の位置も決めることができる．(18.72) 式の $\tilde{a}$ の定義から，現在のこの瞬間 $\tilde{t}_0$ が $\tilde{a}(\tilde{t}_0) = 1$ であることがわかる．現在の年齢は (18.73) 式から $t_0 = \tilde{t}_0/H_0$ である．

FRW 宇宙モデルは 4 つの宇宙論パラメータ

FRW 宇宙論パラメータ

$$\boxed{H_0, \qquad \Omega_r, \qquad \Omega_m, \qquad \Omega_v} \tag{18.80}$$

で決まり，これらは，宇宙の過去の歴史と未来の運命と同様に現在の瞬間も決める．宇宙の別の性質は例 18.7 に示すように 4 つのパラメータの関数として予測することができる．観測的宇宙論のゴールは我々の宇宙がどれなのかを決める 4 つのパラメータの値を決定することである．理論的宇宙論のゴールはなぜその値をとるのかを説明することである．これら両方のゴールへ向けた進歩については次章で議論する．

例 18.7. 宇宙論パラメータの関数としての宇宙の年齢 t と $\tilde{t}$ の間の関係 (18.73) から宇宙の年齢は

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\tilde{t}_0(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_v) \tag{18.81}$$

である．無次元の関数 $\tilde{t}_0(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_v)$ は $\tilde{a}(\tilde{t}_0) = 1$ における $\tilde{t}$ の値である．この関数は再スケールされたフリードマン方程式 (18.77) を積分することで得られ

$$\tilde{t}_0(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_v) = \int_0^1 d\tilde{a}\left[\Omega_c(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_v) + \Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_v \tilde{a}^2\right]^{-1/2} \tag{18.82}$$

である．Ω_c は (18.76) 式を使って他の Ω の値から得られる．我々の宇宙では $\Omega_r \approx 8 \times 10^{-5}$ でほとんど年齢に影響を与えない． 他の Ω の関数として図 18.8 に $\tilde{t}_0$ の等高線を描いた．最も古い星の年齢は 120 億年である．宇宙はこれよりも古くなければならならず，この事実が宇宙論パラメータの値の制限の 1 つとなる．

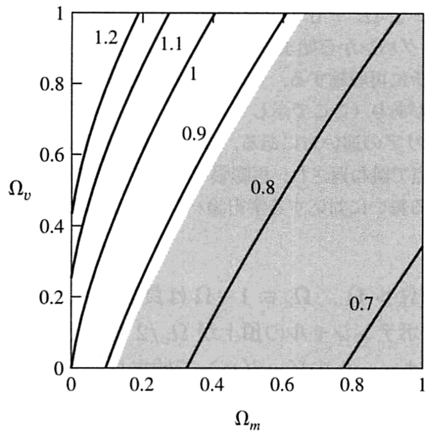


図 18.8 Ω_v と Ω_m の関数として表した宇宙年齢．ハッブル時間をかけて表した年齢 t_0 一定の等高線を示している．最も古い星の年齢は約 120 億年であり，宇宙はそれよりも古くなければならない．影の領域は，$h = 0.72$ の場合，この制限と矛盾のない Ω_v, Ω_m の領域を表している．

FRW 宇宙論パラメータのいろいろな値に対するスケールファクタの時間変化の定性的な振る舞いは，図 18.9 で示したような有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\tilde{a})$ と Ω_c の関係のプロットから読み取ることができる．これらについて考えるとき，U_{eff} と Ω_c が**ともに** FRW パラメータ Ω_v, Ω_m, Ω_r に依存していることを思い出すことは重要である．

- **開いた FRW モデルと平坦 FRW モデル** ($\Omega \leq 1$)　$\Omega_c \equiv 1 - \Omega$ は負でなく，有効ポテンシャル U_{eff} は負なので，$\dot{a} = 0$ となる転回点は存在しない．すべての負，ゼロ曲率の FRW モデル ($k = 0, -1$) は $a = 0$ のビッグバン特異点で始まって永遠に膨張する．

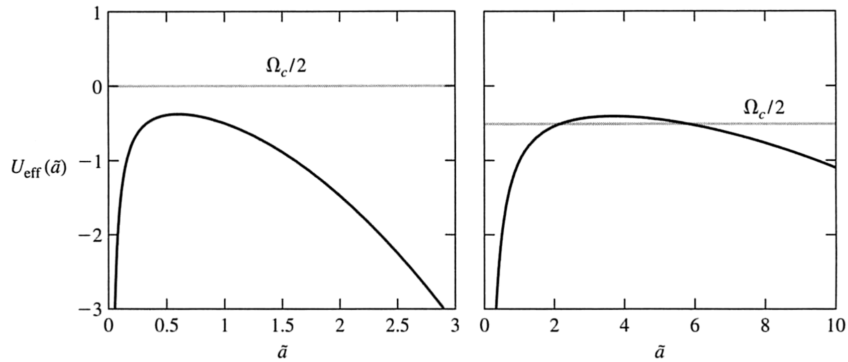


図 18.9 曲がった FRW モデルの進化の有効ポテンシャル．これらの図は，有効ポテンシャル (18.78) と $\Omega_c/2$ の関係を表した 2 つの例である．左図は我々の宇宙を近似的に表している宇宙論パラメータのポテンシャルを表している．$\Omega_v \approx 0.7$, $\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_r \approx 5 \times 10^{-5}$ であり，そのため $\Omega_c \approx 0$ となる．ここには転回点がなく，宇宙はビッグバンから始まり永遠に膨張する．右図は $\Omega_v = 0.02$, $\Omega_m = 2$, $\Omega_r = 0$ のときの関係を表している．ここには 2 つの転回点がある．宇宙は $\tilde{a} = 0$ のビッグバンから始まり，$\tilde{a} = 1$ である今日まで膨張し，最初の転回点で向きを変え，ビッグクランチに再収縮する．このときの軌跡は図 18.7 の左図に似る．同様に，正の曲率をもつ別のモデルがあり（ここで示していない），ポテンシャルは $\Omega_c/2$ の直線と交わり，$\tilde{a} = 1$ はポテンシャルバリアの遠い方にある．このようなモデルでは，宇宙は大きな半径から収縮し，大きい方の転回点で跳ね返され，再膨張する．これらのモデルにはビッグバン特異点は存在しない．これらの振る舞いに対応する宇宙論パラメータの領域を図 18.10 に示した．

- **閉じた FRW モデル** $(\Omega > 1)$　$\Omega_c \equiv 1 - \Omega$ は負なので，転回点があるかもしれないし，ないかもしれず，それはポテンシャルの頂上が $\Omega_c/2$ 線の上にあるか下にあるかによる．下にあれば，FRW モデルは $a = 0$ のビッグバンで始まり，永遠に膨張する．上にあれば，転回点は 2 つあり，FRW モデルは 2 つのタイプのうちの 1 つとなる．ビッグバン特異点 $a = 0$ から膨張して，最大半径で小さい方の転回点に当たり，$a = 0$（ビッグクランチ）の特異点に再収縮する．別の可能性は a の大きい値から収縮するモデルで，2 つの転回点の大きい方で「跳ね返り」特異にならずに，永遠に再膨張する．与えられた Ω の組に対応する可能性は $\tilde{a} = 1$（現在）が最も小さい転回点（再収縮）かまたは最大の転回点（跳ね返り）かどうかで決められる．観測によって，我々が仮定してきたダスト，放射，真空モデルの宇宙では跳ね返りは排除される（問題 25）．

図 18.10 は現代宇宙論でカギとなる図であり，ここで考察した振る舞いの形を，少ない宇宙論パラメータ Ω_v, Ω_m の平面で示している（問題 26）．

我々の宇宙に対応できうるすべての FRW モデルでは，1 つの特徴が際立っている．それはビッグバンである．一般相対性理論の予言によると，宇宙は密度無限大の特異な状態から始まった．22.3 節でみるように，それは曲率無限大の状態でもある．ビッグバン特異点は FRW 宇宙モデルの高い対称性による人工的なものではなく，現在の観測と物質の性質の自然な仮定とうまくかみ

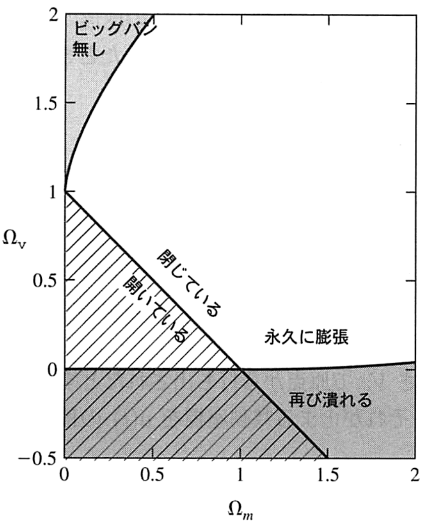


図 18.10 Ω_m-Ω_v 平面の FRW モデル．我々の宇宙がそうであるように，Ω_r が非常に小さいと仮定して，FRW モデルのいろいろな種類に対応する Ω_m-Ω_v 平面の領域を示した．平坦モデルは $\Omega_v = 1 - \Omega_m$ の対角線上にある．開いたモデルはこの線の下にあり，閉じたモデルはこれより上にある．下の方の影のついた領域は，宇宙がビッグバンから最大の大きさに膨張し，そしてビッグクランチに潰れるパラメータを表す．これより上のモデルは永遠に膨張する．左上の影のついた領域は宇宙が大きな半径から最小の半径に潰れて再膨張し，決してビッグバンにはならない．

あった一般相対論的宇宙モデルにはどんなものにもある特徴である（353 ページのボックス 18.2 を見よ）．

ビッグバンから膨張すると，どの形のエネルギーが優勢かで進化は左右されるのだが，曲がった FRW モデルは，図 18.4 左図で説明した平坦モデルと同じように，いろいろな段階を通過する．初め，(18.77) 式の空間曲率の項 $\Omega_c/2$ の寄与は放射のエネルギー密度のために小さく見える．放射を含むすべての FRW モデルは同じように始まる．その後に，図 18.7 の左図で説明した物質優勢モデルのように，放射密度が衰退し，物質密度が減少し，空間曲率の項 $\Omega_c/2$ が重要になり，ビッグクランチへ再収縮する．すべての特別なモデルは本書のウェブサイトの *Mathematica* プログラムを使って計算できる．

問題

1. [S] 340 ページの例 18.1 の干しぶどうが最初，パン生地中の平坦ユークリッド空間の直交座標 (x, y, z) の位置にある．出発時と同じ座標で干しぶどうによって占められる点に数値を刻み共動座標系を構成する．すべての時間で膨張が一様等方だと仮定して，共動座標とスケールファクタ $a(t)$ を使って平坦ユークリッド空間の線素を表せ．$a(t)$ の定性的振る舞いを焼き始めと焼きあがりの間でスケッチせよ．生地が酷い球形のスフレのようになれば，

$a(t)$ はどのように見えるか．初め生地が半径 R の球形の境界を含んでいれば境界の方程式は時間の関数としてどうなるだろうか．焼きあがったとき，境界の面積はどうなるか．

2. 宇宙膨張を表すスケールファクタが

$$a(t) = (t/t_*)^{1/2}$$

にしたがうとする．ここで t_* は定数で，t は特異点から測った固有時である．宇宙年齢は現在 140 億年であるとする．

(a) 今現在，観測されるハッブル定数の値を（年 $^{-1}$ で）求めよ．

(b) 宇宙マイクロ波背景放射の温度が 3000K となるのは何年か．

3. 計量が (18.1) 式の平坦 FRW モデルを考えよう．もし共動観測者（一定 x, y, z）が測定した時刻 t_* で粒子が速さ V_* で原点から打ち出されたとすると，漸近的に共動座標に対して静止するようになる．それが止まる共動座標を $a(t)$ の積分として表し，それが有限になる条件を考察せよ．

4. [S] ハッブル定数の現在の値を 72(km/s)/Mpc とし，宇宙が臨界密度にあるとする．光子が我々の銀河からいま放出された．この光子が 100 億光年離れた別の銀河で受信されたとすると，物質優勢が続くと仮定して，この光子の赤方偏移を求めよ．

5. [S] 宇宙が 3000K の温度で透明になって以来，宇宙背景放射が我々に向かってやってきている．その温度が 2.73K である．輻射の赤方偏移 z はいくらか．

6. [S] Ia 型の超新星爆発が $z = 1.1$ で起きた．観測された輝度が 2 ヶ月の時間スケールで高くなり，低くなった（正確には超新星の明るさのピークの半分になったときの時間差が 2 ヶ月である）．超新星の静止系において超新星の近くで仮想的な観測者が見る輝度の上下の時間スケールはいくらになるか．

7. 現在を t_0 として我々が見る光が時刻 t_e に放出されたことになる銀河を考えよう．銀河までの現在の固有距離（一定 t_0 の曲線）が

$$d = a(t_0) \int_{t_e}^{t_0} dt/a(t)$$

であることを示せ．

8. 9.2 節でシュワルツシルト幾何学の光子の赤方偏移が時間並進の対称性から生じる保存則を使うことで得られた．宇宙赤方偏移 (18.10) が計量 (18.1) の**空間**並進対称性から得られることを示せ．

9. [E] CMB 放射が物質と最後に相互作用した時刻（温度でほぼ 3000K）にさかのぼって，今現在，見えている宇宙の大きさをセンチメートルで**評価せよ**．

10. [E,C] 宇宙が膨張していくにつれて，地平も成長していく．1 つの新しい銀河が地平に入ってくるまでの時間を**評価せよ**．宇宙の歴史を通じて物質優勢と仮定せよ．

11. (a) (18.69) 式は閉じた物質優勢 FRW モデルに対するスケールファクタを時間の関数として表している．もしそこで使われているパラメータ η が時間座標として使えるならば，FRW 計量は

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

の形になることを示せ．

(b) ビッグバンとビッグクランチ，それに最大膨張の瞬間に原点で共動観測者の過去光円錐を表す η-χ 時空図を描け．

(c) ビッグクランチ以前に，空間的に有限な宇宙のすべての領域から観測者が情報を受け取る時刻はあるか．また，その観測者が見ることができないような領域は存在するか．

(d) ビッグバンからビッグクランチの間で，観測者は宇宙の円周全体を旅行することができるか．

12. **π の値の認定**　ある物語の中のことだが，π の値が $3.14159\cdots$ 以外のある値になることを宣言するために，立法府の声明文の中に法案が導入された．法案の作成者は正しいか．半径 R に対する円周 C の比がすべての円に対して，$2 \times 3.14159...$ 以外の一定になるような 3 次元空間の幾何学は存在するか．（この意味で円とは，中心と呼ばれる点から決まった距離（半径）にある点の軌跡のことである）[**ヒント：**この問題がなぜ宇宙論の章にあるのかよく考えよ]

13. 閉じた物質優勢の FRW モデルの全空間体積が最大膨張の瞬間で $10^{12}\mathrm{Mpc}^3$ であると仮定せよ．この宇宙でビッグバンからビッグクランチまでにかかる時間を年で答えよ．

14. [B] 15 ページのボックス 2.2 で，同じ大きさの物体が決まった距離にあるとき，正に曲がった宇宙，平坦宇宙，負に曲がった宇宙では見える角度がどのように違うかを調べた．大きさ s, 距離 d にある物体が張る角度を FRW 時空の各々について計算せよ．簡単のため，スケールファクタは時間と独立であることを仮定せよ（次章で膨張する場合を扱う）．その結果でボックスに書かれていたことを実証できたか．

15. [S] 線素

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{t}{t_*}\right)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]$$

によって表される一様等方な宇宙論モデルを考える．ここで t_* は定数である．

(a) このモデルは開いているか，閉じているか，それとも平坦か．

(b) これは物質優勢か．説明せよ．

(c) フリードマン方程式がこの宇宙で成り立つとして，$\rho(t)$ を求めよ．

16. FRW モデルのどのスケールファクタ $a(t)$ も現時点で

$$a(t) = a(t_0)\left[1 + H_0(t - t_0) - (1/2)q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \cdots\right]$$

の形に展開することができる．ここで q_0 は**減速パラメータ**と呼ばれる．第一次の係数がなぜハッブル定数になるのかを説明し，宇宙論パラメータで q_0 を評価せよ．

17. [S] (18.69) 式と (18.71) 式がフリードマン方程式 (18.63) の解となっていることを確かめよ．

18. **放射優勢 FRW モデル**　最初から最後までが放射優勢となっているフリードマン方程式を解いて，スケールファクタを FRW モデルの時間の関数として表せ．その答えを H_0 と $\Omega = \Omega_r$ で表せ．

19. **ドジッタ空間**　真空エネルギー ρ_v だけがある場合のフリードマン方程式 (18.63) をスケールファクタについて解き，閉じた FRW モデルを時間の関数として表せ．これらのモデルに

は初期のビッグバン特異点があるか.

20. [C] 平坦 FRW モデル (18.35) の運動方程式の閉じた形の解を，放射はないが ($\Omega_r = 0$)，物質と真空エネルギーが存在する場合に求めよ．その答えを H_0 と $\Omega_m, \Omega_v = 1 - \Omega_m$ で表せ．現在宇宙が加速するためには ($\ddot{a} > 0$) Ω_v がどれくらいでなければならないか．宇宙年齢 t_0 を H_0 と Ω_v の関数として表せ.

21. [S] 宇宙赤方偏移 (18.10) の公式が空間的に平坦でない宇宙でも成り立つことを示せ.

22. [S] 現在の地平の大きさを表す (18.47) 式を平坦 FRW モデルについて求めた．すべての FRW モデルについて同じ公式が成り立つことを示せ.

23. (a) 真空エネルギーが存在しないとき，物質と放射の存在量のどんな組合せでも FRW モデルに対して，$a(t)$ の曲がりが上に凸であること，つまり，2 階微分が負であることを示せ．このことから $1/H_0$ が常に t_0 よりも大きいことを示せ.
    (b) ゼロでない真空エネルギーが存在する場合は必ずしもそうで**ない**ことを示せ.

24. **アインシュタインの定常宇宙**　物質密度 ρ_m，および正の宇宙項 Λ に対応する真空エネルギーを含み，放射を含まない閉じた ($k = +1$) の FRW モデルを考える.
    (a) Λ の値に対して，時間が変化してもスケールファクタが変わらない臨界密度 ρ_m が存在することを示し，値を求めよ.
    (b) この宇宙の空間体積を Λ で表せ.
    (c) もし ρ_m がこの値からわずかにずれると，スケールファクタは時間とともに変わる．この変化によって，静止宇宙に戻るか，それとも発散するか.

    コメント： これはアインシュタインの静止宇宙であり，このためにアインシュタインは宇宙定数を導入した.

25. [C] 宇宙が小さな半径で跳ね返り，そのときすでに元素合成が起きる温度 $T \sim 10^{10}$K に達しているような Ω_v の値は**あるか**．$\Omega_r = 8 \times 10^{-5}$ と $\Omega_m = 0.3$ を仮定せよ.

26. [A] 我々の宇宙で近似的に $\Omega_r = 0$ であると仮定して，図 18.10 において，FRW モデルのいろいろな振る舞いの境界を定める Ω_v と Ω_r の間の代数的な関係を求めよ.

27. [C] 跳ね返りモデル
    (a) (18.77) 式で定義される有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(a)$ の形に対して，それが作られる状態方程式 $p = p(\rho)$ が存在することを示せ．$U_{\text{eff}}(a)$ で p と ρ の式を（パラメータで）表せ.
    (b) 閉じたはねかえり宇宙ができるポテンシャル $U_{\text{eff}}(a)$ の概形を描け．その宇宙は最大体積と最小体積の間を永遠に振動する．今日と，例えば放射の温度が $k_B T \sim 10$MeV の間の宇宙の進化にその効果が見つからないようにするためには，そのポテンシャルはどんな性質を持たなければならないか．10MeV はビッグバンで原子核が合成されるより少し上の温度である（元素合成については 372 ページのボックス 19.1 を見よ．だが，その情報は問題を解くには必要ない).
    (c) 仮想的な物質の $\rho + 3p$ は一般的に非常に大きな密度で負になることを示せ.

    コメント： (c) の部分の結果を翻ってみれば，もし $\rho + 3p$ が常に正ならば，ビッグバン特異点が存在したことになる．この特異点は特異点定理の一例となる（問題 28)．原子核密度以下で負の圧力**または**エネルギー密度をもつ物質の形態は知られていない.

28. **FRW 特異点定理**　FRW モデルの枠組では，$\rho + 3p$ が常に正であれば，過去にビッグバン特異点が存在したであろうということを示せ．

29. [S] 真空エネルギーについて我々は多くのことを知らない．それが負であるとしよう．物質や放射を含むすべての FRW モデルは潰れてビッグクランチで終わることを示せ．

30. [N] **開いた FRW 宇宙のスライスを埋め込む**
    (a) (18.60) 式の開いた FRW 計量の $t =$ 一定，$\theta = \pi/2$ スライス全体は平坦 3 次元空間の軸対称面として埋め込むことができないことを示せ．
    (b) 次の式は負の定曲率を持つ簡単な軸対称計量である：

$$d\Sigma^2 = du^2 + \cosh^2 u \, d\phi^2$$

これは，$u = 0$ で始まる u の限られた領域でのみ，平坦 3 次元空間中の軸対称面として埋め込むことができることを示せ．

コメント： 微分幾何のマインディングの定理（Miding's theorem）によれば，すべての定曲率面は同じ局所幾何学をもつ．(b) の曲面はしたがって，(a) で考察した曲面の一部の埋め込みである．幾何学は一様なので，どの部分かということはこの場合関係ない．これは図 18.6 に示された曲面である．

31. 始めから終わりまで物質優勢の FRW モデルの年齢を H_0 と $\Omega = \Omega_m$ の関数として求め，(18.82) 式を評価せよ．どの H_0 の値に対して，開いたモデルが閉じたモデルより古いか．得られた解析解は図 18.8 と一致するか．

32. 年齢の式 (18.82) と似た積分公式を使って，粒子地平 $d_{\mathrm{horiz}}(t_0)$ までの現在における距離を宇宙論パラメータで表せ．

33. [N] 問題 32 で得られた現在の地平までの距離の公式を宇宙論パラメータ $\Omega_v = 0.7$, $\Omega_r = 8 \times 10^{-5}$, $\Omega_m = 0.3$, $H_0 = 72(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$ の場合について評価せよ．答えを Gpc で表せ．このパラメータは現時点での我々の宇宙を最もよく特徴づける値である．

第19章

どの宇宙，そして，なぜ？

我々の宇宙はFRW宇宙モデルの4つパラメータ族のどれに最もよく合うのだろうか．そしてなぜそうなるのだろうか．これらの疑問は観測的宇宙論と理論的宇宙論における2つの中心的課題であり，この章で簡単に紹介する．FRWモデルを定義する4つのパラメータ H_0, Ω_r, Ω_m, Ω_v のうち [(18.80) 式を参照]，2つだけがこれまで述べてきた観測によって決まる．17.2節で述べたように，1つ目がハッブル定数 $H_0 = 72 \pm 7$（km/s）/Mpc であり，銀河の赤方偏移とそこまでの距離の測定から求められる．2つ目が臨界密度に対する放射のエネルギー密度の比 Ω_r である．宇宙背景放射光子のエネルギー密度は (18.24) 式を通じて放射の温度からわかり，それは $h \equiv H_0/[100(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}] = 0.72$ では

$$\Omega_{CMB} = 2.5 \times 10^{-5} h^{-2} \approx 5 \times 10^{-5} \tag{19.1}$$

に相当する．質量のないニュートリノを含めると $\Omega_r \approx 8 \times 10^{-5}$ になる．重力子（グラビトン）はよくわからないが，たぶん Ω_r にほんの少ししか影響しないだろう．

バリオン（陽子や中性子のような粒子）個数密度は，元素の原初量とビッグバンでどのように作られたのかを示す理論から正確に決められる（ボックス19.1を見よ）． 対応する Ω は

$$\Omega_{\mathrm{baryon}} \approx 0.04 \tag{19.2}$$

である．この値は Ω_m の下限になり，非バリオンダークマターが存在すれば，かなり大きくなる．

しかしこれらの既知の構成物の他に，ダークマターと真空エネルギーがあるが，重力的な効果でしかその存在を知ることができない．Ω_m と Ω_v の値を決めるために，宇宙の中で物質がどのように運動するのかを研究して，宇宙の時空幾何学を大きなスケールで測定しなければならない．これ以降の節では2つの実例を述べることにする．遠い超新星爆発の観測に基づくもの，もう1つは宇宙背景放射の観測に基づくもので，2つ目の方法はすでに15ページのボックス2.2で簡単に述べた．執筆時では，これらの2つの測定値は他の測定と併せて $\Omega_v \approx 0.7$, $\Omega_m \approx 0.3$ になっている．執筆時で「売出中」の宇宙論パラメータは $H_0 \approx 72(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$, $\Omega_r \approx 8 \times 10^{-5}$, $\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_v \approx 0.7$ になるだろう．特にこれらの数値は空間的に平坦な宇宙に合う．空間が正に曲がっているのと負に曲がっているものとのちょうど境界にある．

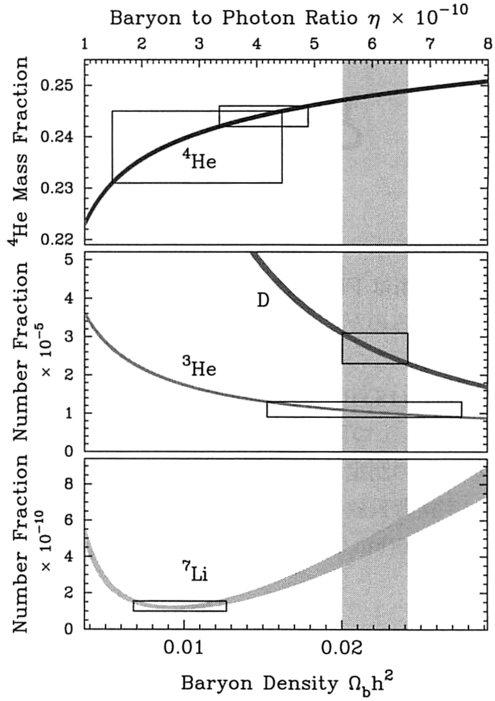
ボックス 19.1 ビッグバン元素合成

極初期の宇宙では原子や原子核は存在しなかった．ビッグバン後 2 秒以前で放射の温度は，原子核の結合エネルギーである MeV スケールよりもはるかに高く，原子の結合エネルギーである keV スケールよりも高かった [(18.42) 式を参照]． 現存する原子や原子核はそれらを構成していた電子や陽子，中性子に即座に分解してしまったであろう．今日の星や惑星の中の元素はいつ，どこで，どのようにして作られたのであろうか．周期表の Li よりも重い元素のほとんどすべては星の中の熱核燃焼の後にできた [12.1 節を参照]．しかし， H, He, Li 同位体のほとんどはビッグバン後の最初の数分に起きた核反応によって作られたのだ．このときの温度はこれらの核が壊れないほどに下がっていた．ビッグバン後，数分で合成された元素の相対量は宇宙論パラメータに依存する．これらの相対原初量は今日，組成がほとんど変わっていないと思われている数ヶ所で測られている．例えば，古い星や近くの低質量銀河などであるが，遠い銀河の端でも遠くにあるクェーサからの光が通過して生じる吸収線によって元素が検出されている．これらの測定は，ビッグバンにおける物理学や宇宙論パラメータのもっとも重要な証拠となっている．

ビッグバン元素合成から予言された相対量は，元素合成の過程が始まり，核反応の速度と宇宙膨張の速度が競合している間の物質の組成に依存する．これは 348 ページのボックス 18.1 で簡単に述べた．ビッグバン後 1 秒以内では，物質は自由陽子，中性子，電子，陽電子，ニュートリノであり，強い相互作用と弱い相互作用によって平衡状態にあった．この時期，これらの反応は膨張よりもずっと速く，1 秒ほどの短い時間内でさえも十分平衡になれた．

平衡条件によって陽子と中性子の初期の相対量は固定される．たとえば，中性子は $n \to p + e^- + \bar{\nu}$ のような反応によって陽子に崩壊する．しかし，中性子も陽子から $\bar{\nu} + p \to n + e^+$ のような反応によって作られる．平衡にある陽子と中性子の個数相対比は，作られる中性子の数が壊される数とバランスをとる値になる．

平衡条件からは中性子と陽子の全個数を固定することができない．バリオン数はここで関係する MeV のエネルギー以下で保存し，このときバリオンのうち，陽子と中性子だけが存在していた．したがって元素合成の過程は初期宇宙で全バリオン数に依存する．バリオン数の便利で局所的な測定値は光子個数密度に対するバリオン個数密度 η で



ある．元素合成の時期から現在 [a] までほぼ同じであることがわかっており Ω_{baryon} の値と直接関係がある．初期宇宙において η と相対量を決め平衡状態からスタートすると，宇宙が膨張し冷えていく過程で，原子核量の時間発展を高い精度で予言することができる．典型的な原子核の結合エネルギーの 1/10 にまで温度が下がると，陽子と中性子は結合して原子核ができ，他の核と核融合してさらに別の原子核ができる．3 分後に温度はどんな原子核反応よりもずっと低くなり，この過程は終わり元素の原初量は固定される．計算は非常に複雑であるが，正確な結果はすっきりと図に表せ，現在の観測によって決まるエラーボックスとともに示されている（3 つの図のスケールが全然違うことに注意）．水素の次に軽く安定な原子核 ^{4}He はビッグバンの勝者である．バリオン数の広い範囲に渡り，宇宙はビッグバンから質量で 76% の水素と 24% のヘリウムをともなって現れ

[a] 黒体ガスである光子の個数密度は温度の 3 乗に比例するという事実からこのことを示してみよ．

た．重水素 D や ^{3}He, ^{7}Li も作られたが，ずっと少なかった．しかし，この図が示すように，^{4}He と対照的に，これらの元素の量は η や，同じ意味の Ω_{baryon} に敏感である．これらの観測には大きな統計誤差があることがことが知られているので，Ω_{baryon} の推測値の間の大まかな一致は通常ビッグバン元素合成理論の確信の 1 つとして数えられ，ビッグバンそれ自身の証拠の内で最も強い分野の 1 つである．図中の影のついた D の量は，クエーサからの光が途中にある銀河円盤の端を通るときに生じる吸収線から測定されたものであるが，たぶん最も信頼できるであろう．それは，$h \sim 0.7$ として

$$\Omega_{\mathrm{baryon}} \approx 0.04 \tag{a}$$

である．

19.1　宇宙の探査

赤方偏移–等級関係

遠い光源の赤方偏移の測定値から光が放射されたときのスケールファクタの値と今日の値を関係づけることができる [(18.11) 式を参照]．光源の見かけの等級は逆 2 乗則（または曲がった時空におけるその一般化）によって距離と関係づけられる．つまり光が放たれた時刻と関係がつく．標準光源の赤方偏移と等級を測定すると，スケールファクタを過去の時間の関数として調べることができ，宇宙論パラメータを決められる．

17.2 節で平坦空間の逆 2 乗則 (17.9) により標準光源のフラックスの観測値と距離が関係づけられた．ハッブルの法則 $z = H_0 d$ （この章を通じ $c = 1$ 単位系を使う）と併せると，フラックス f と赤方偏移 z の関係が

$$\frac{f}{L} = \frac{H_0^2}{4\pi z^2} \tag{19.3}$$

赤方偏移–等級関係

として予想できる．これは**赤方偏移-等級関係**の一例である．天文学ではフラックスは見かけの等級で測られる [(17.11) 式を参照]．この関係の導出において空間が平坦であることを仮定し，幾何学のあらゆる時間発展は無視した．こうすることは光が我々のところにすぐに到達できるような近傍の光源に対してよい近似となっている．そのような光源からの光の伝達距離は空間が曲がっている距離スケールよりも短く，ハッブルの法則が十分成り立つほど近い．

しかしながら，ずっと遠くにある標準光源に対しては，宇宙の空間曲率のために (19.3) 式からずれると予想される．もし標準光源からの光が宇宙膨張が大きく作用するほど時間をかけてやってくればずれが生じることが予想される．これらのずれの観測は宇宙論パラメータの測定に使える．

図 19.1 は赤方偏移–等級関係を補正するために必要な幾何学を示している．光度 L （エネルギー/秒）を放つ光源の世界線がこの図の真中にある．時刻 t_e で時間間隔 δt_e にわたり，光源から振動数 ω_e で放たれた光子を考えよう．ある共動距離離れた位置にいる観測者が t_0 で放射のフラックスを測定する．受信時，放たれた光子は振動数 ω_0 に赤方偏移を受け，時間間隔も δt_0 に広がり，面積が観測者からの距離によって決まる球面に広がる．球の面積が $4\pi d_{\mathrm{eff}}^2$ であるような有効距離 d_{eff} を定義する．これは，空間が平坦でない限り，光源から観測者までの距離ではない．$\omega_0 = \omega_e/(1+z)$ と $\delta t_0 = (1+z)\delta t_e$ は (18.11) 式と (18.9) 式から得られる．エネルギーフラックス f は，光子のエネルギーが放出されたときよりも減り放出さたときよりも振動しないため，平

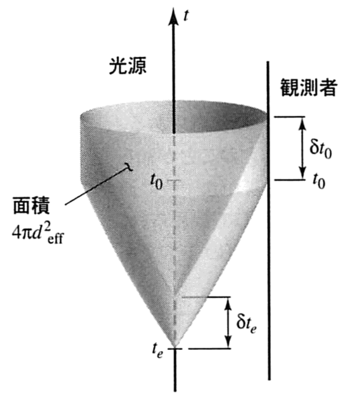


図 19.1　FRW モデルのフラックスと距離の関係．光度 L で光を放つ光源の世界線がこの図の中心にある．この光源のフラックスを測定する共動観測者の世界線は右にある．ともに，一様面上で静止している．時刻 t_e に光源から δt_e の間隔で放たれた光は観測者に時刻 t_0 で δt_0 の間隔で届く．この光は球面上に分布し，その球面の面積 $4\pi d_{\mathrm{eff}}^2$ によって有効距離 d_{eff} を定義する．受信時，光子は赤方偏移を受け，振動数は放射されたときよりも小さくなっている．各々の効果のため通常のフラックスは逆 2 乗則により $1+z$ 倍小さくなり，フラックスは (19.4) 式になる．

坦空間のときよりも**減っている**．よって

$$f = \frac{L}{4\pi d_{\mathrm{eff}}^2}\frac{1}{(1+z)^2} \tag{19.4}$$

である．FRW モデルの赤方偏移–等級関係を求めるためには，d_{eff} を赤方偏移 z と宇宙論パラメータで表しさえすればよい[1]．平坦，物質優勢 FRW モデル $(\Omega_r = 0, \Omega_m = 1, \Omega_v = 0)$ はよい例となる．幾何学は線素 (18.5) によって表され，スケールファクタは $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ である [規格化 $a(t_0) = 1$ した (18.37) 式を参照]．観測者は発光銀河から共動座標距離 $r = R$ 離れているとしよう．空間幾何学は平坦なので，時刻 t_0 における球の面積はちょうど $4\pi a^2(t_0)R^2$ であり，よって $d_{\mathrm{eff}} = a(t_0)R = R$ である．光が t_e と t_0 の間の時間内にヌル曲線上 $-dt^2 + a^2(t)dr^2 = 0$ を共動距離 R 進む．したがって，(18.6) 式と (18.7) 式とちょうど同じように，この関係を積分すると

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{eff}} &= a(t_0)\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = 3t_0\left[1-\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right] = 3t_0\left[1-\left(\frac{a(t_e)}{a(t_0)}\right)^{1/2}\right] \\ &= \frac{2}{H_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \end{aligned} \tag{19.5}$$

となる．上式の 1 行の 2 番目の等式は $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ を使い，4 番目の等号では赤方偏移の定義 (18.43) とハッブル定数 (18.11) を使った．平坦幾何学において d_{eff} は現在の光源の距離 d_0 に一

[1] **光度距離** $d_L = d_{\mathrm{eff}}(1+z)$ を定義すると逆 2 乗則が平坦空間で形として成り立つので便利である．しかし赤方偏移と空間幾何学の要素を別にわける方がよい．

致する．したがって，小さな z の値では，赤方偏移と距離の関係式はハッブルの法則 $z=H_0d_0$ になるが，大きな値では時空曲率の効果が重要となる．

$d_{\rm eff}$ として (19.5) 式を逆 2 乗則 (19.4) に代入すると，観測されるフラックス，赤方偏移，ハッブル定数の間の関係が得られる：

$$\boxed{\frac{f}{L}=\frac{H_0^2}{16\pi}\frac{1}{(1+z)[(1+z)^{1/2}-1]^2}\qquad (\text{平坦，物質優勢})} \tag{19.6}$$

赤方偏移–等級関係

これは，z が小さいとき，正しく (19.3) 式になるが，$z\approx 1$ 以上のときには，(19.3) 式とはかなり違う．もし より大きな赤方偏移で測定された標準光源の見かけの等級が (19.6) 式とよく合えば，宇宙は空間的に平坦で物質優勢であると結論するであろう．

0 でないすべての Ω と平坦でない空間曲率の一般的な FRW モデルにおけるフラックスと光度の関係を求めるのは代数的に複雑であるが，原理的には少しも困難ではない．逆 2 乗則 (19.4) はまだ成り立つが，有効距離 $d_{\rm eff}$ だけが違う形になる．赤方偏移と宇宙論パラメータで表された $d_{\rm eff}$ を求めるために，(18.60) 式の形で書かれた 3 つの空間曲率に対する線素から始めよう．銀河から放たれた光が我々までやってくる時間内に広がる球の面積が $4\pi d_{\rm eff}^2$ となるように有効距離 $d_{\rm eff}$ を定義する．有効距離は光線が進む座標距離 χ を使って

$$d_{\rm eff}=a(t_0)\left\{\begin{array}{l}\sin\chi\\ \chi\\ \sinh\chi\end{array}\right\}=\frac{1}{H_0|\Omega_c|^{1/2}}\left\{\begin{array}{l}\sin\chi\\ \chi\\ \sinh\chi\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{閉じた宇宙}\\ \text{平坦宇宙}\\ \text{開いた宇宙}\end{array}\right\} \tag{19.7}$$

によって表される（空間的に平坦な場合で χ は r と記号が違うだけであることを思い出せ）．ここで，(18.75) 式は $a(t_0)$ を宇宙論パラメータで表すために使った．それは宇宙論パラメータで χ を表すためだけにある．すべての 3 つの線素 (18.60) で，半径方向の光線は $ds^2=-dt^2+a^2(t)d\chi^2$ の曲線上を進む．光が進む座標距離は発信と受信の時刻をちょうど (18.7) 式において R を χ で置き換えたような式によって関係づけられる．これは

$$\chi=\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)}=\int_{a(t_e)}^{a(t_0)}\frac{da}{a\dot{a}(a)} \tag{19.8}$$

と書くことができる．これを，(18.72) 式と (18.73) 式で導入される無次元変数 $\tilde{a}$ と $\tilde{t}$ を用いて書き直す．再スケールされたフリードマン方程式 (18.77) を使い， $\dot{a}$ を $\tilde{a}$ と Ω で表す．$a(t_e)/a(t_0)$ を (18.11) 式を使い赤方偏移 z で表す．宇宙が発光時刻と現在の間で膨張している ($\dot{a}>0$) と仮定すると

$$\chi(\Omega_r,\Omega_m,\Omega_v)=|\Omega_c|^{1/2}\int_{(1+z)^{-1}}^{1}\frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}[\Omega_c-2U_{\rm eff}(\tilde{a})]^{1/2}} \tag{19.9}$$

となる．ここで Ω_c と $U_{\rm eff}(\tilde{a})$ はそれぞれ (18.76) 式と (18.78) 式によって他の Ω を使って表される．(19.9) 式を (19.7) 式に代入し，それを (19.4) 式に代入すると，宇宙論パラメータの関数として，赤方偏移 z にある光源のフラックスと光度の関係が得られる．フラックスと光度を見かけの等級と絶対等級に変換することで，赤方偏移–等級関係が得られる．

超新星 Ia 型が標準光源として使えることは 17.2 節で述べた．図 19.2 は Riess et al. (1998) と Perlmutter et al. (1999) のデータを合わせたもので，赤方偏移–等級関係を示し，Ω_m と Ω_v

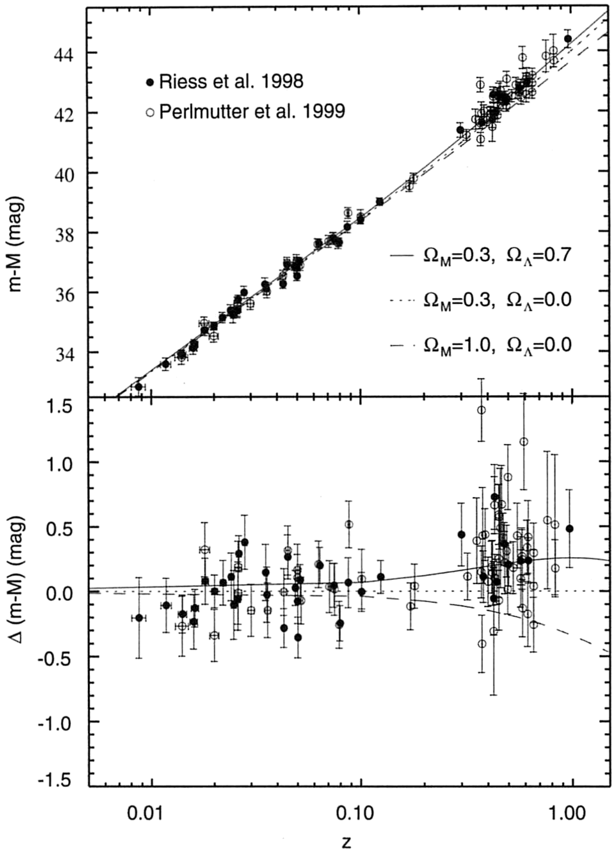


図 19.2 High-Z SN Search Team（Riess at al. 1998）と Supernova Cosmology Project（Perlmutter et al. 1999）によって測定された超新星 Ia 型の赤方偏移–等級関係．横軸は z である．縦軸は超新星の見かけの明るさのピークと，17.2 節で説明したように，較正された絶対等級のピークの差である．この距離指数は，329 ページで説明したように，f/L の対数測定値である．3 つの代表的な理論曲線が Ω_m と Ω_v（ここでは Ω_V と記されている）の値を変えて示されている [Ω_r は小さく [(19.1) 式を参照]，曲線にほとんど影響を与えない]．上図と下図は同じデータであるが，下図ではデータが観測値と $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_v = 0$ モデルの予測値の差でプロットされている．下の曲線は (19.6) 式で計算した $\Omega_m = 1$, $\Omega_v = 0$ の FRW モデルの予測である．データはこの物質優勢平坦 FRW モデルと合わず，宇宙定数が 0 でないモデルと合う．

（図中では Ω_Λ と表してある）のいろいろな値に対して (19.4) 式の代表的な曲線も引いた．z が 1 に近い値で，平坦空間逆 2 乗則からのずれは大きくなり，宇宙論パラメータからの情報が得られる．この図のデータは真空エネルギーが 0 でないこと，それに関連した宇宙定数の証拠となっている．

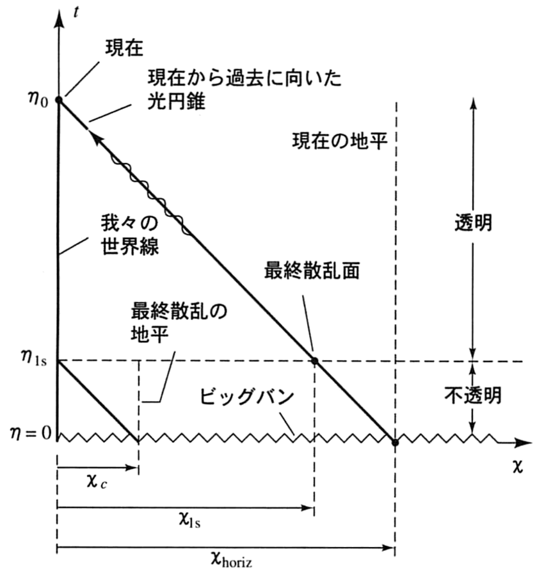


図 19.3 FRW モデルの η-χ 図．t の代わりに (18.44) 式で定義される共形時間 η を使うと，半径方向の光線は 45° の直線上を運動する．3 つの重要な時刻を示した．つまり，現在の瞬間 η_0, CMB 光子の最終散乱の時刻 η_{ls}, ビッグバン $\eta = 0$ である（縦軸は正しくスケールされておらず，現実には η_{ls} は η_0 の数パーセントにすぎない）．現在の瞬間から逆に向いた光円錐とビッグバンの交点で，現在の粒子地平 χ_{horiz} の座標半径を定義する．$\eta = \eta_{ls}$ との交点で最終散乱面の座標半径 χ_{ls} を定義する．これは CMB 光子の起源となる球面で，過去光円錐に沿って今日我々のところにやってきている．原理的に情報は，因果律と矛盾なく $\chi < \chi_{horiz}$ のすべての点から受け取ることができる．しかし，宇宙は η_{ls} 以前で電磁波に対して不透明であり，χ_{ls} は光で見える宇宙を定義する（ニュートリノやグラビトンではもっと初期の宇宙が見えるだろう）．座標半径 χ_c はビッグバンの時刻と最終散乱の時刻の間を光が伝わることのできる最大の距離を定義し，これはちょうど地平半径 η_{ls} である．

CMB 非等方性から宇宙論パラメータ

図 17.12 に示した宇宙背景放射における小さな温度非等方性は宇宙論的な情報を豊富に含んでいる．十分正確に測定すれば我々の宇宙に最もよく合う FRW モデルのすべてのパラメータを決めることができる．非常に詳細にわたるので，ここではすべて述べることはできないのだが，宇宙が開いているか閉じているかの質問に CMB 非等方性がどのように答えることができるかを示すことでそのアイディアを説明する．

CMB の非等方性は，放射がほぼ 3000K で物質と最後に散乱されたとき，電子と原子核が結合して中性原子になったとき，放射の温度揺らぎから生じる（348 ページのボックス 18.1 を見よ）．その後，宇宙は放射に対して透明になる．今日たどり着いた CMB 光子は最終散乱球面（図 17.12 を見よ）上のあらゆるところから我々に向かって出発した．今日見える CMB の非等方性は最終散

乱面上の温度揺らぎの像である．角度サイズは最終散乱の時刻における物理的な大きさに依存している．しかし，それ以来 光が 130 億年かけてやってくる宇宙の幾何学にも依存する．図 17.12 のような温度揺らぎの地図は FRW モデルの時間発展と幾何学を通したこの最終散乱面の図である．そこに宇宙論パラメータを決めるために CMB の非等方性を使えるのではないかという可能性がある．

CMB 非等方性の角度サイズと宇宙の幾何学の間の関連は 15 ページのボックス 2.2 で定性的に述べた．我々はいまこの関連性を定量的に議論することができる．簡単のため，最終散乱において CMB のある特徴的なサイズ Δs はその起源の理論から既知であるとする．今日この特徴的な像の角度サイズ $\Delta\phi_s$ が小さいとして，このサイズを一般的な FRW モデルから計算しよう．FRW 線素を (18.60) 式の形で書く．我々の世界線が $\chi = 0$ にあると仮定し，最終散乱の球を $\chi = \chi_{\rm ls}$ で表す．座標は，この特徴的なものが最終散乱面の赤道 $\theta = \pi/2$ 内にあると仮定する．この特徴の先端から出た光が ϕ 一定の半径方向に沿って伝わってくるので，角度 $\Delta\phi_s$ は赤道で物理的長さが間隔 Δs の角度座標長さ ϕ である．具体的に表すと

$$a(t_{\rm ls})\Delta\phi_s \left\{ \begin{array}{c} \sin\chi_{\rm ls} \\ \chi_{\rm ls} \\ \sinh\chi_{\rm ls} \end{array} \right\} = \Delta s \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{閉じた宇宙} \\ \text{平坦な宇宙} \\ \text{開いた宇宙} \end{array} \right\} \tag{19.10}$$

である．ここで $t_{\rm ls}$ は最終散乱の時刻である．$a(t_{\rm ls}) = a(t_0)[a(t_{\rm ls})/a(t_0)] = a(t_0)/(1+z_{\rm ls})$ とおくと

$$\Delta\phi_s = (1+z_{\rm ls})\frac{\Delta s}{d_{\rm eff}} \tag{19.11}$$

となる．ここで，$d_{\rm eff}(z_{\rm ls}, H_0, \Omega_r, \Omega_m, \Omega_v)$ は (19.7) 式で表され， $z_{\rm ls}$ は最終散乱面の赤方偏移である．赤方偏移は宇宙論モデルのパラメータに依存する．なぜなら，再結合に含まれる過程の速度は宇宙膨張と競合するからである（348 ページのボックス 18.1 を見よ）．しかし詳細な計算によれば最終散乱面の赤方偏移は $1 + z_{\rm ls} \approx 1100$ と見積られ，宇宙論パラメータと独立で，約 3000K の温度に対応する．以下ではこの値を仮定する．したがって，長さ Δs の特徴的なものによって張られる今日の角度 $\Delta\phi_s$ は $d_{\rm eff}$ を通じて宇宙論パラメータの関数になる．

宇宙は CMB 放射が我々のところまでやってくる期間ずっと物質優勢であったと近似できる．純粋に物質優勢宇宙 ($\Omega_v = \Omega_r = 0$) の場合，角度サイズと空間曲率の間の関係を素直に分析できる．(19.11) 式の有効距離 $d_{\rm eff}$ は (19.7) 式と (19.9) 式で与えられる．物質優勢宇宙で， (19.9) 式の $\tilde{a}$ のどんな値でも，閉じた宇宙の場合 （$\Omega_m > 1$） の分母は開いた宇宙の場合 （$\Omega_m < 1$） よりも大きい．それに対応して (19.9) 式によって定義される角度 χ は閉じた宇宙の方が開いた宇宙よりも小さくなる．正の χ に対して $\sin\chi < \sinh\chi$ が成り立つので，(19.7) 式と (19.10) 式，(19.11) 式から $d_{\rm eff}$ は閉じた宇宙の方が開いた宇宙よりも小さくなる．このことと (19.11) 式から

$$\Delta\phi_s^{\rm open} < \Delta\phi_s^{\rm flat} < \Delta\phi_s^{\rm closed} \tag{19.12}$$

となる．よって，宇宙背景放射に見られる，物理サイズが既知の特徴的なものの角度サイズを測定することにより，宇宙が開いているか，平坦か，閉じているかを知ることは原理的に可能である．

現実的な CMB の非等方性ははっきりと決まった大きさをもたないので，スペクトルが重要になる（図 17.12 と 15 ページのボックス 2.2 を見よ）．宇宙論パラメータの情報は，観測された角度

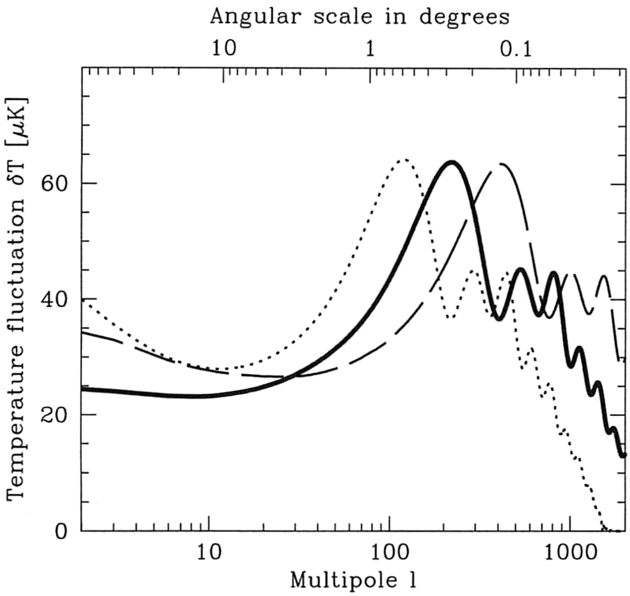


図 19.4 CMB の温度揺らぎの角度スペクトルの理論予測．縦軸は $\delta T \equiv T[\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi]^{1/2}$ である．これは与えられた多重極 ℓ（下のスケール）または角度スケール（上のスケール）に対する温度揺らぎの測定である．2 つのすべての曲線は最終散乱時で揺らぎのスペクトルが共通であるだけでなく $\Omega_{\rm baryon} = 0.04$, $\Omega_m = 0.23$, $h = 0.72$ も仮定しており，Ω_v の値だけが違う．太い曲線は $\Omega_v = 0.7$（近似的に平坦），破線は $\Omega_v = 0$（開いた宇宙），点線は $\Omega_v = 1$（閉じた宇宙）である．開いた宇宙の最も高いピークは，近似的に平坦な場合よりも小さい角度スケール（大きな ℓ）にある．平坦な場合の角度スケールは閉じた場合よりもさらに小さく，これらはすべて (19.12) 式から期待されるものである．CMB の非等方性を測定すると，宇宙は開いているか閉じているかを決めることができ，他の宇宙論パラメータも同様に決められる．

スケールの統計量として含まれている．中心となる量は温度非等方性の**相関関数** $C(\theta)$ であり以下で定義される．$\Delta T(\vec{n})/T$ を，単位ベクトル $\vec{n}$ を向いた CMB 温度の平均値からのずれを表す関数とする．互いに，固定された角度 θ をなす 2 つのベクトル $\vec{n}$ と $\vec{n}'$ をとる．2 つの $\Delta T/T$ の積の全天に渡った平均したものとして相関関数 $C(\theta)$ を定義する．具体的に

$$C(\theta) \equiv \left\langle \frac{\Delta T(\vec{n})}{T} \frac{\Delta T(\vec{n}')}{T} \right\rangle \tag{19.13}$$

である．ここでブラケットは $\vec{n}\cdot\vec{n}' = \cos\theta$ を保ったまま，$\vec{n}$ と $\vec{n}'$ について全天平均をとることを表す．

相関関数の情報は，ほとんどの場合ルジャンドル多項式[2]の多重極展開を通じて有効に引き出さ

[2] 始めてジャンドル多項式に出会った読者のために言うと，これは電磁気や量子力学のほとんどすべての教科書で説明されている直交多項式の 1 つである：$P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$, $P_2 = (3\cos^2\theta - 1)/2, \ldots$ ルジャンドル多項式による展開は，フーリエ級数を線の間隔（周期）になく球面に適用したようなものである．

れる：

$$C(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{19.14}$$

係数 $C_\ell, (\ell = 0, 1, 2, ...)$ は上で定義される．もし角度スケール $\Delta\theta$ （ラジアンの単位）で著しい特徴があれば，C_ℓ は $\Delta\theta$ の逆数と関係のある ℓ の値で大きな値をとる．たとえば，(19.12) 式から，ある特徴的なスケールのものは開いた宇宙よりも平坦な宇宙で**小さい** ℓ に現れなければならないことがわかる．図 19.4 は C_ℓ の理論的な予測を示し，ちょうどこの効果を表している．このように，宇宙背景放射の非等方性の測定から我々が開いた宇宙にいるのか閉じた宇宙にいるのか平坦な宇宙にいるのかを決めることができる．執筆時，15 ページのボックス 2.2 で説明したような実験から得られた証拠は宇宙の空間幾何学が平坦であることと整合性がある．

19.2　宇宙の説明

観測の証拠から，宇宙は数千メガパーセクのスケールで近似的に一様等方であり，開いた FRW モデルと閉じたモデルの境界である，空間的に平坦に近い宇宙であることがわかっている．さらに，観測は，初期宇宙が今日よりもずっと一様等方であったことを示している．そのような著しく単純な描像は空間と時間の最も大きなスケールで現れる．観測的宇宙論の成功から必然的に我々の宇宙は**なぜ**このような単純な性質をもっているのかという質問が生じる．

一様等方かつ空間的に平坦な宇宙はアインシュタイン方程式で許される唯一の宇宙モデルではない．たとえばゼロ空間曲率 FRW モデルは大きな負の曲率から大きな正の曲率まで変わる可能性のある連続体のたった 1 点に過ぎない．アインシュタイン方程式は，我々が全く存在しえないような**非**一様**非**等方宇宙論を多くの可能性として含んでいる．我々の宇宙を表す解がどれなのかは初期条件に依存し，究極には宇宙論はこの初期条件の理論を必要とする．ビッグバンでは量子重力が重要なのだが [(1.6) 式を参照]，初期条件は宇宙の量子波動関数を意味する．これらに関する**量子宇宙論**の話題は、本書の範疇を超える．

因果律と地平

宇宙の歴史の過程で生じる物理過程は，今，我々に見えるものがなぜそうなっているのかを説明するのに役立つ．たとえば，重力が常に引力であり，ものが集まる性質によって，初期宇宙にあったごく小さな密度揺らぎが大きくなり，今日見える銀河や星となる物質の集合体ができることが説明できる．

しかし，宇宙の歴史を通じて起きている力学的な過程によって宇宙を説明しようとすると根本的な障害が待ち構えている．これを図 19.5 に説明した．光はビッグバン以来有限の距離しか進めず，**因果的**物理過程はこの半径の体積内でだけ作用する．物理過程で宇宙背景放射の著しい等方性を説明するためには，今日見える最終散乱面全体が，放射と物質が最後に散乱した $t_{\rm ls} \sim 400000$ 年（問題 9）で因果的に接触していなければならない．本当にそうかどうかは宇宙がその時刻以前にどのように膨張していたのかによる．

図 19.5 は最終散乱の時刻に因果的に接触のあった領域間の関係を表している．図 19.3 は今日見える宇宙との関係を表している．最終散乱時に因果的に関係のあった領域の半径は粒子地平

の半径 $d_{\mathrm{horiz}}(t_{\mathrm{ls}})$ [(18.47) 式を参照] である．宇宙は最終散乱時には物質優勢であり（問題 8），$\tilde{a} = 1/(1+z)$ が非常に小さい $z = 1100$ のとき空間曲率は有効ポテンシャル (18.78) の中で重要ではないので，t_{ls} **以前**の歴史全体で物質優勢で空間的平坦な FRW モデルを仮定し地平の大きさを見積もることができる．この場合，$d_{\mathrm{horiz}}(t)$ は (18.48a) 式と

$$\begin{pmatrix} \text{最終散乱時に} \\ \text{因果的に接触のあった} \\ \text{領域の半径} \end{pmatrix} \approx 3t_{\mathrm{ls}} \tag{19.15}$$

で与えられる．今日の空でこのような領域が張る角度サイズは (19.11) 式から $\Delta s = 6t_{\mathrm{ls}}$ として計算することができ，それは数度になる．もし宇宙が最終散乱以前に物質優勢であったなら，それ以前に作用した物理的機構のうち，宇宙背景放射の著しい非等方性を説明できるものはない．放射と真空エネルギーを考慮してもこの結論はかわらないが，非常に初期の宇宙の物質は FRW モデルの単純な仮定によって必ずしもうまくモデル化できているわけではない．

インフレーション

初期宇宙は高エネルギー物理学の領域である．互いに反応しない物質と放射，真空からなる単純な FRW モデルが初期宇宙でそのまま正しいことはないだろう．スケールファクタが (18.39) 式のように指数的に増加するような時期が宇宙にあったと仮定しよう．ある定数 H に対して

$$a(t) \propto e^{Ht} \tag{19.16}$$

となる．このようなスケールファクタの指数的で急激な増加は**インフレーション**と呼ばれる．インフレーション膨張が宇宙初期に短期間起きただけでも，なぜ今の宇宙がこのようになっているのかを説明するのに有効である．ここでは 3 つについて述べる．

- **地平の大きさの増加**　時刻 t_s と t_f の間 $\Delta t = t_f - t_s$ だけインフレーション期が続いたとして，その間で地平の大きさの増加 $\Delta d_{\mathrm{horiz}}$ がどうなるかを考えよう．(18.47) 式と (19.16) 式からこれは

$$\Delta d_{\mathrm{horiz}} = e^{Ht_f} \int_{t_s}^{t_f} dt' e^{-Ht'} = \frac{e^{H\Delta t} - 1}{H} \tag{19.17}$$

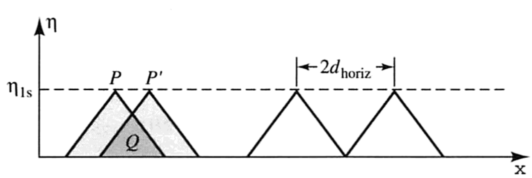
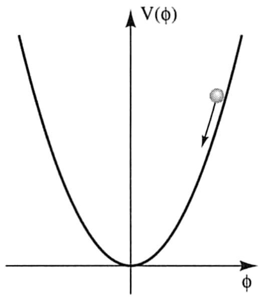


図 19.5　最終散乱における因果的接触、時空領域 Q にある事象は，最終散乱面上の点 P と P' のものに影響を与えることができる．Q は P と P' の過去光円錐の中にあるからである．しかし，点の間の物理的距離が最終散乱の地平半径 $d_{\mathrm{horiz}}(t_{\mathrm{ls}})$ よりも離れていると，過去光円錐は重ならないし，ビッグバン以来の事象はそこにあるものに影響を与えることはない．

ボックス 19.2 インフレーションの機構

このボックスでは急激なインフレーション膨張を非常に初期の宇宙（$t \approx 10^{-34}$ 秒）で起こす機構のうち 1 つをかなり大雑把に述べる．こうした早期，物質は粒子と放射というよりも量子場とその期待値で正確に表される．たった 1 つのスカラー場を考え，ϕ でその期待値を表し，それが t だけの関数 $\phi = \phi(t)$ であると仮定し，宇宙の一様性と等方性の観測と矛盾しないとする．ϕ はあたかも有効ポテンシャル $V_\phi(\phi)$ の中にいる粒子のように，時間発展することがわかっている．有効ポテンシャルは場がそれ自身とどのように相互作用するのかを表し，ここに図示したようになっている．



場は ϕ_* の値で静止しているところから出発する．そのポテンシャルエネルギー $V_\phi(\phi_*)$ は少しの間変化せず，真空エネルギーのようにはたらく．平坦宇宙は (18.40) 式において，$H^2 = 8\pi V_\phi(\phi_*)/3$ から (18.39) 式のように膨張する．本文で考察したように， H が強い力と電弱力を統一するエネルギーで特徴づけられるとするならば，インフレーション膨張は急激になるだろう．場が転がり降りていくと，ポテンシャルエネルギーは運動エネルギーに変換され，いろいろな機構で宇宙膨張の中に散逸していく．場がゼロエネルギーの近くにたどり着き，インフレーション膨張は終わる．インフレーション膨張する初期宇宙から今現在我々が見る宇宙へ転移が起きる．

本文で述べたように，インフレーションは，なぜ宇宙が一様かつ等方なのかを説明するのに役立つ．しかし，ここで述べた機構は，銀河の大規模構造の中で現在観測されている非一様性のスペクトルを説明するのにも役立つ．量子揺らぎのため，場は厳密に一様ではなく，違った場所ではわずかに違う時刻に転がり始めることになる．別の場所では場に差が生じるため，最終散乱における CMB と今日の銀河分布の統計の中に観測された非等方性と矛盾しない密度揺らぎが生じるだろう．

となる．このように地平はインフレーション期で指数的な急激膨張をする．$H\Delta t \sim 60$ であっても地平は最終散乱時に因果的に接触のある観測可能の宇宙全体を十分覆うことができる．

- **平坦性** インフレーションは宇宙を $\Omega = 1$ にすることができる．したがって我々の宇宙が空間的に平坦であることを予言し，現在の観測とよく合う．これをみるために， $\Omega(t)$ を，時刻 t のエネルギー密度 $\rho(t)$ をそのときの臨界密度で割った比として定義する．(19.16) 式で表されるインフレーション期を通じて臨界密度は $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/(8\pi)$ となる．ここで $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ [(18.14) 式を参照] である．このとき，(19.16) 式のインフレーションの $a(t)$ を使ってフリードマン方程式 (18.63) を書き換えると

$$\Omega(t) - 1 \propto ke^{-2Ht} \tag{19.18}$$

が得られる．非常に急激なインフレーションにより宇宙は $\Omega = 1$ になる．これはインフレーションの最も重要な予言の 1 つであり，現在の観測と合う．

- **一様性と等方性** 初めでこぼこだった風船が膨張していくときと同じように，インフレーションにより初期の非一様性の空間的スケールは引き伸ばされ，我々が現在観測しているような大きなスケールで，宇宙がなぜ一様で等方なのかを説明するのに役立つ．もちろん，イ

ンフレーションが有限期間だけ続いたということから，その時間内に引き伸ばすことができなかった大きな非一様性は存在するが，インフレーション膨張は，観測されている一様性と等方性を説明するのに大きく貢献する．

(19.16) 式のような指数膨張は真空エネルギーの特徴である [(18.39) 式を参照]．今日の真空エネルギーは，素粒子物理学のエネルギースケールでは無視でき（問題 2）非常に初期の宇宙の進化では重要でないが，図 19.2 のような観測によって明らかにされているように，宇宙膨張では重要であるかもしれない．しかし素粒子の相互作用はそれ自身インフレーション膨張を 382 ページのボックス 19.2 で述べたような機構でつくり出すことができる．典型的なモデルでは，これらの機構は 10^{14}GeV またはそれ以上のエネルギースケールで起きる．そこでは重力以外の基本的な力の統一を特徴付けるエネルギースケールに近い．(18.42) 式から 10^{14}GeV のオーダーのエネルギースケールでは 10^{-34} 秒の**非常に**早期で達成され，H^{-1} と同じような大きさになる．見える宇宙よりも大きな地平をつくり，宇宙を $\Omega = 1$ にし，初期の大きな不均一さを我々が観測しているものよりもずっと大きなスケールまでに引き伸ばすにはこのオーダーの早期のインフレーション膨張が非常に短い期間だけ起きればよい．インフレーションは，我々の宇宙が近似的に一様等方であるという観測事実がなぜあるのか，なぜ正と負の空間曲率の間の境界にあるのかを説明する説の 1 つである．

問題

1. [B] 56 ページのボックス 4.3 で考察した電波源 3C345 の赤方偏移は $z = 0.595$ である．雲 C2 が外側に運動する角速度はほぼ 0.47mas/yr である．この雲が視線方向を横に進んでいると（事実に反して）仮定すると，3C345 の宇宙ステーションにいる観測者にはどんな速度に見えるか．宇宙モデルは平坦 $(k = 0)$ で物質優勢 FRW モデルで，$h = 0.72$ とする．
2. [S] 観測された真空エネルギー密度は量子重力の結果であろうか．このような解釈をするにあたって直面する障害は，観測された真空質量密度 ρ_v とプランク質量密度 $\rho_{Pl} \equiv c^5/\hbar G^2$ [(1.6) 式を参照] の間に大きな差があることだ．プランク質量密度は量子重力現象を特徴づける次元的な背景をもとに推測されるものだ（第 1 章）．
   (a) ρ_{Pl} が質量密度として，$\hbar$, G, c の正しい組合せになっていることを示せ．
   (b) ρ_v/ρ_{Pl} を評価せよ．
3. [S] (19.7) 式と (19.9) 式にしたがう平坦物質優勢 FRW モデルの有効距離 d_{eff} (19.5) を示せ．
4. [A] 小さい z では赤方偏移–等級関係が逆 2 乗則 (19.3) で与えられる．それは
$$\frac{f}{L} = \frac{H_0^2}{4\pi z^2}(1 + \text{定数}\, z + \cdots)$$
   の z についての展開の最初の項である．定数を求め，宇宙論パラメータで表せ．$\Omega_m = 0.3$, $\Omega_r = 8 \times 10^{-5}$ と $\Omega_r = 0$ とし，2 つの値 $\Omega_v = 0$ と $\Omega_v = 0.7$ に対して赤方偏移-等級曲線の概形を描け．
5. [S] 有効距離 d_{eff} は (19.7) 式で定義されるが，空間的に平坦な宇宙の場合，赤方偏移 z に

ある銀河の有効距離が

$$d_{\text{eff}} = \int_0^z dz'/H(z')$$

のように書けることを示せ．ここで $H(z')$ は赤方偏移 z' の銀河から光が放出されたときのハッブル定数の値である．

6. **標準ものさし** ある種の銀河はつねに同じ大きさをしているとしよう．これは標準ものさしとして使え，角度の大きさからそこまでの距離が求められる．赤方偏移–等級関係の場合と同じように，物質優勢平坦 FRW 宇宙の赤方偏移-角度サイズ関係を求めよ．物体の角度の大きさが赤方偏移ともに大きくなり始める赤方偏移があることを示し，その値を求めよ．このことから，我々から物体が離れると明るくなるといえるか．
7. [C] **銀河計数** ある値 Z よりも**小さい**赤方偏移の銀河の個数 $N_{\text{gal}}(Z)$ を調べるとしよう．銀河の個数密度 $n_{\text{gal}}(t)$ は空間的に一様で時間的に変化しないと仮定する．$N_{\text{gal}}(Z)$ がどのように Z に依存するかについて物質優勢平坦 FRW モデルで予言するとどうなるか．答えを Z とハッブル定数，銀河の現在の密度 $n_{\text{gal}}(t_0)$ で表せ．（**コメント**：銀河を数えることは宇宙論パラメータを決める別のルートであるが，銀河が遠くなると暗くなり，数えるのが難しくなる．）
8. 我々の宇宙が宇宙論パラメータ $H_0 = 72(\text{km/s})/\text{Mpc}$, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_v = 0.7$ で特徴づけられていると仮定する．最終散乱が赤方偏移 1100 で起きたことも仮定する．
   (a) 最終散乱の温度と，$k_B T$ が水素の束縛エネルギーに等しい温度 T を比較せよ．
   (b) 放射優勢宇宙はどんな z の値より前になるか．
9. 最終散乱の時刻における宇宙の年齢を求めよ．
10. **実験室で宇宙定数を測定できる？** 地球にある通常の大きさの実験室で物質密度 ρ_m を測定することは不可能である．物質は滑らかに分布しているという FRW 近似はこうしたスケールでは破綻する．しかし基本的な真空エネルギーは厳密に一様であり，原理的には実験室の実験で検出できる．実験室で自由に落下する 2 つのテスト粒子が，$\Omega_v = 1$ の真空エネルギーの中で相対的にどのように運動するかを計算せよ．1cm 離れて運動し始めると仮定して，相対的な運動が大きくなるまでの時間スケールと相対加速度の大きさを評価せよ．

第 III 部

アインシュタイン方程式

曲がった時空の幾何学を支配するアインシュタイン方程式は一般相対性理論の基本方程式である．それをここで導入し，これまで述べてきた幾何学を解いて明らかにし，重力波の発生を計算し，相対論星の構造を分析する．

第 20 章

少しだけ数学

最終部でアインシュタイン方程式を導入する．これは一般相対性理論の基礎方程式であり，マクスウェル方程式が電磁場の基礎方程式であったの同じ位置を占める．シュワルツシルト幾何学やFRW 宇宙モデルのような幾何学はアインシュタイン方程式の特別な解である．アインシュタイン方程式について標準的な考察を効率よく進めるためには，以下の 3 つの新しい数学的アイディアだけが必要だ．ベクトルのより正確な定義，双対ベクトルの概念，共変微分である．これらの数学的概念をこの章で導入する．

20.1 ベクトル

7.8 節で曲がった時空でベクトルを導入したが，たとえそれが物理的に正しかったとしても数学的には正しくない．この節ではベクトルの正確な定義をする[1]．特に，7.8 節で用いたベクトルの定義を，局所的に定義される方向微分を用いて行う．

平坦時空のベクトルは，5.1 節で向きのついた線分として定義された．しかしそれに対して，平坦時空で方向微分をベクトルと考えることによってベクトルを導入する方法はこれまでの方法と完全に同等である．関数の方向微分の定義を思い出すために，関数 $f\,(x^\alpha)$ と曲線 $x^\alpha(\sigma)$ を考えよう．σ によって指定された点における曲線に沿った方向微分は

$$\frac{df}{d\sigma} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{f(x^\alpha(\sigma+\epsilon)) - f(x^\alpha(\sigma))}{\epsilon}\right] = \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tag{20.1}$$

である．ベクトル $\mathbf{t}$ の座標基底成分は

$$t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \tag{20.2}$$

であり，曲線の接ベクトルである（時間的曲線にしたがう粒子の場合，σ が固有時なら，$\mathbf{t}$ は 4 元速度 $\mathbf{u}$ になる）．したがって，σ によって指定される点における方向微分は $\mathbf{t}$ によって決められ

$$\frac{d}{d\sigma} = t^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{20.3}$$

と書くことができる．したがってそこでのすべての方向微分にはベクトルが対応する．逆に，すべてのベクトル $\mathbf{t}$ に対して，曲線 $x^\alpha(\sigma) = x^\alpha(0) + t^\alpha\sigma$ に沿って (20.3) 式で与えられる方向微分が

[1] 本当は 4 元ベクトルであるが，第 7 章以降の章で「4 元」を落としていることを思い出せ．

存在する．**したがってベクトルと方向微分は 1 対 1 対応しており，**一般的にどんなベクトル $\mathbf{a}$ も方向微分

方向微分として のベクトル

$$\mathbf{a} \equiv a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{20.4}$$

として書くことができる．

よって平坦時空のベクトルは，向きづけされた線分の代わりに，方向微分として定義することができるであろう．方向微分 (20.4) が与えられると，成分を見つけ，対応する方向を持った線分を作ることができる．しかし必ずしもそうする必要ない．ベクトル代数の通常の規則のすべてが (20.4) 式から直接得られる．たとえば，2 つのベクトル和の成分はそれぞれの成分の和であるという規則は，成分 a^α において (20.4) 式の線形性から出てくる．(20.4) 式から，成分 (20.2) が $\mathbf{t}$ の座標基底成分なので，偏微分 $\partial/\partial x^\alpha$ は座標基底ベクトルである．$\partial/\partial x^\alpha$ を座標基底ベクトルの別の記法だと考えてもよい．

7.8 節で述べた理由から，曲がった時空ではベクトルを向きのある線分として定義することはできない（直線の線分をどうやって曲がった時空に置いたらよいのか）．しかしながら，方向微分として定義したベクトルは曲がった時空に正しく一般化できるのだ．(20.1)–(20.4) 式は曲がった時空で成り立ち，ベクトル代数の通常のすべての規則はこれらの式から得られる．これ以降，ベクトルを方向微分と考えることにしよう．7.8 節で明確には言及してないが，方向微分の線形空間は**接空間**である．

ベクトルを微分演算子として考えることに不安を感じて、7.8 節で述べたように無限小線分で定義される方向という考えに安心する人もいるだろう．こうすることは物理学では受け入れられているし，無限小線分の概念に正確な数学的意味づけをするのが偏微分である．例 20.1 では方向微分で定義するのが便利であることを説明する．

例 20.1. 1 つの座標基底から他の基底への変換　ある座標系のベクトル $\mathbf{a}$ の座標基底成分と他の基底成分の関係はどうなっているのだろうか．答えは (20.4) 式と偏微分の代数によって得られる．x^α を座標の 1 組とし，x'^α を別の 1 組であるとして，その間の関係 $x'^\alpha(x^\beta)$ は既知であるとする．すると

$$\mathbf{a} = a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = a^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^\beta} \equiv a'^\beta \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \tag{20.5}$$

となる．座標 x^α の座標基底成分 a^α と，座標 x'^α の座標基底成分 a'^α の間の変換則は (20.5) 式から以下にしたがう：

$$a'^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} a^\alpha \tag{20.6a}$$

逆変換は，$x^\alpha(x'^\beta)$ から (20.6a) 式のダッシュ付きの量とダッシュなしの量を交換することにより

$$a^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} a'^\alpha \tag{20.6b}$$

として得られる．

20.2 双対ベクトル

ベクトルから実数への線形写像

双対ベクトルω はベクトルから実数への線形写像である[2]．双対ベクトル$\boldsymbol{\omega}$ がベクトル $\mathbf{a}$ を写像して得られる実数を $\omega(\mathbf{a})$ で表す（写像の結果が数値になるので ω に太文字を使わない）．2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$, 2 つの数値 α, β 対して

双対ベクトルの定義

$$\omega(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})=\alpha\omega(\mathbf{a})+\beta\omega(\mathbf{b}) \tag{20.7}$$

が成り立つとき，写像は**線形**であると言われる．ゼロベクトルはゼロベクトルに写像されると仮定すると，成分から実数への最も一般的な線形写像は

$$\omega(\mathbf{a})=\omega_\alpha a^\alpha \tag{20.8}$$

の形になり，数値 ω_α は双対ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の成分と呼ばれる．

例 20.2. 勾配　関数 $f\,(x^\alpha)$ の勾配は双対ベクトルの最も初歩的な例である．(20.1) 式に，ベクトル $\mathbf{t}$ で指定される方向への関数微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}t^\alpha \tag{20.9}$$

である．よって関数 $f\,(x^\alpha)$ の微分はどんなベクトル $\mathbf{t}$ からでも実数 (20.9) へ線形写像を正しく決める．この写像は f **の勾配**と呼ばれる双対ベクトルであり，その成分は $\partial f/\partial x^\alpha$ である．勾配双対ベクトルを $\boldsymbol{\nabla} f$ と書く習慣がある．

たとえば，関数 $g(x)=-t^2+x^2+y^2+z^2$ を考える．この関数は平坦時空で原点から点 x^α までの距離の 2 乗である．g の勾配の成分は $\partial g/\partial x^\alpha=(-2t,2x,2y,2z)$ である．

---

4 つの線形独立な双対ベクトル $\{\mathbf{e}^\alpha\}$(中括弧は「集合」の意味）の集合がすべての双対ベクトルの**基底**を構成する．どんな双対ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ も双対基底ベクトルの線形結合で表される．つまり

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_\alpha\mathbf{e}^\alpha \tag{20.10}$$

数値 ω_α は基底 $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ の双対ベクトルの**成分**である．(20.8) 式で導入した特別な双対ベクトル基底と成分 a^α を定義したベクトルの基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ の間の関係は

$$e^\alpha(\mathbf{e}_\beta)\equiv\delta^\alpha_\beta \tag{20.11}$$

である．ここで δ^α_β はクロネッカーのデルタであり，$\alpha=\beta$ のとき 1 で，それ以外では 0 になる：

$$\delta^\alpha_\beta\equiv\begin{cases}1 & \alpha=\beta\\ 0 & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{20.12}$$

---

[2] 双対ベクトルの別名を 1 形式または共変ベクトルという

(20.11) 式を満たす $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ は $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ に**双対な**双対ベクトルの基底と呼ばれる．

定義 (20.11) から (20.8) 式の成分が求められることを見るためには，(20.11) 式と (20.10) 式を使って $\omega(\mathbf{a})$ を正しく書き下すだけでよい：

$$\omega(\mathbf{a}) = \omega_\alpha e^\alpha(a^\beta \mathbf{e}_\beta) = \omega_\alpha a^\beta e^\alpha(\mathbf{e}_\beta) = \omega_\alpha a^\beta \delta^\alpha_\beta = \omega_\alpha a^\alpha \tag{20.13}$$

これらの定義式すべてをたどることは難しいだろうか．すぐ，やさしいと感じられるようになるだろう．

ベクトルと双対ベクトルの対応

どんなベクトル $\mathbf{a}$ でも他のベクトル $\mathbf{b}$ からスカラー積

$$a(\mathbf{b}) \equiv \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{20.14}$$

を通じて実数へ線形写像を行うことができる．したがって，すべてのベクトルに対して，双対ベクトルが対応する．座標基底で，(20.8) 式を (20.14) 式の左辺に使うことができ

$$a(\mathbf{a}) \equiv a_\alpha b^\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = g_{\beta\alpha} a^\beta b^\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta b^\alpha \tag{20.15}$$

となる．しかし (20.15) 式は**あらゆる**ベクトル $\mathbf{b}$ で成り立つので，

添字の下げ方

$$\boxed{a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta} \tag{20.16}$$

が得られる．(20.16) 式は，座標基底成分 a^α の**ベクトル**と座標基底に双対な双対ベクトルの基底で表した成分 a_α の間の対応を表している．

この関係は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列，**逆計量**を導入することで逆演算をすることができる．逆行列は $g^{\alpha\beta}$ で表され，行列とその逆行列の通常の関係

逆計量

$$\boxed{g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta} \tag{20.17}$$

によって定義される．(20.16) 式の両辺に逆行列 $g^{\gamma\alpha}$ をかけ，(20.12) 式を使うと

添字の上げ方

$$\boxed{a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta} \tag{20.18}$$

が得られる（自由添字を別の文字に置き換えた）．

正規直交基底ではもっと簡単な関係が成り立ち，(20.15) 式で $g_{\alpha\beta}$ を $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ に置き換える．たとえば，

$$a_{\hat{0}} = -a^{\hat{0}}, \qquad a_{\hat{1}} = a^{\hat{1}}, \qquad a_{\hat{2}} = a^{\hat{2}}, \qquad a_{\hat{3}} = a^{\hat{3}}, \tag{20.19}$$

である．

計量によってベクトルと双対ベクトルに 1 対 1 対応ができているので，両方に同じ太文字（たとえば $\mathbf{a}$）を使うことを正当化できる．この関係により，物理量がベクトルと双対ベクトルとしてどちらにも表せることになる．観測者の実験室（5.6 節）を通り過ぎる粒子の運動量 $\mathbf{p}$ は，実験室の

正規直交基底のベクトル成分 $p^{\hat{\alpha}}$ または双対ベクトル成分 $p_{\hat{\alpha}}$ で表すことができる．この基底では，(20.16) 式または (20.18) 式で $g_{\alpha\beta}$ を $\eta_{\alpha\beta}$ に置き換えることによって一方から他方を計算することができる．$p^{\hat{0}}$ は観測者が測定したエネルギーであり，$p_{\hat{0}}$ はマイナスのエネルギーである．このような記法の繁雑さのため，これまで双対ベクトルを導入することはなかったのだが，曲率を考察するときには**非常に**便利に感じられるだろう．

運動量のような物理量をベクトルまたは双対ベクトルで表すのに物理的な区別はなく，数学的にその表現は 1 対 1 対応しているので，物理では双対ベクトル成分をベクトルの別の種類の成分と考えると扱いやすい．数学的なことばでは，それらは**同一視**されると表現される．よって，成分 p^{α} のベクトルに対応する双対ベクトルの成分として p_{α} と言う代わりに，ベクトル $\mathbf{p}$ の上成分または下成分と呼ぶことにしよう[3]．**これからベクトルとその成分とだけ呼ぶことにする．**

例 20.3. 添字の上げ下げの練習 以下の練習問題に挑戦し，添字の上げ下げを正しくできるかどうかチェックしよう．2 次元を考え，添字 $A, B, \ldots$ には 1 と 2 を入れ，計量は，ある定数 F として，

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20.20}$$

とする．以下のベクトルを考えよう：

$$a_A = (1,0), \qquad b_A = (0,1), \qquad c^A = (1,0), \qquad d^A = (0,1) \tag{20.21}$$

a^A, b^A, c_A, d_A, $\vec{a}\cdot\vec{b}$,$\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{d}$ を求めよ．答えはこのページの下にある．

基底と双対基底を使う

(20.16) 式と (20.18) 式から，2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のスカラー積はいろいろな方法で書くことができる：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} = a_{\alpha}b^{\alpha} = a^{\alpha}b_{\alpha} = g^{\alpha\beta}a_{\alpha}b_{\beta} \tag{20.22}$$

この節全体でこれらを含めたいくつかの関係は 7.3 節で取り上げた和の記法の最初の部分を修正することによりまとめられる．

1′ ベクトルの添字は上も下も，添字の上げ下げをすることにより関係づけることができる．以下のようにして，式中で添字は上げたり下げたりできる．(1) 自由添字がバランスをとれるように両辺の自由添字は上げたり下げたりできる．(2) ダミーの添字を上げるときは，常に上下の組になるように，それと対になる添字も下げなければならず，その逆もそうである．

$\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$ の基底に双対な $\{\mathbf{e}^{\alpha}\}$ の要素は (20.11) 式と (20.14) 式の結果として

$$\mathbf{e}^{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{20.23}$$

---

[3] 上成分と下成分は反変ベクトル，共変ベクトルと呼ばれる．

逆行列の成分は $g^{11} = 0$, $g^{12} = g^{21} = 1$, $g^{22} = -F$ である．$a^A = (0,1)$, $b^A = (1,-F)$, $c_A = (F,1)$, $d_A = (1,0)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{d} = 0$.

を満たすベクトルである．ベクトル $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ と $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ はベクトル $\mathbf{a}$ に射影していろいろな成分を「取りだす」のに使える：

ベクトル成分への射影

$$\boxed{a^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{a}, \qquad a_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{a}} \tag{20.24}$$

（これらの公式を覚えるのに，方程式の両辺で添字のバランスをとる通常の規則がどのように役立っているのかについて注意すべきである.）これらの公式の 1 つ目をチェックするために

$$\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}^\alpha \cdot (a^\beta \mathbf{e}_\beta) = a^\beta (\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta a^\beta = a^\alpha \tag{20.25}$$

を書いておこう．他のものも同じようになる.

特に，正規直交基底のベクトル $\mathbf{a}$ の成分は基底ベクトル上に射影することで求められる [(5.82) 式と (20.25) 式を参照]

$$a^{\hat{\alpha}} = \mathbf{e}^{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{a}, \qquad a_{\hat{\alpha}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{a} \tag{20.26}$$

もしベクトル $\mathbf{a}$ の成分 a^α が座標基底でわかれば，さらに，直交基底ベクトルの座標基底成分 $(\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})^\alpha$ とその双対成分 $(\mathbf{e}^{\hat{\alpha}})_\alpha$ を知れば，正規直交基底の成分は (20.26) 式から計算することができる．$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_\alpha b^\alpha$ を使うと

$$a^{\hat{\alpha}} = (\mathbf{e}^{\hat{\alpha}})_\alpha a^\alpha, \qquad a_{\hat{\alpha}} = (\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})^\alpha a_\alpha \tag{20.27}$$

となる.（明らかだと思うが，惑わすような記法 $(\mathbf{e}_{\hat{2}})^1$ は正規直交基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{2}}$ の 1 座標基底成分という意味である．和の記法に関する限り，$\hat{\alpha}$ は α とは違う添字と見なしている）

基底ベクトルと双対基底ベクトル，さらにその成分との関係を表 20.1 にまとめた.

表 20.1 基底と双対基底

基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ とその双対基底 $\{\mathbf{e}^\alpha\}$，ベクトル $\mathbf{a}$ の 一般的な関係	
$\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta$	
$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$	$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha$
$a^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{a},$	$a_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{a}$
逆計量 $g^{\alpha\beta}$ は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列である：	
$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$	
座標基底の関係	
$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$	$\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta}$
$\mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\beta$	$\mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta$
$a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta$	$a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta$
正規直交基底の関係	
$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$	$\mathbf{e}^{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}^{\hat{\beta}} = \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$
$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \mathbf{e}^{\hat{\beta}}$	$\mathbf{e}^{\hat{\alpha}} = \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \mathbf{e}_{\hat{\beta}}$
$a_{\hat{\alpha}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} a^{\hat{\beta}}$	$a^{\hat{\alpha}} = \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} a_{\hat{\beta}}$

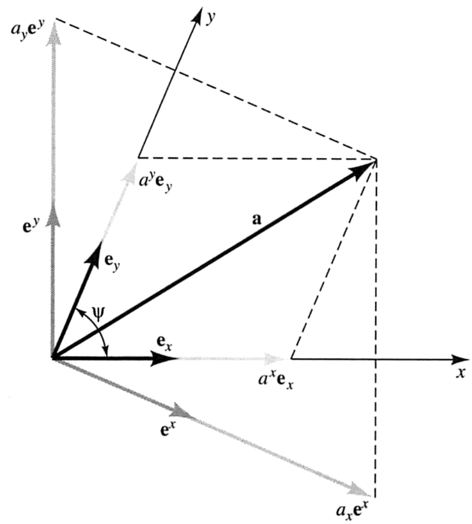


図 20.1 平面における斜交座標．互いに x 軸と y 軸が角度 ψ をなしていることを示している．座標基底ベクトル $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ は座標軸を向いている．$\mathbf{e}^x$ と $\mathbf{e}^y$ は $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ に双対する基底として作られていて，それらは互いに (20.23) 式によって関係がつく．任意のベクトル $\mathbf{a}$ は，これらの基底を使って，成分 (a^x, a^y) と (a_x, a_y) に分解することができる．

例 20.4. 斜交座標の基底と双対基底 平面の斜交座標 (x, y) を考えよう．図 20.1 に示したように，この座標では x 軸と y 軸が角度 ψ をなしている．平坦空間の線素はこの座標で

$$dS^2 = dx^2 + 2\cos\psi\, dxdy + dy^2 \tag{20.28}$$

である．座標基底ベクトル $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ は座標軸を向いており，$\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B = g_{AB}$ を満たす（添字 A と B は 1 と 2 をとる）[(7.56) 式の定義を思い出せ]．以下で示すように，(20.28) 式から互いに角度 ψ をなす単位ベクトルであることがわかる．双対ベクトル $\mathbf{e}^x$, $\mathbf{e}^y$ は $\mathbf{e}^A \cdot \mathbf{e}_B = \delta^A_B$ を満たし，これは大きさと方向を決める条件になっている．$\mathbf{e}^x$ の大きさは，これらの関係の 1 つ $\mathbf{e}^x \cdot \mathbf{e}_x = 1$ とベクトルの大きさと角度の関係で表した内積の式 $\mathbf{e}^x \cdot \mathbf{e}_x = |\mathbf{e}^x|\,|\mathbf{e}_x|\cos(\pi/2 - \psi) = 1$ から得られる． $|\mathbf{e}_x| = 1$ に注意すると，$|\mathbf{e}^x| = 1/(\sin\psi)$ であり，つねに 1 よりも大きい．$\mathbf{e}^y$ も同じ大きさである．ベクトル $\mathbf{a}$ の成分は $\mathbf{a}$ を $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ の線形結合として表すのに必要な係数である．下成分は $\mathbf{e}^x$, $\mathbf{e}^y$ の線形結合を得るために必要な係数であり，たし合わせると $\mathbf{a}$ になる．これらの構成法を図 20.1 で説明した．

例 20.5. 法ベクトル　3 次元空間中の 2 次元面の方向は，各点の法ベクトルで表される．同じように 4 次元空間の 3 次元面の方向は，各点の法 4 元ベクトルで表される（7.9 節）．3 次元面が

$$f(x^\alpha) = 一定 \tag{20.29}$$

の形の式で定義されるとき f の勾配は 1 つの法ベクトル $\mathbf{n}$ で与えられ，法ベクトルの下成分は

$$n_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tag{20.30}$$

である．成分が δx^α の平面上の小さな変位 $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$ は f の値は変えず，$\delta f = (\partial f/\partial x^\alpha)\delta x^\alpha = 0$ または

$$n_\alpha \delta x^\alpha = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = 0 \tag{20.31}$$

を意味する [(7.68) 式を参照]．つまり，$\mathbf{n}$ は面のずれに対して垂直であり，ずれの方向に接するベクトルである．この定義では必ずしも**単位**法ベクトルになっている必要はなく，他のどの法ベクトルもこのベクトルに比例していればよい．たとえば，座標 x^0 一定の面は下成分 $n_\alpha = (1, 0, 0, 0)$ に垂直である．その他の例として，(7.74) 式で $-r^2 + r^2 = -a^2$ によって定義されるローレンツ双曲面がある．(20.30) 式から法ベクトルは $n_\alpha = (-2t, 2r, 0, 0)$ で，これは (7.78) 式で求められた法ベクトルに比例する．

20.3　テンソル

ベクトルのいろいろな種類の線形写像

ベクトルから実数への線形写像が物理で便利であるのなら，ベクトルの**ペア**から実数への写像を使おうではないか．このアイディアは非常に便利であることが確かめられている．この写像の一般的な概念は**テンソル**と呼ばれている．テンソルに太文字を使い，スカラー量以外に使っていたように，たとえば $\mathbf{t}$ とする．

計量はテンソル $\mathbf{g}$ であり，2 つのベクトルから数値への線形写像を定義し，内積の値をとる：

$$g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta \tag{20.32}$$

曲率と物質のエネルギー密度に関係した重要なテンソルの例を次章で見るだろう．

テンソルの定義

より一般的に**ランク** r **のテンソル**は r 個のベクトルから実数への線形写像である[4]．したがってベクトルはランク 1 のテンソルである．関数をベクトルとテンソルと対比させるときには，関数は習慣的に**スカラー**と呼ばれる．計量は 2 ランクのテンソルである．3 ランクのテンソル $\mathbf{t}$ は 3 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ から実数への写像であり，

$$t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = t_{\alpha\beta}{}^{\gamma} a^\alpha b^\beta c_\gamma \tag{20.33}$$

---

[4] より一般的な数学的概念は m 個のベクトルと n 個の双対ベクトルから実数への線形写像と考えるべきであろう．しかし，もうすでにベクトルと双対ベクトルを同一視し，これを区別していないのでこうした一般化は必要ないだろう．

のように表される．$t_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ はテンソルの**成分**である．ここで，ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を上成分，$\mathbf{c}$ を下成分に選んだ．すべてを上成分で表してもよく，その場合は

$$t(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = t_{\alpha\beta\gamma}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \tag{20.34}$$

となる．他にもたくさんの表し方がある．

$t_{\alpha\beta\gamma}$ と $t_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ を結びつけるには $c_{\gamma} = g_{\gamma\delta}c^{\delta}$ の形の (20.16) 式を (20.33) 式に代入し，(20.34) 式と等しいとおけばよい．その結果

$$t_{\alpha\beta\gamma} = g_{\gamma\delta}t_{\alpha\beta}{}^{\delta} \tag{20.35}$$

になる．テンソルの添字はベクトルのように下げることができ [(20.16) 式を参照]，同じような議論をすれば，上げることもできる [(20.18) 式を参照]．

例 20.6. 計量テンソルの添字の上げ下げ　計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ の添字の 1 つを上げるには，和 $g^{\alpha}{}_{\beta} \equiv g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}$ を評価する必要がある．しかし，計量の逆行列 (20.17) の定義から，これはクロネッカーのデルタである：

$$g^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{20.36}$$

2 つめの添字を上げるためには $g^{\beta\gamma}g^{\alpha}{}_{\gamma}$ をつくればよい．しかし (20.36) 式を使うと $g^{\beta\gamma}g^{\alpha}{}_{\gamma} = g^{\beta\gamma}\delta^{\alpha}_{\gamma} = g^{\alpha\beta}$ となり，記法に矛盾がなければ当然こうなっていなければならない．

例 20.7. 添字の上げ下げの練習　例 20.3 の続きとして 2 次元の同じ計量を用いて，以下の例題を行うことでテンソルの添字を上げ下げする能力をテストしよう．成分 $t_{11} = G$, $t_{12} = 1$, $t_{21} = -1$, $t_{22} = 0$ のテンソルを考えよう．$t^{A}{}_{B}$, $t_{A}{}^{B}$, t^{AB}, $t^{A}{}_{A}$ を計算せよ．答えはこのページの下にある．

(20.35) 式は自由添字とダミーの添字のつりあいの規則にしたがう．これは 7.3 節で述べ，391 ページで拡張したものである．このことから，ベクトルと数値の間の写像と考えるだけでなく，テンソルからテンソルへの写像とするためにどのように考えたらよいかがわかるだろう．ベクトル $\mathbf{a}$ と 3 ランクテンソル $\mathbf{t}$ を作用させることにより

$$t_{\alpha\beta\gamma}a^{\gamma} \tag{20.37}$$

の成分をもつ 2 ランクのテンソルができる．2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ をテンソル $\mathbf{t}$ に作用させると

$$v_{\alpha} = t_{\alpha\beta\gamma}a^{\beta}b^{\gamma} \tag{20.38}$$

の成分をもつベクトル $\mathbf{v}$ ができる．このような式で，自由添字の数がつくられたテンソルのランクとなる．

以下の行列の行が 1 番目の添字を表し，列が 2 番目の添字を表す．

$$t^{A}{}_{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ G+F & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{A}{}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & G-F \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad t^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & G \end{pmatrix}, \quad t^{A}{}_{A} = 0$$

テンソルをつくる簡単な方法はベクトルの積をとることである．たとえば，3 つのベクトル **u**, **v**, **w** から 3 ランクのテンソル **s** ができ，その成分は

$$s^{\alpha\beta\gamma} = u^\alpha v^\beta w^\gamma \tag{20.39}$$

などとなる．

組をつくる上添字と下添字の和をとることは**縮約**と呼ばれ，テンソルのランクは 2 つ減る．たとえば，3 ランクテンソル $t_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ の後ろの 2 つの添字で縮約をとると

$$w_\alpha = t_{\alpha\beta}{}^{\beta} \tag{20.40}$$

の成分のベクトル **w** ができる．

縮約は基底で定義されるが，結果は基底と独立である．問題 9 でこれを行う．

基底から基底への変換

滅多にないわけではないが，ある基底でテンソルの成分がわかったとき，別の基底における成分を知りたいことがある．この小節ではこのような変換の例を 2 つ考察する．ある座標基底から直交基底へ，さらにある座標基底から別の基底への変換である．これらの変換は，(20.39) 式のように，ベクトルの積をつくることが，テンソルをつくることの 1 つの方法であったことを思い出すことで容易に記憶することができる．この場合，各ベクトルを変換し，それで積を作ることで，テンソルの変換ができる．一般的な場合の変換則も同じ形になる．これらの規則を一般の 2 ランクのテンソル **t** で説明する．高次ランクのテンソルへの一般化も明らかだろう．

■座標基底から正規直交基底への変換

座標基底で計算し，正規直交基底で解釈する．こうした方法が本書では理解のための道筋としてしばしば使われてきた．2 ランクのテンソル **t** の座標基底成分 $t_{\alpha\beta}$ を正規直交基底 $t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ に変換するために，正規直交基底ベクトルの座標基底成分 $(\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})^\alpha$ を知る必要がある．(20.27) 式を一般化して，テンソルを座標基底に投影すると以下のようになる：

$$t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})^\alpha (\mathbf{e}_{\hat{\beta}})^\beta t_{\alpha\beta} \tag{20.41}$$

■座標基底間の変換

(20.6) 式は，2 つの異なった座標系 x^α, x'^α でベクトルの座標基底成分の間の変換則を与える．テンソルの成分の変換規則は，ベクトルの変換則およびテンソルがベクトルに作用する不変性にしたがう．たとえば，ベクトル **a** の下成分の変換則を例に挙げて考えてみよう．**a** とそれとは別の任意のベクトル **b** とのスカラー積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は (20.15) 式から $a_\alpha b^\alpha$ と書くことができる．しかし，別の座標系の座標基底を使えば同じ意味で $a'_\alpha b'^\alpha$ と書かれる．2 つの数値は等しくなければならない．このことと (20.6b) 式から，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a'_\beta b'^\beta = a_\alpha b^\alpha = a_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} b'^\beta \tag{20.42}$$

となる．しかし，**b** は任意のベクトルなので

$$a'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} a_\alpha \tag{20.43}$$

となり，これが下成分の変換則である．

一般的なテンソルの変換則は (20.32) 式と (20.34) 式のような式に適用された議論を一般化することで得られる．しかし規則は，ベクトルの変換則 (20.6) と (20.43) が各添字に別々に適用されると記憶すれば容易に思い起こされる．例を挙げれば，計量を変換する規則は

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}g_{\gamma\delta}(x) \tag{20.44}$$

である．別の例を挙げれば

$$t'^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}t^\gamma{}_\delta \tag{20.45}$$

である．

これらの関係から見出される事実は，テンソルの成分が 1 つの基底で 0 になれば，すべての基底で 0 になることである．これは，多くのテンソルの関係を証明するのにうまく使える．テンソルの間に関係があれば，**どんな**基底においても成分間の関係として満たされなければならない．したがって，もしテンソル間の関係がわかり，それがある特殊な基底で成り立つことが示されれば，すべての基底で正しくなければならない．

添字のあるものすべてがテンソルであるとは限らない．座標 x^α はテンソルの成分ではない．クリストフェル記号もテンソルの成分ではない．これらは自由落下系で 0 にすることができるが，他の基底では 0 ではない．ベクトル成分から 1 つの基底における実数への線形写像を定義できるが，その数値は基底が違えば違ってくる．こういった意味で，クリストフェル記号はテンソルの定義から要請されるような，ベクトルから 1 つの実数への写像を定義しない．

20.4　共変微分

ベクトルの導関数

関数 f の偏微分は成分 $(\nabla f)_\alpha = \partial f/\partial x^\alpha$ のベクトル ∇f であり，例 20.2 でみた．しかし，流体力学や電磁気学の力学的な方程式のような，古典物理学の多くのベクトル方程式からわかるように，関数と同様にベクトルも微分ができると便利である．ベクトル $\mathbf{v}$ の微分が成分 $\nabla_\alpha v^\beta$ の 2 ランクのテンソルであればよいと思うだろう．つまり，ベクトルの方向を表すのに 1 つの添字を使い，微分の方向に 1 つの添字を使えばよいと．しかしながら，このような微分を定義すること以前に，乗り越えなければならない基本的な問題がある．ベクトルの微分では当然ながら，近傍の点におけるベクトル間の差をとることになるだろう．しかし，7.8 節で強調したように，ベクトルの差や和などは **1 つの点でのみ**定義される操作である．異なった 2 点のベクトルは 2 つの別々の接空間で存在している．ベクトルの微分を定義するためには，1 つの時空点から別の点へベクトルを移動させる必要がある．平坦空間の場合を深く考察することにより，ベクトルの移動の仕方がわかるだろう．

図 20.2 に，平坦空間におけるベクトル場を微分する方法を示した．近傍の 2 つの時空点にあるベクトル $\mathbf{v}(x^\alpha)$ と $\mathbf{v}(x^\alpha + dx^\alpha)$ を考えよう．2 点は，微分の方向を定義するベクトル $\mathbf{t}$ に沿って無限小変位 $dx^\alpha = t^\alpha\epsilon$ だけ違う．微分を行うために，まず，ベクトル $\mathbf{v}(x^\alpha + t^\alpha\epsilon)$ を点 x^α へそれ自身に平行に移動させ，$\mathbf{v}_\parallel(x^\alpha)$ を求める．これは x^α の接空間中にあり，それから平行四辺形

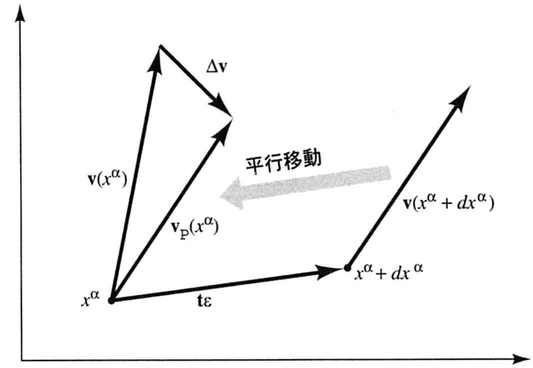


図 20.2 平坦空間または曲がった空間中の自由落下系ベクトルの微分．ベクトル場 $\mathbf{v}\,(x^\alpha)$ の 2 つのベクトルが 2 つの近傍の点 x^α と $x^\alpha + dx^\alpha$ で示されている．2 点は t^α 方向に変位分 $dx^\alpha = t^\alpha\epsilon$ 離れている．x^α と $x^\alpha + dx^\alpha$ のベクトルの差をとるためにベクトル $\mathbf{v}\,(x^\alpha + dx^\alpha)$ をまず x^α に**自分自身に平行に移動**させ，$\mathbf{v}_\parallel(x^\alpha) = [\mathbf{v}(x^\alpha + dx^\alpha)]_{\parallel\mathrm{transported\ to}\ x^\alpha}$ を求めなければならない．差 $\Delta\mathbf{v}(x^\alpha) = \mathbf{v}_\parallel(x^\alpha) - \mathbf{v}(x^\alpha)$ は通常の平行四辺形の規則によってつくられる．$\epsilon \to 0$ のときの極限 $\Delta\mathbf{v}/\epsilon$ により，x^α における $\mathbf{t}$ 方向の $\mathbf{v}$ の微分が定義される．

の規則を使って $\mathbf{v}(x^\alpha)$ はを引くことができる．**平行移動**はベクトルの微分を定義するための鍵となる概念である．

平行移動

平行移動は，曲がった時空中の局所慣性系でも定義できる．局所慣性系は局所的に平坦時空と等しいからである．したがって，曲がった時空の $\mathbf{t}$ 方向におけるベクトル場 $\mathbf{v}(x^\alpha)$ の**共変微分**の定義は次のようになる：

共変微分

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{t}\mathbf{v}(x^\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[\mathbf{v}(x^\alpha + t^\alpha\epsilon)]_{\parallel\mathrm{trans\ to}\ x^\alpha} - \mathbf{v}(x^\alpha)}{\epsilon}} \tag{20.46}$$

平坦空間または曲がった時空の局所慣性系（LIF, Local Inertial frame）の直交座標（7.4 節）で，成分 v^α は平行移動しても変わらない（図 20.2 を見よ）．このような座標で (20.46) 式を評価することは，関数の微分 (20.1) を評価したのと同じようにできる：

$$(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{t}\mathbf{v})^\alpha = t^\beta\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \qquad \text{(LIF)} \tag{20.47}$$

したがって，テンソル $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}$ に対しては

$$\nabla_\beta v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \qquad \text{(LIF)} \tag{20.48}$$

となる（局所慣性系の中の評価される点 x^α でのみ公式が成り立つことを思い出させるために LIF を加えている）．

しかしながら，平坦空間中でも (20.48) 式は曲線座標では正しくない．図 20.3 の極座標の場合で示したように，ベクトルの成分は平行移動で変わる．成分の変化は，ベクトルと基底ベクトルのなす角度が変化することから生じる．したがって，成分の変化は成分それ自身に対して線形になる

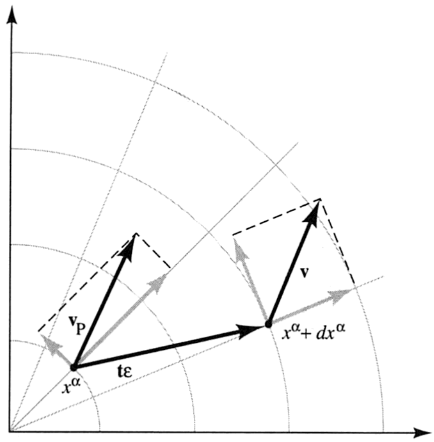


図 20.3 平行移動で変わる成分．図 20.2 で考えた平面内の平行移動の作用であるが，今回は極座標を使っている．ベクトル $\mathbf{v}\,(x^\alpha + dx^\alpha)$ と，それを変位 $dx^\alpha = \epsilon t^\alpha$ に沿って x^α まで平行移動してできた $\mathbf{v}_\parallel(x^\alpha)$ を示した．各点におけるベクトルの極座標成分への分解も示した．ベクトルは平行移動では変わらないが，極座標における成分は変わってしまう．

だろう．一般的に，変位の 1 次 $dx^\alpha = \epsilon t^\alpha$ に対して，成分 $v_\parallel(x^\beta)$ は 2 つの項の和となる．つまり，動かされた位置での成分 v^α と平行移動の間に基底ベクトルが変化することから生じるベクトル成分の変化であり，したがって，とりあえず未定の係数 $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ を使って

$$v^\alpha_\parallel(x^\delta) = v^\alpha(x^\delta + \epsilon t^\delta) + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x^\delta) v^\gamma(x^\delta)(\epsilon t^\beta) \tag{20.49}$$

としておく．(20.46) 式の成分をとることにより，以下の共変微分の成分の一般的な公式を得ることができる：

$$\nabla_\beta v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma \tag{20.50}$$

大雑把にいうと，最初の項は x^α から $x^\alpha + dx^\alpha$ への移動でベクトル場の変化から生じる項で，2 番目の項は基底ベクトルの変化から生じる．2 つの項は基底に依存するが，その和は，その構成法 (20.46) からわかるように，基底と独立である．

効率のよい計算をするためには $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ の公式が必要である．このような公式を局所慣性系の座標から一般の座標への変換 (20.48) によって得ることができるだろう．しかし，得られた公式は $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ の β と γ が対称であることを示せること以上のものではない（問題 10）．通常，局所慣性系が与えられるのではなく，むしろ計量が与えられ，それから局所慣性系を探さなければならないからだ (8.4 節を見よ)．

しかしながら，係数 $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ は我々がすでに知っている何かから求められるはずであり，それは測地線方程式である．局所慣性系で測地線は直線である．直線は長さが極値をとる曲線，または，単位接ベクトルがそれ自身と平行に移動する曲線と定義することができる（図 20.4）．もし $\mathbf{u}$ がそのような単位接ベクトルならば，自分自身の方向への共変微分は 0 でなければならない [(20.46) 式を

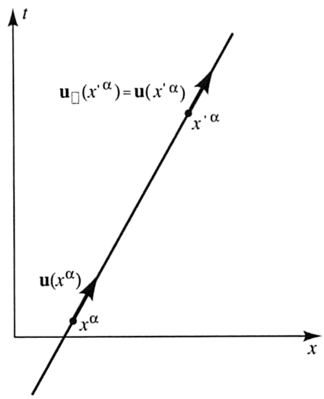


図 20.4 測地線と平行移動．ここで示したように，平坦時空または曲がった時空の自由落下系で測地線は，次の性質をもつ直線である．x^α の接ベクトル $\mathbf{u}$ が x'^α に平行移動されたとき，平行移動されたベクトル $\mathbf{u}_\parallel(x^\alpha)$ はそこでの接ベクトル $\mathbf{u}(x'^\alpha)$ と一致する．つまり，測地線は自分自身に平行移動された接ベクトルのつくる曲線である．同じ性質が曲がった時空の測地線を特徴づける．

参照]：

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u})^\alpha = u^\beta\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}u^\gamma\right) = 0 \tag{20.51}$$

ここで，$u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ である．しかし，我々はすでに測地線方程式 (8.15) を知っていて，座標基底で

$$u^\beta\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\gamma\right) = 0 \tag{20.52}$$

と書くことができる． ここで $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ はクリストフェル記号で (8.19) 式によって計量で表すことができる．逆計量 $g^{\epsilon\alpha}$ を方程式にかけて， 定義 (20.17) を使い，自由添字の文字を変えることにより，以下の Γ の公式が得られる：

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}\right) \tag{20.53}$$

よって，1 つの点でどの方向にも u^α を向けられ，その方向を向いた測地線が存在するので，座標基底で共変微分で定義する係数 $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ はクリストフェル記号と見なすことができる（くどい記法 $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ であるが，ここから，これまでの式についた波を消して，クリストフェル記号に置き換えて正しい公式とする）．批判的な読者は (20.52) 式にはクリストフェル記号の対称部分しかないことを気にしているかもしれないが，以前述べたように $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ は添字の対称性を持っていることを証明することが可能である（問題 10）．2 ランクのテンソル $\nabla\mathbf{v}$ の座標基底成分は以下の公式にまとめら

れる[5]：

$$\boxed{\nabla_\alpha v^\beta = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} v^\gamma \qquad \text{(座標基底)}} \tag{20.54}$$

座標基底の共変微分

この議論を使えば，共変微分を測地線方程式のエレガントな形に表すことができる．測地線は接ベクトル $\mathbf{u}$ が

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0} \tag{20.55}$$

測地線方程式

にしたがう曲線である．

例 20.8. シュワルツシルト幾何学の静止観測者の加速度 特殊相対論の慣性系または一般相対論の局所慣性系において，粒子の 4 元加速度ベクトルは座標基底成分によって

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau} \qquad \text{(LIF のみ)} \tag{20.56}$$

で定義することができる．ここで $\mathbf{u}$ は粒子の 4 元速度であり，τ は世界線に沿った固有時である．しかし平坦空間でさえも (20.56) 式は一般座標系では正しくない[6]．正確で一般的な加速度を定義するにはベクトルを微分するための正しく一般的な方法を使う．それは共変ベクトルである．具体的に，加速度は一般的に

$$\mathbf{a} \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \tag{20.57}$$

によって定義される．これは局所慣性系で (20.56) 式になる．なぜなら $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} = u^\alpha \nabla_\alpha = u^\alpha(\partial/\partial x^\alpha) = (dx^\alpha/d\tau)(\partial/\partial x^\alpha) = d/d\tau$ だからだ．

シュワルツシルトブラックホール時空中で固定された (r, θ, ϕ) にい続ける静止観測者は加速している．ロケット噴射は空間の固定された位置に留まるために必要であり，そうしなければブラックホールに落下してしまう[7]．共変微分の使い方を説明するために，(20.57) 式で定義されるような静止観測者の加速度の成分を計算しよう．

半径 r にいる静止観測者の規格化された 4 元速度のシュワルツシルト座標成分は

$$u^\alpha = (u^t, \vec{0}) = [(1-2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0] \tag{20.58}$$

である [(9.16) 式を参照]．(20.54) 式を使って，(20.57) 式を評価すると，$\mathbf{u}$ には t 成分しかないので，

$$a^\alpha \equiv u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = u^t \nabla_t u^\alpha = u^t \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + \Gamma^\alpha_{t\gamma} u^\gamma\right) = u^t \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + \Gamma^\alpha_{tt} u^t\right) \tag{20.59}$$

---

[5] 正規直交基底の共変微分の公式はあり，また実際どんな基底でも公式はある（問題 14）．簡単のため，座標基底で共変微分を計算することにこだわることにする．正規直交基底における成分は，(20.41) 式でそうしたように，正規直交基底ベクトルに射影することで求められる．

[6] これをあなたが信じなければ，(20.56) 式を球座標で使って，一定速さで直線上を運動する粒子の加速度を計算してみよ．0 になるはずだが，そうならない．

[7] ニュートン力学で，質量の外側で静止している粒子の加速度は 0 であるが，一般相対論ではゼロではない．どちらも，「加速度」は粒子の軌跡が測地線からのずれを測定することで得られる．しかし，ニュートン力学で仮定される幾何学は一般相対論の曲がった時空とは違う．

が得られる．成分 u^α は時間と独立なので，

$$a^\alpha = \Gamma^\alpha_{tt}(u^t)^2 \tag{20.60}$$

となる． 付録 B から，(20.60) 式に入る 0 にならない唯一のクリストフェル記号が $\Gamma^r_{tt} = (1-2M/r)(M/r^2)$ であることがわかる．したがって

$$a^\alpha = (0, M/r^2, 0, 0) \tag{20.61}$$

となる．加速度は半径方向を向いており，観測者がブラックホールに落下しないために必要な力の方向である．成分は地平線 $r = 2M$ で発散しないが，実際に発散しないかどうかは長さ

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\frac{M}{r^2} \tag{20.62}$$

を測定するのが正しい．これは $r = 2M$ で発散する（243 ページのボックス 12.2 の考察も見よ）.

共変微分の簡単な応用は平坦 3 次元空間におけるいろいろな曲線の直交座標系で，勾配，発散，回転など，基本的な電磁気や流体力学で使われる公式を得ることである．このような座標系すべての一般的な公式は 404 ページのボックス 20.1 にある．

共変微分を使う

共変微分のアイディアは勾配の記法を拡大することによって関数に広げることができる．たとえば

$$\nabla_\alpha f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \qquad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} f \equiv u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tag{20.63}$$

である．共変微分のアイディアは，ライプニッツ則を使うことでベクトルからテンソルに広げることができる．2 つのベクトル v^α, w^β とそれらの積である 2 ランクのテンソル $v^\alpha w^\beta$ を考える．ライプニッツ則とは

$$\nabla_\gamma(v^\alpha w^\beta) = v^\alpha(\nabla_\gamma w^\beta) + (\nabla_\gamma v^\alpha)w^\beta \tag{20.64}$$

である．(20.54) 式と (20.64) 式から，2 ランクテンソルを微分する規則をつくることができる：

$$\nabla_\gamma t^{\alpha\beta} = \frac{\partial t^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta}t^{\delta\beta} + \Gamma^\beta_{\gamma\delta}t^{\alpha\delta} \tag{20.65}$$

これは大雑把に以下の説明としてまとめられるだろう：成分を微分し，各添字に対して，(20.54) 式においてベクトルを微分したときと同じ形で 1 つ 1 つ Γ の項を加える．

(20.54) 式で定義される共変微分はテンソルなので，$\nabla_\alpha v_\beta$ を得るには添字を 1 つ下げればよい [.(20.16) 式を参照]．しかし，添字 α と β を縮約したライプニッツ則 (20.64) を使うことでこれらの成分の手ごろな公式を導出することができる：

$$\nabla_\gamma(v_\alpha w^\alpha) = (\nabla_\gamma v_\alpha)w^\alpha + v_\alpha(\nabla_\gamma w^\alpha) \tag{20.66}$$

内積 $v_\alpha w^\alpha$ はスカラーで，偏微分を使う通常のライプニッツ則が (20.66) 式の左辺に適用できる．右辺の最後の項は (20.54) 式が使える．その結果

$$\boxed{\nabla_\alpha v_\beta = \frac{\partial v_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} v_\gamma \quad \text{（座標基底）}} \tag{20.67}$$

が得られる．これもテンソルに一般化することができ，たとえば

$$\nabla_\gamma t^\alpha{}_\beta = \frac{\partial t^\alpha{}_\beta}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} t^\delta{}_\beta - \Gamma^\delta_{\gamma\beta} t^\alpha{}_\delta \tag{20.68}$$

などとできる．

例 20.9．共変微分の練習問題　2 次元球面で以下の練習問題を行うことで共変微分の計算の能力を診断しよう [(2.15) 式を参照]：

$$dS^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{20.69}$$

と成分 $v^A = (0, 1)$ のベクトル $\vec{v}$．$\nabla_A v^B$ の 4 つの成分を計算し，2 つの量，$\nabla_\theta\nabla_\phi v^\theta$，$\nabla_\phi\nabla_\theta v^\theta$ を計算し，共変微分が交換するかどうか調べよ．答えはこのページの下にある．

計量の共変微分は 0 である：

$$\boxed{\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0} \tag{20.70}$$

局所慣性系では，計量の 1 階微分が 0 になり，これが成り立つことが明らかなので，この重要な性質は明らかである．しかし，クリストフェル記号で表された共変微分の式から一般座標系でも成り立つことが示せる（問題 17）．

共変微分は 1 つの点のベクトルを，曲線に沿って近傍の点から平行移動したベクトルと比較することで得られる [(20.46) 式を参照]．したがって，ベクトルは曲線に沿った共変微分が 0 になれば，ベクトルは平行移動される：

$$\boxed{\left(\begin{array}{c}\mathbf{v}\text{ が }x^\alpha(\sigma)\text{ に}\\ \text{沿って平行移動される}\end{array}\right) \Leftrightarrow (\nabla_\mathbf{t}\mathbf{v} = 0)} \tag{20.71}$$　**平行伝達**

ここで $\mathbf{t}$ は接ベクトル $t^\alpha = dx^\alpha/d\sigma$ である．

例 20.10．ジャイロスコープの方程式　(20.55) 式ですでに測地線方程式が共変微分

$$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\mathbf{u} = 0 \tag{20.72}$$

まずクリストフェル記号が必要だ．0 でないものは $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$ である．$\vec{v}$ の 1 階微分で 0 にならないものは，$\nabla_\phi v^\theta = -\sin\theta\cos\theta$, $\nabla_\theta v^\phi = \cot\theta$ である．必要な 2 階微分は $\nabla_\phi\nabla_\theta v^\theta = 0$ と $\nabla_\theta\nabla_\phi v^\theta = \sin^2\theta$ である．共変微分は交換しない．

ボックス 20.1 勾配，発散，回転

電磁気学や流体力学，古典物理学の多くの分野の方程式は 3 次元ベクトルの微積分を使う．関数の勾配 $\vec{\nabla} f$，ラプラス演算子 $\vec{\nabla}^2 f$，ベクトル場の発散 $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ と回転 $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ である．これらの微分形は，直交座標や円筒座標，極座標，双曲線座標などのような典型的な 11 個の便利な座標系について具体的に教科書で与えられ，ラプラス方程式は互いに違った形になる．共変微分はこれらすべての微分に統一的な描像を与え，特別な座標系で具体的な形を導出するための直接的な道を開く．

我々は，直交座標 (x^1, x^2, x^3) によって指定される 3 次元の**平坦**な空間を考えている．したがって計量は対角化されている：

$$dS^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \qquad \text{(a)}$$

ここで g_{11}, g_{22}, g_{33} は x^1, x^2 x^3 の既知の関数である．座標基底ベクトルはいつも通り $\vec{e}_i$ で双対基底ベクトルは $\vec{e}^{\,i}$ で表される．古典物理学で最も使われる基底はこのようなものではなく，むしろ 3 つの座標線の方向を向いている正規直交基底 $\vec{e}_{\hat{i}}$ である．こうとれるのは座標が直交しているためであり，同じ理由で他の基底ベクトルと簡単な関係がある．たとえば，

$$\vec{e}_{\hat{1}} = \vec{e}_1/(g_{11})^{1/2} = \vec{e}^{\,1}(g_{11})^{1/2} \qquad \text{(b)}$$

であり [145 ページの例 7.9 を参照]，方向 2 と 3 でも同じ関係が成り立つ．いろいろな種類の基底ベクトルの内積は表 20.1 にまとめた規則を満たす．ベクトル $\vec{V}$ の成分はスケールし直すことで関係がつき，基底ベクトルで展開することで求められる：

$$\vec{V} = V^k\vec{e}_k = V_k\vec{e}^{\,k} = V^{\hat{k}}\vec{e}_{\hat{k}} = V_{\hat{k}}\vec{e}^{\,\hat{k}} \qquad \text{(c)}$$

たとえば，$V^{\hat{1}} = (g_{11})^{1/2}V^1$ となる．

すでに定義したように [(20.9) 式を参照]，関数の勾配は成分 $(\vec{\nabla} f)_i = \partial f/\partial x^i$ をもったベクトルである．つまり，

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x^k}\vec{e}^{\,k} \qquad \text{(d)}$$

であり，(b) 式を使って，単位ベクトルで書き直すと

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{(g_{11})^{1/2}}\frac{\partial f}{\partial x^1}\vec{e}_{\hat{1}} + \frac{1}{(g_{22})^{1/2}}\frac{\partial f}{\partial x^2}\vec{e}_{\hat{2}} + \frac{1}{(g_{33})^{1/2}}\frac{\partial f}{\partial x^3}\vec{e}_{\hat{3}} \qquad \text{(e)}$$

を得る．これは任意の直交座標系で勾配の式になる．

ベクトル $\vec{V}$ の発散はスカラー $\nabla_i V^i \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ である．(20.54) 式から

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik}V^k \qquad \text{(f)}$$

となる．(a) 式と Γ の公式 (20.53) を使って簡単な計算をすると，

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k} \qquad \text{(g)}$$

が得られる（問題 21）．ここで g は

$$g \equiv g_{11}g_{22}g_{33} = \det(g_{ij}) \qquad \text{(h)}$$

で定義される（$g = \det(g_{ij})$ であり，(g) 式は非対角化行列でも同様に成り立つことがわかる）．これを使い，(f) 式を正規直交基底の成分で書くと

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{g^{1/2}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(g_{22}^{1/2}g_{33}^{1/2}V^{\hat{1}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(g_{33}^{1/2}g_{11}^{1/2}V^{\hat{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(g_{11}^{1/2}g_{22}^{1/2}V^{\hat{3}}\right)\right] \qquad \text{(i)}$$

となる．これは発散の一般的な公式である．ラプラス演算子の公式は (i) 式と (e) 式から直ちに得られる：

$$\vec{\nabla}^2 f \equiv \nabla_i\nabla^i f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \qquad \text{(j)}$$

この形は座標系が直交しているかどうかに関係なく正しいことがわかる．

ベクトルの一般的な微分 $\nabla_i V^j$ は 2 ランクのテンソルである．しかし，3 次元の特別な特徴として，反対称 2 ランクテンソルは交代テンソル

$$g^{-1/2}\epsilon^{ijk} \qquad \text{(k)}$$

を通じてベクトルと関連させることができる．ここで ϵ^{ijk} は 2 つの添字の交換に対して反対称で，(i, j, k) が $(1, 2, 3)$ と偶置換の場合には $+1$ となる．特に，2 つの添字が同じになれば，ϵ^{ijk} は 0 になる．この定義が基底と独立であることはチェックできる（問題 22）．

ベクトル $\vec{V}$ の回転は

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)^i = g^{-1/2}\epsilon^{ijk}\nabla_j V_k \qquad \text{(l)}$$

である．共変微分は (20.67) 式によって与えられる．Γ は対称で，ϵ^{ijk} は反対称なので，(l) 式で Γ は消える．したがって

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)^i = g^{-1/2}\epsilon^{ijk}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x^j}-\frac{\partial V_j}{\partial x^k}\right) \qquad \text{(m)}$$

となる．これから，正規直交基底の $\vec{\nabla}$ の成分で，簡単な形の回転の公式が得られる：

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)^{\hat{1}} = \left(\frac{g_{11}}{g}\right)^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}\left(g_{22}^{1/2}V^{\hat{2}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(g_{33}^{1/2}V^{\hat{3}}\right)\right] \qquad \text{(n)}$$

他の成分の公式は，(n) 式において単純な循環的な置換をすれば得られる．

読者は，(e)，(i)，(j)，(n) 式が，たとえば極座標

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \qquad \text{(o)}$$

や円筒座標

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \qquad \text{(p)}$$

のような馴染みのある座標での標準的な公式を与えるかどうかチェックしてみたらどうだろうか．

を使ってエレガントに表されることをみた．(20.71) 式から 4 元速度が測地線に沿って平行移動されるという主張である．外力がはたらいていないジャイロスコープのスピン $\mathbf{s}$ の運動方程式 (14.6) は，同様にすっきりした形で書くことができる：

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{s} = 0 \qquad (20.73)$$

この式は，ジャイロスコープのスピンが測地線上で平行移動されたことを表している．

定ベクトルは直交座標を除けば，成分が一定のベクトルとして定義できない．むしろ，どんな方向に平行移動されても変わらないベクトル場のことである：

$$(\text{ベクトル場が一定である}) \Leftrightarrow (\nabla_\alpha v^\beta = 0) \qquad (20.74)$$

平面上で極座標を用いて定ベクトルを計算することにより，共変微分の計算の例と同じように，極座標でこのアイディアを説明することができる．

例 20.11. 2 次元平面上の定ベクトル場　平面上の定ベクトル場を求めるために，4 つの方程式

$$\nabla_A v^B = 0 \qquad (20.75)$$

を解く．ここで A, $B = 1, 2$ である．直交座標でこれを解くのは簡単であるが，ここでは，教育的に極座標で解いてみよう．(8.2) 式は極座標 (r, ϕ) の計量を表し，クリストフェル記号は (8.17) 式で与えられる．(20.75) 式を書くことにより，4 つの方程式は

$$\nabla_r v^r = \frac{\partial v^r}{\partial r} = 0 \tag{20.76a}$$

$$\nabla_\phi v^r = \frac{\partial v^r}{\partial \phi} - r v^\phi = 0 \tag{20.76b}$$

$$\nabla_r v^\phi = \frac{\partial v^\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} v^\phi = 0 \tag{20.76c}$$

$$\nabla_\phi v^\phi = \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} v^r = 0 \tag{20.76d}$$

となる．

最初の式は，v^r が ϕ だけの関数 $v^r = g(\phi)$ であることを表している．3 番目の式は $\partial(rv^\phi)/\partial r = 0$ であり，これは，ある関数 $f(\phi)$ に対して $v^\phi = f(\phi)/r$ とできる．残りの 2 つの方程式から $f' = -g$ と $g' = f$ が得られる．これらの解は A と ϕ_* を定数として $g = A\cos(\phi - \phi_*)$ と $f = -A\sin(\phi - \phi_*)$ となる．したがって，定ベクトル場の成分は

$$v^r = A\cos(\phi - \phi_*), \qquad v^\phi = -\frac{A}{r}\sin(\phi - \phi_*) \tag{20.77}$$

となる．この式の意味は，極座標の座標基底ではなく，座標線に沿った単位ベクトル $\vec{e}_{\hat{r}}$, $\vec{e}_{\hat{\phi}}$ を基底とする正規直交基底で成分を考えるとはっきりする．それは

$$v^{\hat{r}} = A\cos(\phi - \phi_*), \qquad v^{\hat{\phi}} = A\sin(\phi_* - \phi) \tag{20.78}$$

である．これらは，どこでも x 軸と角度 ϕ_* をなす長さ A のベクトル場である．これらは平面内で可能な定ベクトルすべてである．

20.5 再び自由落下系

3.1 節でニュートン力学の慣性系は，最初に選んだ 3 つの軸を平坦空間の自由粒子の直線経路に沿って平行移動することでつくられた．4.3 節では，特殊相対性理論の慣性系も同じようにつくられた．8.4 節では，同じ構成法が一般相対性理論の自由落下系を与えるようにとられた．それは，測地線に沿って**局所**慣性系を規定することと，平坦時空の大域的な慣性系にできるだけ近づけることである．しかしながら，自由落下系の構成法を記述するとき，その軸がその原点を決めている測地線に沿ってどのように変化しているかを定量的に説明しようとはしなかった．このような説明は次章で曲率を定義するのに便利であり，共変微分を理解した今，我々はその説明をすることができるようになった．

自由落下系の原点となる自由落下観測者 $x^\alpha(\tau)$ の測地線を考えよう．正規直交基底の集合 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}(\tau)\}$ は測地線に沿って系の軸を定義する．これらのベクトルは系の座標基底ベクトルになるだろう．4 元速度 $\mathbf{u}(\tau)$ は時間の方向を決める基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ である．

測地線上の一点で $\mathbf{u}$ に垂直で，3 つの互いに垂直なベクトルを選びだし，空間方向を定義する．別の点における軸は観測者の測地線に沿って平行移動することで求められる．したがって，自由落下系の軸に沿った規直交基底ベクトルは

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = 0 \tag{20.79}$$

を満たす [(20.71) 式を参照]．観測者の世界線が測地線なので，$\mathbf{e}_{\hat{0}}$ の方程式は自動的に満たされる [(20.55) 式を参照]．残りの 3 つの方程式は空間ベクトル $\{\mathbf{e}_{\hat{i}}\}$ がその測地線に沿ってどのように変化するかを決める．その方向はジャイロスコープのスピンによって定義される．それらは測地線に沿って平行移動されるからである [(20.73) 式を参照].

例 20.12. シュワルツシルト幾何学中の自由落下系　第 9 章の計量 (9.9) で表されるシュワルツシルト時空で無限遠から自由落下する観測者を考えよう．

観測者は無限遠で静止している状態から出発し，半径方向に落下するとする．観測者は $e=1$, $\ell=0$ の測地線にしたがい，その 4 元速度は (9.36) 式

$$u^\alpha = ((1-2M/r))^{-1}, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0) \tag{20.80}$$

である．ここでいつものように，$x^\alpha=(t,r,\theta,\phi)$ である．観測者系の 1 つの成分はしたがって $\mathbf{e}_{\hat{0}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{\tau}} = \mathbf{u}\,(\tau)$ である．これと他の 3 つのベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\imath}}$ を規格化し相互に直交させ (20.79) 式も満たさなければならない．初め観測者が静止していると，3 つのベクトルを r-, θ-, ϕ-方向に沿うように選ぶことができ，したがって，それを忘れないようにするために $\mathbf{e}_{\hat{1}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{\theta}}$, $\mathbf{e}_{\hat{3}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ と表す．球対称であれば観測者が落下しても，$\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ と $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ が θ- と ϕ- 方向に向いたままである．$\mathbf{e}_{\hat{r}}$ 成分は，他のベクトルとの直交性と規格化によって決まる．その結果は

$$u^\alpha = (\mathbf{e}_{\hat{\tau}})^\alpha \equiv (\mathbf{e}_{\hat{0}})^\alpha = ((1-2M/r)^{-1}, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0) \tag{20.81a}$$

$$(\mathbf{e}_{\hat{r}})^\alpha \equiv (\mathbf{e}_{\hat{1}})^\alpha = (-(2M/r)^{1/2}(1-2M/r)^{-1}, 1, 0, 0) \tag{20.81b}$$

$$(\mathbf{e}_{\hat{\theta}})^\alpha \equiv (\mathbf{e}_{\hat{2}})^\alpha = (0, 0, 1/r, 0) \tag{20.81c}$$

$$(\mathbf{e}_{\hat{\phi}})^\alpha \equiv (\mathbf{e}_{\hat{3}})^\alpha = (0, 0, 0, 1/(r\sin\theta)) \tag{20.81d}$$

となる．対称性があるので，(20.79) 式を使わずに，自由落下系のこれらのベクトルを求めることができるが，(20.79) 式を満たしているかチェックすることは教育的によい練習問題である（問題 25)．たとえば，$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{1}}=0$ をチェックするためには，u^β に対して (20.81a) 式を使い，$\mathbf{e}_{\hat{1}}$ の成分には (20.81b) 式を使い，共変微分には (20.54) 式を使って，$u^\beta\nabla_\beta(\mathbf{e}_{\hat{1}})^\alpha$ を書き下さなければならない．

問題

1. [S] 座標変換則 (20.6a) は，ローレンツブースト (4.33) のもとで，(5.9) 式のベクトル成分の変換になることを式を使って示せ．
2. [S] (a)

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}$$

を計算せよ．

(b) この結果を使って，変換則 (20.6b) が (20.6a) 式の逆であることを具体的に示せ．

3. [S] 平坦空間の直交座標 (t,x,y,z) から極座標 (t,r,θ,ϕ) への変換 (7.2) を使ってベクトル $\mathbf{a}$ の成分 (a^t,a^x,a^y,a^z) を $(a^t,a^r,a^\theta,a^\phi)$ で表す変換則と，(a_t,a_x,a_y,a_z) を $(a_t,a_r,a_\theta,a_\phi)$ で表す変換則を具体的に求めよ．
4. シュワルツシルト幾何学で以下の関数を考える：

$$f(x)=(5t^2-2r^2)/(2M)^2$$

ここで t と r は通常のシュワルツシルト座標であり，計量が (9.9) 式の形をとる．f の勾配 $(\boldsymbol{\nabla} f)^\alpha$ の座標基底成分を求めよ．
5. (20.81) 式は，シュワルツシルト幾何学で正規直交系を構成する 4 元ベクトルの組 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ の上つきの座標基底成分である．
   (a) これがベクトルの正規直交的な組であることを式で示せ．
   (b) これらのベクトルの各々について下付きの座標基底成分を求めよ．
   (c) 基底ベクトルの集合に対して双対である上付きの座標基底成分 $\mathbf{e}^\alpha$ を求めよ．
   (d) 点 $(0,3M,0,0)$ における上付きの座標基底成分

$$a^\alpha=(4,3,0,0)$$

   をもつベクトル $\mathbf{a}$ を考えよう．この正規直交系におけるこのベクトルの $a^{\hat{\alpha}}$ と $a_{\hat{\alpha}}$ を求めよ．
6. ベクトルの基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ に双対的な双対ベクトルの基底 $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ に対して，$e^\alpha(\mathbf{a})$ と $a(\mathbf{e}^\alpha)$ を実行し基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ でベクトル $\mathbf{a}$ の成分を表せ．
7. (20.11) 式と (20.23) 式で定義される座標基底ベクトル $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ とそれに双対な基底 $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ を考える．
   (a) 基底ベクトル $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ と双対基底ベクトル $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ の間に $\mathbf{e}_\alpha=g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta$ と $\mathbf{e}^\alpha=g^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta$ の関係があることを示せ．
   (b) $\mathbf{e}^\alpha\cdot\mathbf{e}^\beta=g^{\alpha\beta}$ を示せ．
8. [S] ある点において，1 つの座標系 x^α の座標基底ベクトル $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ は別の座標系 x'^α の座標基底ベクトル $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$ の線形結合でなければならない．変換則を求めよ．
9. (20.40) 式で例証したように，別の座標系 $x'^\alpha=x'^\alpha(x^\beta)$ で縮約し，テンソルの変換則の結果として，w^α の成分が正しく変換することを示すことによって，縮約の作用が基底独立であることを示せ．
10. [A] (20.48) 式は，すべての $\tilde{\Gamma}$ が 0 になる局所慣性系内の共変微分から得られる 2 ランクテンソルの成分の式である．テンソルの変換則 (20.45) を使って一般座標系の $\tilde{\Gamma}$ の式を求めよ．この結果を使って，$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ が β と γ に対して対称であることを示せ．
11. (20.65) 式と (20.68) 式を求めたのと同じように，共変微分 $\nabla_\gamma t_{\alpha\beta}$ の式を求めよ．
12. [A] 例 20.9 にしたがい，ベクトル $w^A=(1,0)$ について $\nabla_A w^B$ と $\nabla_A\nabla_B w^C$ のすべての成分を計算せよ．
13. 例 20.8 で得られた，シュワルツシルト幾何学の静止観測者の 4 元加速度ベクトルは

$$a_\alpha=u^\beta\nabla_\beta u_\alpha$$

と (20.67) 式を使って計算できたであろう．そのようにすれば，同じ結果 (20.61) が得られることを示せ．

14. **任意の基底の共変微分**　$x^\alpha(\sigma)$ を曲線とし，$\mathbf{t}(\sigma)$ を σ における単位接ベクトルとする．$\mathbf{t}$ の方向のベクトル $\mathbf{v}$ の共変微分 $\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{v}$ の成分が任意の基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ について

$$(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{t}}\mathbf{v})^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\sigma} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta t^\gamma$$

と書けることを示せ．ここで

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_\gamma}\mathbf{e}_\beta$$

である．これらは**リッチ回転係数**と呼ばれる．$\{\mathbf{e}_\alpha\}$ が座標基底のとき，クリストフェル記号になることを示せ．

15. [S] **非アフィンパラメータを使ったヌル測地線**　8.3 節で示したように，ヌル測地線の接ベクトル $\mathbf{u}$ にアフィンパラメータ λ がパラメータとして使われているとき，測地線方程式が

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$$

にしたがうことを示せ．非アフィンパラメータを使うと，パラメータ λ の関数 κ として，

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -\kappa\mathbf{u}$$

となることを示せ．

16. **ブラックホールの表面重力**球対称ブラックホールの幾何学において，時間変位不変に対応してキリングベクトル $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial t$ は地平をつくるヌル測地線に接している．もしあなたが問題 15 を解いていれば，それが，比例定数 κ を用いて

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi} = -\kappa\boldsymbol{\xi}$$

となることがわかるだろう．この式を評価してシュワルツシルトブラックホールの κ の値を質量 M で表せ．12.1 節で考察したエディントン–フィンケルシュタイン座標のような，地平で非特異な座標系を使え．

17. (20.65) 式または，共変微分の別の成分の似た式（たとえば問題 11 で計算したようなもの）と (20.53) 式の Γ の式を使って，計量の共変微分が 0 になることを式を使って示せ．

18. **キリング方程式**　8.2 節で，計量の対称性に対応するキリングベクトルが，計量が 1 つの座標 x^1 に独立である座標系で定義された．対応するキリングベクトル $\boldsymbol{\xi}$の成分は

$$\xi^\alpha = (0, 1, 0, 0)$$

である．式で計算することにより

$$\nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha = 0$$

であることを示せ．これがキリング方程式である．このあらゆる解が計量の対称性に対応するという意味で，この式はキリングベクトルの一般的な特徴である．

19. [C] 法ベクトル $\ell_\alpha = \partial f/\partial x^\alpha$ がヌルベクトルならば，3 次元面 $f(x^\alpha) = 0$ はヌルである (7.9 節)．これらの法ベクトルが $\boldsymbol{\nabla}_\ell \boldsymbol{\ell} = \kappa \boldsymbol{\ell}$ を満たすことを示せ．ここで κ は x^α の関数である．ヌル測地線 (8.42) の方程式が，アフィンパラメータでないパラメータを使ってこの形で書けることを示せ．つまり ℓ_α がヌル測地線の接線であることを示せ．
20. (a) 例 8.6 のキリングベクトル $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\boldsymbol{\eta} \equiv -y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)$ が問題 18 のキリング方程式を満たすことを示せ．

    (b) 平面の極座標で $\boldsymbol{\eta} = \partial/\partial\phi$ であることを示せ．

    (c) 原点以外の点の回りに関する回転対称性に対応するキリングベクトルが存在し，それが定数をともなった $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\boldsymbol{\eta}$ の線形結合で表されることを示せ．
21. [B] ボックス 20.1 の公式 (g) を導出せよ．結果は一般的であるが，簡単のため対角計量の場合だけを考えよ．
22. [B] ボックス 20.1 の (k) 式で定義される交代テンソルは座標変換のもとで，3 ランクのテンソルとして正しく変換されることを具体的に示せ．**ヒント**：行列式の定義は

$$\det(A) = \epsilon^{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

    である．
23. [B,A] 3 次元平坦空間で，双曲線座標 (μ, ν, ϕ) は

$$\begin{aligned} x &= \mu\nu\cos\phi \\ y &= \mu\nu\sin\phi \\ z &= (\mu^2 - \nu^2)/2 \end{aligned}$$

    によって定義される．

    (a) $\phi = 0$ 平面で，μ, ν 一定線の略図を描け．

    (b) 座標 (μ, ν, ϕ) で平坦空間線素を求めよ．

    (c) これらの座標で，勾配，発散，回転，ラプラス演算子の式を求めよ．
24. [S] (20.72) 式と (20.73) 式の公式を使い，もし自由なジャイロスコープのスピン $\mathbf{s}$ が初め 4 元速度 $\mathbf{u}$ に直交していれば，直交したままであることを示せ．
25. [A] シュワルツシルト幾何学における自由落下系の基底ベクトル (20.81) が，実際に自由落下観測者の測地線に沿って平行移動されていることを，それぞれが (20.79) 式を満たすことを式で示すことにより，証明せよ．
26. シュワルツシルト座標半径 r における自由落下系の直交基底ベクトル (20.81) がその点での静止観測者の直交基底にローレンツブーストで変換されることを示せ．ブーストの速度を求めよ．**コメント**：どんな 2 つの正規直交基底でもローレンツ変換によって移れるという一般的な結果の特別な場合である [問題 7.23 を参照].

第 21 章

曲率とアインシュタイン方程式

これまでの章では一般相対論でよく扱われる特別な時空幾何学と，その中におけるテスト粒子と光線の運動について述べてきた．物質の存在により時空曲率が生じると述べたのだが，具体的にどのように生じるのかを逐一定量的に説明すべきだという要求には応えてこなかった．一般相対論の中心となる内容は以下のような式である．概略的に

$$(\text{局所的な時空曲率の量}) = (\text{物質のエネルギー密度の量}) \tag{21.1}$$

である．この関係は**アインシュタイン方程式**と呼ばれ，マクスウェル方程式が電磁場の方程式であったのと同じように，一般相対論の場の方程式である．マクスウェル方程式は電磁場とその発生源，つまり電荷と電流を関係づける．アインシュタイン方程式は時空曲率と**その**発生源，つまり物質の質量密度を関係づける．この類似性をさらに発展させると，マクスウェル方程式は電磁ポテンシャルについて，8 連立 2 階偏微分方程式であり，アインシュタイン方程式は計量係数 $g_{\alpha\beta}$ の 10 連立 2 階偏微分方程式である．その一方で，重要な差は，マクスウェル方程式が線形なのに対して，アインシュタイン方程式は非線形であるところである．

この章では，アインシュタイン方程式をごく手短に紹介する．物質がない場合の方程式を考え，次章で物質のある場合を調べる．真空のアインシュタイン方程式であっても重要な示唆に富んでいる．静止点電荷による場および電磁波が，発生源のないマクスウェル方程式の解であったように，シュワルツシルト幾何学と重力波が真空アインシュタイン方程式の解である．

21.1 潮汐重力

我々に課された最初の仕事は，(21.1) 式の「時空曲率の量」を求めることである．そのために，テスト粒子の運動を用いて，曲率を原理的に測定するという思考実験を行う．

1 **個の**テスト粒子の運動だけでは時空曲率について何も明らかにすることはできない．テスト粒子とともに自由落下する系で運動を調べることを想像しよう．自由落下系で，テスト粒子は静止したままである．その運動は平坦時空のテスト粒子のものと区別することはできない．1 つのテスト粒子では曲率を検出するのに十分ではない．

時空曲率を検出するためには，少なくとも 2 粒子の運動が必要である．スペースシャトル内の宇宙飛行士の 2 個のピンポン玉の例から（例 7.9），どうすべきか読み取れるだろう．長い時間，互いに近い 2 つのピンポン玉が**相対**運動するところを調べることにより，地球によって作られる時空曲率を検出することができる．図 21.1 と 21.2 はより一般的な例を示している．2 人の観測者が自

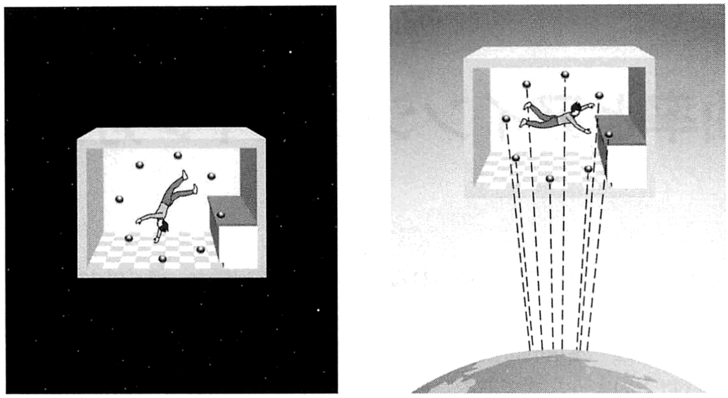


図 21.1　自由落下する実験室内の 2 人の観測者．左の実験室は真空にある．右の実験室は，曲率をつくる惑星の表面に向かって落下している．2 人とも，初め実験室で静止しているテスト粒子の雲に囲まれており，粒子は円状に並んでいる．真空の実験室では，観測者とテスト粒子の間の相対的加速度は 0 のままである．惑星の中心が止まっている系で運動をニュートン的に記述すると，落下している実験室の観測者とテスト粒子は惑星の中心に向かって加速している．惑星の中心から離れているテスト粒子は，惑星に近い粒子よりもわずかにゆっくり加速している．テスト粒子のパターンにおける効果は次の図で示される．

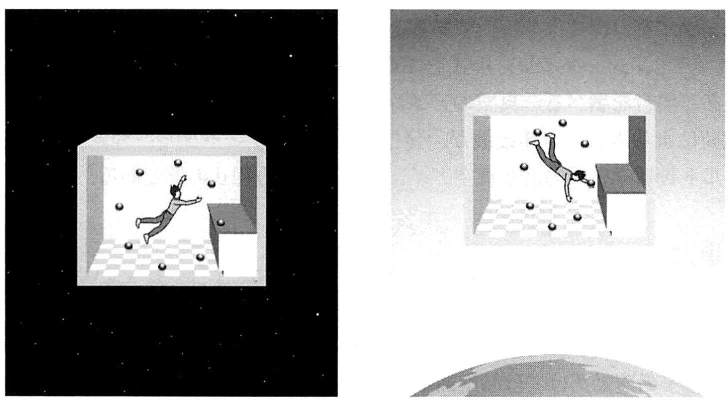


図 21.2　少し時間が経った後の図 21.1 の 2 人の観測者．真空で加速しない粒子の並びは円のままである．惑星に落下するテスト粒子の加速度の差によって初期の円から楕円に歪められる．このようにして自由落下観測者は，実験室が十分大きく，テスト粒子間の加速度の差が測定できれば，重力加速度を検出することができる．

由落下している研究室の中にいる．一方の研究室は真空中にあり，もう一方は惑星の表面に向かって落下している．2 人の観測者は，相対的に静止している円形に並んだテスト粒子とともに落下し始める．しばらくすると，惑星に向かう観測者はパターンが変わっていることに気がつく．ニュートン的運動の記述では，惑星の中心に近い粒子は観測者よりも大きな加速度を受けて，引き離されているように見え，中心から遠い方の加速度は小さく，こちらも離れるだろう．側面にある物体は観測者に近づいてくるだろう．正味の結果は，すでに示されているように円が楕円に歪められる．この歪みが局所時空曲率の測定量になる．対照的に，真空では円形は観測者に対して変形しないだろう．

互いに近い 2 つの粒子間の相対運動を支配する方程式を見つけるために，まずニュートン理論でこの問題を考えてみよう．慣性系では，重力ポテンシャル $\Phi(x)$ 中を運動する第 1 の粒子の位置 $\vec{x}(t)$ についての運動方程式は

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\delta^{ij}\frac{\partial\Phi(x^k)}{\partial x^j} \tag{21.2}$$

である（δ^{ij} は添字がバランスをとるように付けた）．$\vec{\chi}$ を**間隔ベクトル**とし，第 1 の粒子から第 2 の粒子の相対間隔が $x^i(t)+\chi^i(t)$ となるように選ぶ．粒子が近ければ，$\vec{\chi}$ の長さは短いだろう．第 2 の粒子の運動方程式は

$$\frac{d^2(x^i+\chi^i)}{dt^2} = -\delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi(x^k+\chi^k) \tag{21.3}$$

である．(21.3) 式の右辺を展開し χ^j の 1 次の項までとる．$|\vec{\chi}|$ が小さいのでこうしてもよい．展開をするために，$\partial\Phi/\partial x^j$ が x^k の関数であることに気をつけて，テイラー級数を使うと

$$\frac{\partial\Phi(x^i+\chi^i)}{\partial x^j} = \frac{\partial\Phi(x^i)}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\Phi(x^i)}{\partial x^j}\right)\chi^k + \cdots \tag{21.4}$$

となる．(21.3) 式から (21.2) 式を引き，展開式を使うと間隔ベクトル χ^i の方程式が得られる：

$$\frac{d^2\chi^i}{dt^2} = -\delta^{ij}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}\right)_{\vec{x}}\chi^k \tag{21.5}$$

ニュートンの偏差方程式

これは**ニュートンの偏差方程式**と呼ばれる．2 つの互いに近い粒子の間隔がある時刻でわかると，$|\vec{\chi}|$ が小さい限り，それ以降の時刻の間隔を計算するのに (21.5) 式が使える．成分が $\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^j$ のテンソルは加速度の差になり，互いに離れようとするかまたは，近づこうとする力を決める．これらは **潮汐重力**と呼ばれ，テンソルを**潮汐加速度テンソル**という（その理由に対してボックス 21.1 を見よ）．

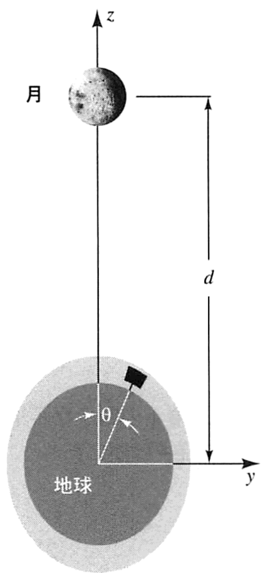
例 21.1．球対称質量外の潮汐加速度　球対称質量分布の外側のニュートン重力ポテンシャル（$G=1$ 単位系）[(3.13) 式を参照] は

$$\Phi = -M/r \tag{21.6}$$

である．ここで $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ は球対称中心からの距離である．(21.5) 式の重力加速度テンソルを，直交座標を使って評価すると

$$a_{ij} \equiv -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j} = -(\delta_{ij}-3n_in_j)\frac{M}{r^3} \tag{21.7}$$

ボックス 21.1　潮汐力からの潮の満ち引き



月の重力によって海面が歪められているところに，地球が回転すると潮の満ち引きが毎日できる．満ち引きは，月が地球に及ぼす潮汐重力の結果として起きる．実際の状況を単純化したものを図で説明した．この図で月は，慣性系 (x, y, z) の原点で静止しているかなり重い地球の周りを回転している．示された瞬間で，月は z 軸上に距離 d 離れている．月の位置におけるニュートン重力ポテンシャルは

$$\Phi_{\text{Moon}}(x, y, z) = -\frac{GM_{\text{Moon}}}{[x^2 + y^2 + (z - d)^2]^{1/2}} \qquad \text{(a)}$$

である．原点でのポテンシャルの 2 階微分は (21.5) 式を通じて地球で潮汐重力加速度を決めるが，それは

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}\right)_0 = \frac{GM_{\text{Moon}}}{d^3}\,\text{diag}(1, 1, -2) \qquad \text{(b)}$$

である．y-z 面で原点から $\vec{r} = r(0, \sin\theta, \cos\theta)$ 離れた位置にある質量 m の海の要素を考えよう．ここで θ は z 軸から測定した通常の極座標の角度である．(b) 式を使い，(21.5) 式の右辺の潮汐加速度を評価すると（$r \ll d$）

$$F^i_{\text{tidal}} = \frac{GmM_{\text{Moon}}}{d^2}\left(\frac{r}{d}\right)(0, -\sin\theta, +2\cos\theta) \qquad \text{(c)}$$

が得られる．z 軸上の正（$\theta = 0$）で力は $+z$ 方向を向いているが，z 軸の負の方向（$\theta = \pi$）で力は大きさが同じで，逆方向に向いている．したがって潮汐力は，z 軸の両側で地球の中心から海を**引きはなす**．それに対して，潮汐力は x または y 軸に沿って中心に向かって**押しつける**．その結果，図にあるような 2 こぶの膨らみになり，地球が下で回転すると 1 日に 2 回の満潮と干潮ができる（より現実的には，潮の膨らみは月の方向を向いておらず，時間差が生じて月が頭上にある時刻よりもずれる．なぜかわかるだろうか）．

となる．ここで $n^i \equiv x^i/r$ は半径方向の単位ベクトルの成分である．極座標 (r, θ, ϕ) の座標方向を向いている正規直交基底 $(\vec{e}_{\hat{r}}, \vec{e}_{\hat{\theta}}, \vec{e}_{\hat{\phi}})$ で，潮汐加速度テンソルの 0 でない成分は

$$a_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{2M}{r^3}, \qquad a_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = a_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3} \tag{21.8}$$

である．この基底で偏差方程式の成分は

$$\frac{d^2\chi^{\hat{r}}}{dt^2} = +\frac{2M}{r^3}\chi^{\hat{r}}, \qquad \frac{d^2\chi^{\hat{\theta}}}{dt^2} = -\frac{M}{r^3}\chi^{\hat{\theta}}, \qquad \frac{d^2\chi^{\hat{\phi}}}{dt^2} = -\frac{M}{r^3}\chi^{\hat{\phi}} \tag{21.9}$$

となる．これらから，中心質量に落下する物体は潮汐重力で半径方向に伸ばされ横方向に圧縮されることがわかる．

例 21.2. **スペースシャトルの内側における地球の重力場の検出**　スペースシャトルが地球に向けて自由落下している．ニュートン物理学を用いて例 6.3 で行ったように，内部の宇宙飛行士は地球の

重力場を検出するために，2 つのピンポン球の相対運動を分析する．半径 R を通過したとき，2 つの球は $t=0$ で静止した状態で放され，短い距離 s だけ半径方向に離れている．間隔ベクトルは初め $\vec{\chi}=s\vec{e}_{\hat{r}}$ であり，時間微分も 0 である．これ以降の $\vec{\chi}$ の時間発展は偏差方程式 (21.9) によって決まる．$t=0$ 以降の短い期間で，(21.9) 式は

$$\vec{\chi}(t) \approx s\cosh\left[(1+(M/R^3)t^2\right]\vec{e}_{\hat{r}} \tag{21.10}$$

となる．これは $|\vec{\chi}|$ が小さく r がほとんど変わらないほど十分短い時間内でだけ正しい．このような時間に対して，球の間隔の変化 $\delta s(t)$ は

$$\delta s(t)/s \approx (2\pi t/P)^2 \tag{21.11}$$

である．ここで P は半径 R の円軌道の周期である．これは例 6.3 の評価 (6.15) と一致する．地球の重力場は球の偏差を通じて検出することができる．

興味深いことに，Φ は潮汐加速度 (21.5) を定義し，ニュートン重力 (3.18) の場の方程式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\mu \tag{21.12}$$

は Φ の 2 階微分で表すことができる．特に

$$\nabla^2\Phi = \delta^{ij}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}\right) = 4\pi G\mu \tag{21.13}$$

である．一般相対論にも同じような関係が存在する．

21.2 測地線偏差の式

この節ではニュートン的偏差方程式 (21.5) を曲がった 4 次元時空に一般化した方程式を導出する．それは**測地線偏差の式**と呼ばれる．$\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^j$ と類似する量は局所的な時空曲率の量である．

興味の対象は間隔の 4 元ベクトル $\boldsymbol{\chi}$ であり，図 21.3 に示したように互いに近い 2 本の測地線の無限小の差である．2 本の測地線で同じ固有時の 2 つの事象をつなぐ．測地線の固有時の原点は任意で，そのため間隔ベクトルを定義する方法に多様性が生じる．たとえば，ある初期の瞬間において $\boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u}=0$ を満たすものと要請することができる．だが，これは初めを固定しているだけで，重要な問題はそれが τ とともにどのように変化するかである．

一般相対論において，ニュートン理論の (21.5) 式と似た間隔ベクトル $\boldsymbol{\chi}$ の時間発展を追跡する方程式を求めるため，観測者の固有時 τ について $\boldsymbol{\chi}$ の 2 階微分を計算する必要がある．観測者の世界線 $x^\alpha(\tau)$ で評価される**関数** $f(x)$ の微分は

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = u^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} f \tag{21.14}$$

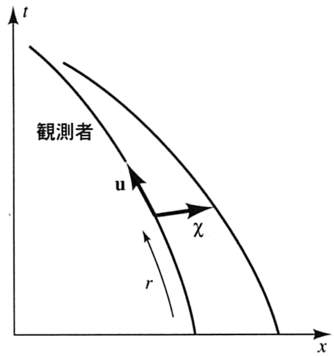


図 21.3 測地線偏差．これは，図 21.1 と 21.2 で述べた潮汐加速度または時空の曲率を決める測定を説明する図である．図は観測者の世界線とそのすぐそばにあるテスト粒子の世界線が時間が経つにつれ，近づいていることを表している．ともに自由落下しているので，測地線上を運動している．観測者からテスト粒子に向かう無限小の差となる 4 元ベクトル$\boldsymbol{\chi}$は間隔ベクトルと呼ばれる．観測者の世界線に沿った間隔ベクトルの加速度は時空曲率の定量的な測定量となる．

である．ここで $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ は観測者の 4 元速度であり，$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u} f$ は $\mathbf{u}$ 方向の共変ベクトルである [(20.63) 式を参照]．$\boldsymbol{\chi}$ のようなベクトルの τ についての微分は $\mathbf{u}$ に沿った同じような**共変微分**

$$\mathbf{v} \equiv \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\chi} \tag{21.15}$$

で与えられ，τ についての 2 階微分（間隔ベクトルの加速度）は

$$\mathbf{w} \equiv \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\chi} \tag{21.16}$$

で与えられる．ニュートン的な式 (21.5) に似た $\boldsymbol{\chi}$ を求めるためには (21.16) 式だけを評価すればよい．

ベクトルの共変微分の公式 (20.54) はどんな座標基底でもベクトル $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\chi}$ と $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\mathbf{v}$ の成分の式が得られる：

$$v^\alpha \equiv (\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\chi})^\alpha = u^\beta \nabla_\beta \chi^\alpha = \frac{d\chi^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta \chi^\gamma \tag{21.17}$$

$$w^\alpha \equiv (\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\mathbf{v})^\alpha = u^\delta \nabla_\delta v^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} u^\delta v^\gamma \tag{21.18}$$

ここで $u^\beta(\partial\chi^\alpha/\partial x^\beta)$ のような式は，(21.14) 式を使って，$d\chi^\alpha/d\tau$ として書かれている．

間隔ベクトルの加速度 $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{u}\boldsymbol{\chi}$ の式を求めるために，(1) v^α に対して (21.17) 式を (21.18) 式に代入し，必要な微分を実行する．(2) $x^\alpha(\tau) + \chi^\alpha(\tau)$ に対して測地線方程式 (8.14) を，ニュートンの式 (21.3) と同じように $\chi^\alpha(\tau)$ の 1 次のオーダーまで展開する．(3) これから，$x^\alpha(\tau)$ に対する測地線方程式を引き，(1) の結果から $d^2\chi^\alpha/d\tau^2$ を消去した式を求める．これは添字に注意を払うよい計算問題であるが，十分複雑なので，本書のウェブサイトに譲る．(21.17) 式と (21.18) 式

表 21.1 ニュートン重力と一般相対性理論

	ニュートン重力	一般相相対性理論
基本的な場の量	重力ポテンシャル $\Phi(x^i, t)$	計量 $g_{\alpha\beta}(x)$
運動方程式（場の 1 階微分を含む）	ニュートンの法則 $\dfrac{d^2x^i}{dt^2} = -\delta^{ij}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^j}$	測地線方程式 $\dfrac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}\dfrac{dx^\gamma}{d\tau}$
2 粒子間の偏差の方程式（2 階微分を含む）	ニュートン偏差 $\dfrac{d^2\chi^i}{dt^2} = -\delta^{ij}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}\right)\chi^k$	測地線偏差 $\dfrac{d^2\chi^{\hat\alpha}}{d\tau^2} = -R^{\hat\alpha}{}_{\hat\tau\hat\beta\hat\tau}\chi^{\hat\beta}$
偏差の加速度を決める量	潮汐力 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}$	リーマン曲率 $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}/\partial x^\gamma - \partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}/\partial x^\delta + \Gamma^\alpha_{\gamma\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\gamma}$
真空の場の方程式	ラプラス方程式 $\nabla^2\Phi = \delta^{ij}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j} = 0$	真空のアインシュタイン方程式 $R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} = 0$

の形から，結果が χ^α に線形で，2 つの u^α に比例し，クリストフェル記号の 1 階微分を含み，それらの積であろうことは明らかである．その結果は以下の式になる：

$$\boxed{(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\chi})^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta\chi^\gamma u^\delta} \tag{21.19}$$

測地線偏差の式

ここで

$$\boxed{R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\beta\gamma}} \tag{21.20}$$

リーマン曲率

である．(21.19) 式は測地線偏差の式と呼ばれ，ニュートン的な (21.5) 式を相対論に一般化したものであり，対応は表 21.1 から明らかである．したがって $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ は時空曲率の探査用の量であり，4 ランクのテンソルで**リーマン曲率テンソル**または短縮して**リーマン曲率**と呼ばれる．(21.19) 式からわかるように，ベクトル $\mathbf{u}$ と $\boldsymbol{\chi}$ から左辺の加速度への線形写像を与えるので，テンソルであることがわかる．(21.20) 式は**座標基底** 成分を与える．その詳しい性質は次章で議論する．

測地線偏差の式は 4 元速度 $\mathbf{u}$ の測地線にしたがう自由落下系で書くと，かなり簡単な形になる．$\mathbf{e}_{\hat\alpha}$ と $\mathbf{e}^{\hat\alpha}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat\alpha} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{e}^{\hat\alpha} = 0, \qquad \text{(自由落下系)} \tag{21.21}$$

を満たす自由落下系の基底ベクトルおよび双対基底ベクトルとする [(20.79) 式を参照]．シュワルツシルト幾何学内の自由落下系に対する基底ベクトルは，例として例 20.12 で計算した．(20.41) 式にしたがい，両辺に $(\mathbf{e}^{\hat\alpha})\alpha$ をかけ，α について和をとる．$\mathbf{e}^{\hat\alpha}$ が (21.21) 式を満たすので，以下の

例のように $\mathbf{e}^{\hat{\alpha}}$ は (21.19) 式の左辺の共変微分の内側で動く：

$$(\mathbf{e}^{\hat{\alpha}})_{\alpha}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\chi})^{\alpha} = \mathbf{e}^{\hat{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}^{\hat{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\chi}) = d\chi^{\hat{\alpha}}/d\tau \tag{21.22}$$

2 番目の等号では $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{e}^{\hat{\alpha}} = 0$ を使い，3 番目の等号は $\mathbf{e}^{\hat{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\chi}$ がスカラー関数であることから成り立つ．したがって $u^{\hat{\alpha}} \equiv (\mathbf{e}_{\hat{\tau}})^{\hat{\alpha}} = (1, \vec{0})$ であることに気をつけると

$$\boxed{\frac{d^2\chi^{\hat{\alpha}}}{d\tau^2} = -R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\tau}\hat{\beta}\hat{\tau}}\chi^{\hat{\beta}} \qquad \text{(自由落下系)}} \tag{21.23}$$

が得られる[1]．ここで [(20.41) 式を参照]

$$R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}(\mathbf{e}^{\hat{\alpha}})_{\alpha}(\mathbf{e}_{\hat{\beta}})^{\beta}(\mathbf{e}_{\hat{\gamma}})^{\gamma}(\mathbf{e}_{\hat{\delta}})^{\delta} \tag{21.24}$$

は自由落下系のリーマンテンソルの成分である．

測地線偏差の式ほど見かけ上複雑な式を使えば，ニュートン極限で (21.5) 式になることを確認すると安心できるかもしれない．この極限をとるためには，静的弱場近似計量 (6.20)（$c = 1$ 単位系）

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{21.25}$$

を使い，ニュートンポテンシャル Φ の 1 次のオーダーまで (21.23) 式を評価すればよい．Φ はニュートン極限では小さい．曲率は Φ の 0 次で 0 になるので，最低次の基底ベクトルだけが必要となる．自由落下系の中心が光の速さよりもかなり遅く運動する粒子であるとき [(20.81) 式を参照]，これらの基底ベクトルは (21.25) 式の座標基底ベクトルに一致する．したがって，最低次では，(21.23) 式を

$$\frac{d^2\chi^i}{dt^2} = -R^i{}_{tjt}\chi^j \tag{21.26}$$

と書くことができる．(21.25) 式で計算して，(21.5) 式と一致させるためには，$R^i{}_{tjt}$ は $\partial^2\Phi/\partial x^i \partial x^j$ と等しくならなければならない．本当にそうだろうか．直接 (21.20) 式から答えを得ることは難し過ぎるというわけでもないし，付録 B でみつけることもできる．答えを求めるには Φ によってつくられる計量の小さな摂動の最低次だけが必要であることを認識すべきである．最低次で，Γ は Φ に比例する．したがって (21.20) 式の最後の 2 つの項は最初の 2 つの項に比べて無視できる．2 番目は，Γ の時間微分の項であり，Φ が時間独立なので 0 になる．残るのは（$c = 1$）

$$R^i{}_{tjt} = \frac{\partial \Gamma^i_{tt}}{\partial x^j} = \delta^{ik}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^k \partial x^j} \tag{21.27}$$

である．(21.27) 式を (21.26) 式に代入すると，ニュートン偏差の式 (21.5) になる．

---

[1] 潜在的な混乱を避けるため，(21.23) 式に関係する記法を復習するとよい．中心となる測地線に沿った固有時は自由落下系の時間座標でもある．これは左辺のパラメータのように見なせ，その方向を指している正規直交基底ベクトル $\mathbf{e}_{\hat{\tau}}$ のようにも見なせる [(20.81a) 式を参照]．ちょうど $p^{\hat{\tau}}$ が運動量の $\mathbf{e}_{\hat{\tau}}$ 方向の成分を表しているのと同じように，(21.23) 式の右辺にある $\hat{\tau}$ はこの方向のリーマンテンソルの成分を表している．この場合，添字が繰り返していても和はとらない．

回転するブラックホールのような，そこそこ複雑な計量でさえもリーマン曲率の独立な 20 成分を手で計算しようとするとかなりやっかいだ．このような数式の計算をコンピュータで行うためのソフトウェアがいろいろある．簡単なものとして，*Curvature and the Einstein Equation* と名づけられた *Mathematica* のノートブックが，本書のウェブサイトにある．シュワルツシルト計量に関するいろいろな曲率の量の計算例を付録 C に示した．付録 B には曲率の量の表があり，本書で考察する計量のほとんどのリーマン曲率がある．

21.3　リーマン曲率

性質

リーマン曲率 (21.20) の形は 1 点の局所慣性系（LIF）でかなり簡略化される（7.4 節を見よ）．そこでは $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ と計量の 1 階微分が 0 になる．たとえば，(21.20) 式の最後の 2 つの項はすぐに 0 になり，最初の 2 つの項は簡単になる（問題 6）．(20.35) 式で行ったように，$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ の最初の添字を下げることにより

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta}\right) \qquad \text{(LIF)} \qquad (21.28)$$

を得る．

リーマン曲率には一般的に正しいとわかる対称性があり，(21.28) 式から直接的に確かめることができる（問題 7）：

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \qquad (21.29\text{a})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \qquad (21.29\text{b})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = +R_{\gamma\delta\alpha\beta} \qquad (21.29\text{c})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \qquad (21.29\text{d})$$

これらの対称性から，リーマン曲率の $4 \times 4 \times 4 \times 4$ 成分すべてが互いに独立ではないことがわかる．実際，独立な成分はたった 20 しかない（問題 7）．問題 7.9 を解いていれば，計量の一階微分とは違い，座標変換で 2 **階**微分を 0 にすることはできず，20 の組合せがあることを知っているだろう．リーマン曲率はこれら 20 の組合せである．

リーマン曲率の次元は (長さ)$^{-2}$ であり，典型的な成分が $\sim 1/L^2$ となる長さスケール L は**曲率スケール**と呼ばれる．たとえば，半径 a の 2 次元球で，曲率の成分が $\sim 1/a^2$ であると期待する．一般相対論では質量が曲率を生じるため，曲率が $\sim$ (質量スケール)/(距離スケール)^3 であることを期待する．シュワルツシルト幾何学は簡単な例を与える．次節でそれをみるだろう．

シュワルツシルト幾何学の曲率

曲率のアイディアは第 9 章のシュワルツシルト幾何学を調べると容易に説明できる．図 21.1 のような，テスト粒子の実験室系とともに無限遠から半径方向に自由落下する観測者を考えよう．簡単のため，実験室は無限遠で静止した状態から半径方向に落下し始めるとする．この自由落下系の基底ベクトルは (20.81) 式で求めた．この自由落下系のリーマン曲率のうち 0 にならない成分は

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -2M/r^3 \tag{21.30a}$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = +2M/r^3 \tag{21.30b}$$

$$R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = +M/r^3 \tag{21.30c}$$

$$R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -M/r^3 \tag{21.30d}$$

であることがわかる（問題 8）．0 にならない成分は，(21.29) 式の対称性を使うことで求めることができる（これらの式で繰り返し現れるギリシャ文字の添字は和ではなく，自由落下系の方向を表す成分のラベルである）．

(21.30) 式を使うと，測地線偏差の式 (21.23) は簡単な形

$$\frac{d^2\chi^{\hat{r}}}{d\tau^2} = +\frac{2M}{r^3}\chi^{\hat{r}}, \qquad \frac{d^2\chi^{\hat{\theta}}}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^3}\chi^{\hat{\theta}}, \qquad \frac{d^2\chi^{\hat{\phi}}}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^3}\chi^{\hat{\phi}} \tag{21.31}$$

になる．偶然にも，これらは球対称重力ポテンシャル中のニュートン偏差方程式 (21.9) と同じ形をしている．(21.31) 式から，シュワルツシルトブラックホールに落下する観測者は半径方向に引き伸ばされ横方向に圧縮されることがわかる．シュワルツシルト半径 $r = 2M$ で潮汐加速度は有限である．これがシュワルツシルト座標における計量の特異点が座標特異点であり，本当の特異点ではないことを知る別の方法である．実際，地平における潮汐加速度は $\sim 1/M^2$ のオーダーであり，ブラックホールが大きいと小さくなる．

$r = 0$ の半径では話が別だ．そこでは潮汐力は無限大になり，観測者（または他のどんなものでも）は $r = 0$ に近づくと破壊されるだろう．半径 $r = 0$ は本当の特異点である．

例 21.3. 宇宙海賊　あなたは不幸なことに宇宙海賊に捕らえられた．彼らは捕虜を宇宙服のままで，我々の銀河中心にある質量 $3 \times 10^6 M_\odot$ のブラックホールに落として処刑する（図 13.4）．彼らは一般相対性理論を理解し，地平を越えると捕虜は戻って来れないことを知っている．ブラックホールの内部を見るべく地平を横切った後，あなたには少なくとも約 1 分あると考えることで自分をなぐさめている．しかし，あなたは地平を越えるときに発生する潮汐的圧迫を生き残れるだろうか．もし生き残れたとすれば，半径方向に引き伸ばされ横方向に潰される前に特異点にどれだけ近づくことができるだろうか．自分で約 10^4 N（約 1 トン）の力で引っ張られても耐えることができるだろうと見積もった．半径 r における潮汐力は測地線偏差の式 (21.31) から評価することができる．ここで，間隔ベクトルは足から頭に向かって伸びている．力は左辺の間隔ベクトルの加速度を m 倍したものである．G と c を戻し，右辺から半径 r での潮汐力を粗く評価すると $(GmM/r^2)(h/r)$ である．ここで M はブラックホールの質量であり，h はあなたの身長である．$m \sim 80\text{kg}$ と $h \sim 2\text{m}$ を仮定するとブラックホールの地平 $r = 2GM/c^2$ で 0.1N になる．したがって，容易に地平を横切ることができるだろう．潮汐力は $r \sim 2 \times 10^5\text{km}$ で 10^4N に達する．八つ裂きにされるまでに地平から特異点までのほとんどを通過することができるが，非常に速く通過することになるだろう．

21.4 真空のアインシュタイン方程式

局所的重力曲率を見つけたので，我々はアインシュタイン方程式を導入できるようになった．ニュートンの場合 (21.13) でそうであるように，真空の重力場の方程式には，測地線の偏差を表す量について和をとることで決まる量がある．相対論的な場合，この和は**リッチ曲率**の 10 個の成分

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta} \tag{21.32}$$

を定義する（同じ添字について和をとる）．リッチ曲率はクリストフェル記号から直接

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}} \tag{21.33}$$

リッチ曲率

で表される．$\nabla^2\Phi = 0$ の相対論的一般化である真空のアインシュタイン方程式は

$$\boxed{\boxed{R_{\alpha\beta} = 0}} \tag{21.34}$$

真空アインシュタイン方程式

である．(21.33) 式から $R_{\alpha\beta}$ が α と β で対称であることを示すのは難しくない（問題 14）．したがって，$R_{\alpha\beta} = 0$ は 10 個の計量係数 $g_{\alpha\beta}$ に対する 10 連立 2 階偏微分方程式である．これも方程式の数と未知関数の数の間でバランスをよくとっていると思えるだろう．しかし，$g_{\alpha\beta}$ を一意的に決める場の方程式群がないことに気がつくまでのことである．独立な 4 つの座標変換ができるという自由度が常に存在するためである．実際，$R_{\alpha\beta}$ には 4 つの微分の恒等式があり，そのため，6 つの独立な計量の自由度に対応する独立な方程式が実際に 6 つだけしかない．ビアンキ恒等式をなすこれらの恒等式を次章で示す．

ニュートン重力と電磁気の場合とは違い，一般相対論の場の方程式は非線形である．平坦時空は真空アインシュタイン方程式 (21.34) の 1 つの解であり，通常の直交座標ですべての Γ が真空で 0 になり，したがって $R_{\alpha\beta}$ もそうなる．しかしながら，他の解を見つけることは，解析的，数値的いずれにしても困難なことである．実際，(9.9) 式に引用したシュワルツシルト幾何学がアインシュタイン方程式の解であることを確かめるには長々と計算を続けなければならない．問題 16 と 17 の手引にしたがい含まれていることを見るために，一度手でこの計算をしてみるとよい．しかし，効率よく計算するためには，*Mathematica* のような数式処理ソフトウェアに頑張って計算してもらう．計量がどんなものでも，クリストフェル記号やリーマン曲率，リッチ曲率を計算するためには本書のウェブサイトが便利である．これらの威力を以下の例で説明する．

例 21.4. 真空アインシュタイン方程式を解いてシュワルツシルト計量を求める　あなたは無人島に囚われてシュワルツシルト計量 (9.9) を忘れてしまったとしよう．シュワルツシルト計量は静的球対称質量分布の外側の真空アインシュタイン方程式の最も一般的な解の 1 つである．もう一度求めるために，真空アインシュタイン方程式をどうやって解いたらよいのだろうか[2]．

[2] シュワルツシルト解の発見にまつわる状況は，ここでの想像上のできごとと，ある意味似ている．ただし，もう少し悲劇的である．第一次世界対戦中，1915 年の春と夏に，シュワルツシルトはドイツ軍から召喚され東部戦線に従軍

最初のステップは球対称で時間独立なことを使い，計量を単純な形にすることであろう．以下のような理由づけができるかもしれない：静的な重力源の計量は時間座標 t に独立であり，さらに線素には $dx^i dt$ の項は入らない．なぜならこれらの符号は入れ換え $t \to -t$ で変わるからである．球対称であることから，空間つまり $t=$ 一定の超曲面は 2 次元球の同心的な族をなしていると考えられ，半径座標 r で目盛をつけることができる．r は球面の面積で $r = [(\text{面積})/4\pi]^{1/2}$ で定義される．各球面で極座標の角度 θ と ϕ を導入し，球面が平坦空間の中に埋め込まれるとすると，その内在的幾何学がそうなるだろうと予想される線素 $d\Sigma^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ によって与えられる [(2.15) 式を参照]．さらに全時空の回転により座標 θ と ϕ がすべての球面上で同じように変換されるようにすべての球面上で極座標を選ぶ．このことから，$d\theta dr$ も $d\phi dr$ の項も線素には存在しないことになる．これらの項があると球対称にはならないだろう．この粗い議論の結果（少しの仕事でより厳密な結果を得られるようになることを勧める）により，静的球対称曲率源の外側の線素が r の未知関数を含んで，一般的な形

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{21.35}$$

で表されることを判断できる．このように，$\nu(r)$ と $\lambda(r)$ で $g_{tt}(r)$ と $g_{rr}(r)$ を表すことは単に伝統的な理由からである．重要な点は，4 つの変数に対して 10 個の未知の計量関数が，1 変数の 2 つの未知関数に減り，10 個の非線形偏微分方程式が 2 つの常微分方程式に減るということである．これで非常に大きく単純化された．

次のステップは計量 (21.35) を使って，アインシュタイン方程式 $R_{\alpha\beta} = 0$ を書き下すことである．幸運にも，無人島にはラップトップコンピュータもあり，本書のためのウェブサイトには *Mathemetica* ノートブック *Curvature and the Einstein Equation* が掲載されている．どんな曲率の量も計算できる[3]．プログラムではリッチ曲率 R を出力することができ，それを組み合わせることでアインシュタインテンソル $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - (1/2)g_{\alpha\beta}R^{\gamma}_{\gamma}$ も計算できる（これは，アインシュタイン方程式の左辺で，右辺は次章で考察する曲率の発生源である）．リッチテンソルが 0 ならば，アインシュタインテンソルも 0 でなければならなず，その逆も成り立つ．必ずしもそうする必要はないが，例 7.9 で行ったように (20.41) 式を使い，座標軸に沿って $G_{\alpha\beta}$ の成分を直交基底上に射影する．付録 B で結果がどのように示されているかを思い出せばそうする理由がわかるだろう．$\nu(r)$ と $\lambda(r)$ について解くためには，方程式 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$ のうち 2 つが必要である．アインシュタイン方程式の成分はすべてが独立ではなく，2 つあれば他は自動的に満たされることがわかっているので，もっとも簡単な 2 つだけを選び出せば大丈夫である．もっとも簡単な 2 つというのは

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{21.36a}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0 \tag{21.36b}$$

した．彼は致命的な病に冒され 1916 年 5 月に死んだ．1915 年 12 月病床でシュワルツシルト解を発見した．これはアインシュタインが一般相対論の基本方程式を出版してからわずか 2-3 月後のことだった．

[3] 付録 C には，この問題だけを扱ったノートブックを印刷して掲載している．付録 B でも解答を見つけることができる．

である．ここでダッシュは r 微分を表す．

(21.36) 式の 1 つ目は λ だけの常微分方程式であり，

$$\frac{d}{dr}(re^{-\lambda(r)}) = 1 \tag{21.37}$$

と書くことができ，この解は，ある定数 A を使い

$$e^{-\lambda(r)} = 1 + A/r \tag{21.38}$$

と表される．$G_{\hat{t}\hat{t}} + G_{\hat{r}\hat{r}} = 0$ から $\nu' = -\lambda'$ が示され，これにより $\nu(r) = -\lambda(r) + B$ が得られる．ここで B は定数である．$g_{tt}(r)$ の結果は

$$e^{\nu(r)} = e^B(1 + A/r) \tag{21.39}$$

である．大きな r で極座標の標準的な平坦計量 (7.4) に一致することから，$B = 0$ となる．定数 A を $-2M$ として書き直すと，シュワルツシルト計量になり，9.1 節で考察したように M は全質量になる．

シュワルツシルト幾何学はこの導出以上に一般的である．発生源が時間的に変化していても，真空アインシュタイン方程式の唯一の球対称解である．この結果はバーコフの定理と呼ばれ，第 12 章の球対称崩壊を理解するためには重要なことである．問題 18 でバーコフの定理の導出を行う．

21.5　線形重力

これまでアインシュタイン方程式を解いていろいろな計量を示してきた．アインシュタイン方程式は，10 個の計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ に対する 10 連立非線形偏微分方程式からなる．現在のところ，このような系を解く一般的な技術もないし，「一般解」と呼ばれるようなものも（まだ）ない．特別な状況にかぎり方程式を解くことができる強力なテクニックが多くある．たとえば，以前述べたシュワルツシルト幾何学の球対称性のような対称性を含むような場合である[4]．しかし，一般的な非線形な場合と違い，幾何学が平坦時空と少しだけ違う時空についてアインシュタイン方程式の解の完全な解析を行うことは可能である．例は，第 6 章で考察した静的弱場計量 (21.25) である．我々は次に真空アインシュタイン方程式を線形化し，一般的な状況でその解き方を示す．

21.5.1　線形化された真空アインシュタイン方程式

ミンコフスキー座標 (t, x, y, z) で平坦時空の計量は $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ で，$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$ である．したがって平坦に**近い**幾何学の計量は

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x) \tag{21.40}$$

計量摂動

---

[4] このようなテクニックを包括的に述べたものについては Kramer et al.（1980）を見よ．

である [(16.1) 式を参照]．ここで $h_{\alpha\beta}(x)$ は**計量摂動**と呼ばれる小さな量である．

線形アインシュタイン方程式は (21.40) 式を $R_{\alpha\beta}=0$ に代入し，$h_{\alpha\beta}(x)$ の 1 次まで展開することで得られる．この展開の 1 次の項は平坦時空のリッチ曲率の 1 次の摂動 $\delta R_{\alpha\beta}$ であり，これは $h_{\alpha\beta}(x)$ に線形である．このようにして線形真空アインシュタイン方程式は

$$\delta R_{\alpha\beta}=0 \tag{21.41}$$

である．これは $h_{\alpha\beta}(x)$ に対する 10 連立**線形**偏微分方程式である．

$\delta R_{\alpha\beta}$ が $h_{\alpha\beta}(x)$ にどのように依存しているのかを表す公式を求めるために，クリストフェル記号で表したリッチ曲率の式 (21.33) と，計量で表したクリストフェル記号 (20.53) を使う．$\eta_{\alpha\beta}$ のすべての成分が定数であることから，最低次または 0 次で，摂動 $h_{\alpha\beta}(x)$ は無視でき，クリストフェル記号は 0 になり，曲率も 0 になる．

クリストフェル記号の 1 次の摂動は

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial h_{\delta\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}\right) \tag{21.42}$$

である．リッチ曲率の摂動は (21.33) 式の最後の二項が $h_{\alpha\beta}$ の 2 次式であり，線形近似では無視できるため，計算が容易になる．したがって，

$$\delta R_{\alpha\beta}=\frac{\partial\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} \tag{21.43}$$

が得られる．(21.42) 式を (21.43) 式に代入することにより，真空の線形アインシュタイン方程式 (21.41) は

$$\delta R_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[-\Box h_{\alpha\beta}+\partial_\alpha V_\beta+\partial_\beta V_\alpha\right]=0 \tag{21.44}$$

となる．この式の中の記号の定義は以下に示した．$\Box$ は平坦空間の波動演算子（ダランベール演算子と呼ばれることがある）

波動演算子

$$\Box\equiv\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\vec{\nabla}^2 \tag{21.45}$$

であり，∂_α は $\partial/\partial x^\alpha$ の略である．ベクトル V_α は摂動の特別な組み合わせ

$$V_\alpha\equiv\partial_\gamma h^{\gamma}_{\alpha}-\frac{1}{2}\partial_\alpha h^{\gamma}_{\gamma} \tag{21.46}$$

である．ここで[5]

$$h^{\gamma}_{\alpha}=\eta^{\gamma\delta}h_{\delta\alpha} \tag{21.47}$$

である．(21.47) 式は線形重力で便利な一般的な関係の例である．**線形の範囲で，摂動の添字は平坦空間計量で上げ下げすることができる．**添字を上げるとき，(21.40) 式にしたがい，$g^{\alpha\beta}$ の 1 次を含めても，その項は h^{α}_{β} と $\delta R_{\alpha\beta}$ に対する 2 次補正になり無視できる．

---

[5] 厳密にいえば，$h^{\beta}{}_{\alpha}$ と書くべきである．(21.47) 式で上げられているのは最初の添字であり，添字の順序は一般的に非常に重要だからである．しかし，この場合のように，$h_{\alpha\beta}$ が対称であるとき，順序に差はない．したがって $h^{\beta}{}_{\alpha}=h_{\alpha}{}^{\beta}$ であり，混乱の危険はないので，通常の記法にしたがい，どちらに対しても h^{β}_{α} と書く．

例 21.5. ニュートン近似 線形重力の方程式の最初の応用は，Φ が t に独立で，ニュートン重力の真空方程式 [(3.18) 式を参照]

$$\nabla^2 \Phi(x^i) = 0 \tag{21.48}$$

を満たすとき，静的弱場計量 (21.25) が線形真空アインシュタイン方程式を満たすかどうかを確かめることである．計量 (21.25) と (21.40) 式を比較すると，以下の計量摂動が得られる：

$$h_{tt} = -2\Phi, \qquad h_{ti} = h_{it} = 0, \qquad h_{ij} = -2\delta_{ij}\Phi \tag{21.49a}$$

および

$$h^i_j = -2\delta^i_j \Phi, \qquad h^\beta_\beta = -4\Phi \tag{21.49b}$$

$V_\alpha = 0$ は自明であり，線形アインシュタイン方程式 (21.44) がニュートン方程式 (21.48) になることが直接わかる．

座標の選択 —— ゲージ

何度も強調してきたように座標は任意に選べる．座標を注意深く選ぶことにより，線形アインシュタイン方程式の解は簡単になる．実際，座標に**ある**条件を課すことが本質的になる．座標系を変えることにより，幾何学を変えずに座標の値を変えることができることから，10 個の方程式 $\delta R_{\alpha\beta} = 0$ では $h_{\alpha\beta}(x)$ を一意的に決めることができない．

(21.40) 式で，平坦計量が $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ で，$h_{\alpha\beta}$ が今のところ未知の摂動となっている座標系であることを仮定した．しかし，この仮定では座標を一意的に決めることができない．これではまだ $\eta_{\alpha\beta}$ を変えず，$h_{\alpha\beta}(x)$ の形を変えることで座標に小さい変化を及ぼすことができる．このような変化は $h_{\alpha\beta}$ の関数の形を変えるが，(21.40) 式の形を変えない．

このことをみるために

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x) \tag{21.50}$$

の形の座標の変化を考えよう．ここで $\xi^\alpha(x)$ は 4 つの任意の関数であり，その微分も計量摂動 $h_{\alpha\beta}(x)$ と同じく小さい．座標変換のもとで，計量は一般的に (20.44) 式からわかるように

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} g_{\gamma\delta}(x) \tag{21.51}$$

で変換する．

(21.50) 式から，$x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha(x^\beta) = x'^\alpha - \xi^\alpha(x'^\beta)$ であり，この最後の等式は ξ^α の 1 次まで正しい．実際，1 次では，一般的に x'^α に x^α を代入することができる．たとえば，

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{21.52}$$

とできる．少し計算すると，(21.51) 式から (21.40) 式の形の計量は新しい摂動

$$\boxed{h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha} \tag{21.53}$$

ゲージ変換

表 21.2 線形重力と電磁気のゲージ変換

	線形重力	電磁気
基本的な「ポテンシャル」	線形計量摂動 $h_{\alpha\beta}(x)$	ベクトルとスカラーポテンシャル $(\Phi(t,\vec{x}),\vec{A}(t,\vec{x}))$
場の量	線形リーマン曲率 $\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$	電場と磁場 $\vec{E}(t,\vec{x}),\vec{B}(t,\vec{x})$
同じ場で新しい ポテンシャルへの ゲージ変換	$h_{\alpha\beta}\to h_{\alpha\beta}-\partial_\alpha\xi_\beta-\partial_\beta\xi_\alpha$	$\vec{A}\to\vec{A}+\nabla\Lambda$ $\Phi\to\Phi-\partial\Lambda/\partial t$
ゲージ条件の例	ローレンツゲージ $\partial_\beta h^\beta_\alpha-\frac{1}{2}\partial_\alpha h^\beta_\beta=0$	ローレンツ条件 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\partial\Phi/\partial t=0$
ゲージ条件で 簡単になった場の方程式	$\Box h_{\alpha\beta}=0$	マクスウェル方程式 $\Box\vec{A}=0$ $\Box\Phi=0$

になるが，同じ形の計量に変換される．変換 (21.53) は**ゲージ変換**と呼ばれ，これは電磁気学のゲージ変換との類似性による（表 21.2 を見よ）．

$\xi^\alpha(x)$ は 4 つの任意の関数なので（ただし小さい），その任意性を使って変換後の $h_{\alpha\beta}(x)$ の形を簡単にすることができる．特に，4 つの条件

$$V'_\alpha(x)=0 \tag{21.54}$$

が満たされ，(21.44) 式が $\delta R'_{\alpha\beta}=-(\frac{1}{2})\Box h'_{\alpha\beta}=0$ になるように ξ^α の任意性を決める．しかし，まだ摂動 $h_{\alpha\beta}$ について解いていない．よって (21.54) 式が満たされている座標系をすでに選んでいると仮定してもよいだろう．したがってプライムを外し，アインシュタイン方程式 $\delta R_{\alpha\beta}=0$ が波動方程式

線形アインシュタイン方程式

$$\boxed{\Box h_{\alpha\beta}(x)=0} \tag{21.55}$$

になり，ゲージ条件

ローレンツゲージ条件

$$\boxed{V_\alpha\equiv\partial_\beta h^\beta_\alpha(x)-\frac{1}{2}\partial_\alpha h^\beta_\beta(x)=0} \tag{21.56}$$

を伴う．すでに電磁気学を習っていれば，(21.56) 式とローレンツゲージ条件の類似性がここで使われていることに気づいていることだろう．この類似性を表 21.2 に説明した．この理由のため，(21.56) 式の 4 つの条件は**ローレンツ条件**とよく呼ばれる．(21.55) 式と (21.56) 式は線形重力の基本的な方程式である．

例 21.6. 重力波計量は線形アインシュタイン方程式を満たす 第 16 章の主題であった重力波計量 (16.2a) が実際，ローレンツゲージ (21.56) で線形アインシュタイン方程式の解になっていることを確かめることができるようになった．$V_\alpha=0$ は，恒等的に 0 になるか，または

$\partial_t f(t-z) = -\partial_z f(t-z)$ になるため，すぐチェックできる．よってローレンツゲージ (21.56) が満たされる．(21.55) 式は，$f(t-z)$ が波動方程式の解であることから満たされる．したがって摂動 (16.2a) は線形アインシュタイン方程式の解になっている．

例 21.6 は (16.2a) 式で示される重力波計量が線形アインシュタイン方程式を満たすことを述べている．線形重力の方程式を解くことにより，計量がどのようにして求められるかを直接示すことができる．

波動方程式の解法

計量摂動は 2 つの方程式によって決まる：波動方程式 (21.55) とゲージ条件 (21.56)．波動方程式を解くことは物理学の多くの分野でよく出くわす問題であり，それがどのように行われるかを簡単に復習しておこう．

ものごとを簡単にするため，まず，スカラー $f(x)$ の平坦空間の波動方程式を考えよう：

$$\Box f(x) \equiv \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 f = 0 \tag{21.57}$$

これはフーリエ変換で解ける．まず

$$f(x) = ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{21.58}$$

の形の解を探そう．ここで

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = -k^t t + \vec{k}\cdot\vec{x} \tag{21.59}$$

である．$\mathbf{x}$ は成分が $x^\alpha = (t, \vec{x})$ の平坦空間の位置 4 元ベクトルで，$\mathbf{k}$ は定数波数 4 元ベクトルである．(21.58) 式を (21.57) 式に代入すると

$$\Box f = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\ f \tag{21.60}$$

が得られる．ここで $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ は平坦空間のスカラー積として計算される．(21.60) 式は $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0$ のとき，つまり，$\mathbf{k}$ がヌルベクトルのとき 0 になる．ヌルベクトルは

$$\mathbf{k} = (|\vec{k}|, \vec{k}) \tag{21.61}$$

の形で書かれ，しばしば振動数 $k^t = |\vec{k}|$ には標準的な記法 $\omega_{\vec{k}}$ を使う．

物理的な解は (21.58) 式の実部をとることで得られ，それは

$$|a|\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \delta) = |a|\cos(-\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\cdot\vec{x} + \delta) \tag{21.62}$$

の形をしている．これは，速さ $\omega_{\vec{k}}/|\vec{k}| = 1$ でベクトル $\vec{k}$ の方向に進んでいる波を表し，その振動数は $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$, 波長は $2\pi/|\vec{k}|$ である．波動方程式の解が光速で進む波であることがわかった．

波動方程式 (21.57) の一般解は (21.58) 式のような決まった波数ベクトルを持った波の重ね合わせによって構成することができる：

$$f(x) = \int d^3k\, a(\vec{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{21.63}$$

積分は $\vec{k}$ のすべての値にわたって行う．たとえば，k^x を $-\infty$ から ∞ へ．$a(\vec{k})$ は任意の複素振幅である．(21.63) 式の実部をとり，物理的な量を表す実数解を得る．

さらにゲージを

重力波摂動の各成分は，(21.55) 式にしたがい平坦時空間波動方程式を満たす．したがって波数ベクトル $\vec{k}$ に対して

$$h_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{21.64}$$

となる．ここで $a_{\alpha\beta}$ は 4 行 4 列の対称行列であり，波のいろいろな成分の振幅になる．これらの振幅は任意ではない．波動方程式に加え，計量摂動はゲージ条件 (21.56) を満たさなければならない．しかしこれらの条件ではさらに座標変換をすることができ，行列 $a_{\alpha\beta}$ を簡単にするのに使える．条件 $V_\alpha(x) = 0$ を乱さないような $\xi_\alpha(x)$ に対する (21.53) 式の形の座標変換は許される．(21.53) 式に $V_\alpha(x) = 0$ を代入し，$h_{\alpha\beta}(x)$ がすでにこの条件を満たしていることに気をつけると，ローレンツゲージ条件を満たし続けている $\xi_\alpha(x)$ の条件として

$$\Box\xi_\alpha(x) = 0 \tag{21.65}$$

が得られる．しかし，$h_{\alpha\beta}(x)$ も波動方程式 [(21.55) 式を参照] を満たさなければならないので，これらの座標変換を $h_{\alpha\beta}$ のどの 4 つも恒等的に 0 にすることができる．我々は

$$h_{ti} = 0 \tag{21.66a}$$

$$h^\beta_\beta = 0 \tag{21.66b}$$

または $a_{ti} = a^\beta_\beta = 0$ とするように選ぶ．

(21.66) 式を使うと，4 つの条件 $V_\alpha = 0$ は今

$$V_t = \frac{\partial h^t_t}{\partial t} = +i\omega_k a_{tt}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0,$$

$$V_i = \frac{\partial h^j_i}{\partial x^j} = ik^j a_{ji}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0 \tag{21.67}$$

となった．V_α は (21.56) 式によって与えられる（上の式では t で和をとらない）．これから，

$$a_{tt} = 0 \tag{21.68a}$$

$$k^j a_{ij} = 0 \tag{21.68b}$$

がわかる．上式の 2 番目から，電磁波がそうであるように，重力波が横波であることがわかる．

もともとの $a_{\alpha\beta}$ のうち，2 つだけが残っている．4 つの時間成分は (21.66a) 式と (21.68a) 式のため 0 なる．(21.66b) 式と (21.68b) 式は合計 4 つの条件である．よって $a_{\alpha\beta}$ の 2 つだけが独立である．これを明確に書き表すもっとも容易な方法は，空間座標を回転させ，1 つの軸，たとえば z 軸を波の伝達方向に選ぶことである．そのためには $\vec{k} = (0, 0, \omega)$ とすることである．横波条件から，a_{zj} の成分はすべて 0 になることがわかる．残りは x-y 部分空間の 2×2 対称行列であり，

(21.66b) 式のため，そのトレースは 0 でなければならない．座標系を注意深く選ぶことにより，決まった波数をもつ線形アインシュタイン方程式の**最も一般的な**解は

$$h_{\alpha\beta}(x) = \begin{matrix} & t & x & y & z \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & a & b & 0 \\ y & 0 & b & -a & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; e^{i\omega(z-t)} \tag{21.69}$$

トランスバーストレースレスゲージ

である．横波トレースレス条件がはっきりわかる座標の選び方は**トランスバーストレースレスゲージ**（transverse-traceless gauge）または略して TT ゲージと呼ばれる．

(21.69) 式は厳密に第 16 章で考察した重力波時空の一般的な形である．波がある決まった振動数 ω のときは (16.17) 式になる．a と b に比例した (21.69) 式の部分は，重力波の 2 つの別々の偏極を表している．a に比例した部分は + （プラス）偏極，b に比例した部分は × 偏極と呼ばれる．ただしこれらは基底依存した分け方をしている．線形アインシュタイン方程式の一般解は (21.69) 式の形をしたいろいろな ω の値，いろいろな方向，2 種類の偏極のいろいろな振幅をした波の重ね合わせである．

トランスバース-トレースレスゲージへの変換

すべての成分が 0 にならず，(21.64) 式のような平面波の形をし，ローレンツゲージ条件を満たし，TT ゲージに変換する簡単で便利なアルゴリズムがある．それを示すために，簡単のため $\vec{k} = (0, 0, \omega)$ となる z 方向に進む波を考えよう．条件 (21.66) を生じさせるゲージ変換が $\xi^\alpha \propto \exp[i\omega(z-t)]$ の形をしており，z と t だけに依存する．変換 (21.53) から，$h_{\alpha\beta}$ の x-y の部分行列の成分は変わらないことがわかる．したがって，ゲージ変換の結果を得るために，まず，x-y 部分行列以外の成分をすべて 0 におく．残りの成分のトレースは，ローレンツゲージのため自動的に 0 になり，自由に引き去られる．したがって，波の方程式とローレンツゲージを満たす一般的な摂動 $h_{\alpha\beta}$ を TT ゲージに変換する簡単なアルゴリズムは，計量の横成分以外はすべて 0 にし，残っている対角成分からトレース部分を取り去るというものだ． z 方向に伝わる波の例では，

$$h^{TT}_{\alpha\beta} = \begin{matrix} & t & x & y & z \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{2}(h_{xx}-h_{yy}) & h_{xy} & 0 \\ y & 0 & h_{xy} & \frac{1}{2}(h_{yy}-h_{xx}) & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \tag{21.70}$$

となるだろう．これは正確に (21.69) 式の形である．

問題

1. 質量分布の外側のニュートン的潮汐力はなぜある方向に潰され，別の方向では膨張するのだろうか．（**ヒント**：ニュートン重力ポテンシャルはラプラス方程式を満たす.）
2. [B,C] **潮の形**　この問題ではニュートン重力で月によって生じる潮の形について考える（414 ページのボックス 21.1 を見よ）．月との相互軌道にある地球の質量中心のしたがう自由落下

系を考える（太陽の周りを回る地球の遅い運動と地球の自転を無視する）．固体である地球の表面は球であり，地球規模で大海に覆われていると仮定する．

(a) 大海の表面はなぜ等重力ポテンシャルになっているのか説明せよ．

(b) ボックス 21.1 の（c）式で与えられる月の潮汐重力を再現する重力ポテンシャル Φ_{tidal} を求め，質量 m の大海の流体成分に作用する重力が

$$\vec{F}_{\mathrm{tidal}} = -m\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{tidal}}$$

であることを示せ．

(c) 月が存在するときとしないときの海の深さの差 $\delta h(\theta,\phi)$ を求めよ．月に向かう方向を z 軸に選び通常の極座標の角度を使え．答えを地球の質量と月の質量，その間の距離，月が存在しないときの地球の中心から海水面の距離で表せ．

(d)（c）の結果から大海の潮の高さを評価せよ．

(e) ボックス 21.1 の終わりの質問に答えよ．

3. [E] 太陽質量を点として置き中心に向けて 1m の棒を半径方向に沿って落下させた．メートル棒がそれによって作られるニュートン重力で壊されるまでの距離をその点から測った値で答えよ．

4. χが測地線偏差の方程式 (21.19) にしたがう間隔ベクトルであるとすると，$\chi + C\mathbf{u}$ も測地線偏差の方程式にしたがうことを示せ．C は任意定数である．

5. ニュートン極限においてリーマン曲率の成分 $R^{i}{}_{tjt}$ (21.27) を詳細にわたり導出せよ．

6. 局所慣性系のリーマン曲率 (21.28) を定義 (21.20) から導出せよ．

7. (a) 局所慣性系 (21.28) のリーマン曲率の形 (21.29) を導出せよ．

   (b) 対称性を使いリーマン曲率の独立な成分が 10 個あることを示せ．

8. [A](20.81) 式で表される自由落下系におけるシュワルツシルト計量から $R_{\hat{\tau}\hat{r}\hat{\tau}\hat{r}}$ を計算せよ．そのために，まずシュワルツシルト座標基底で $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を計算し，(21.24) 式を使い，自由落下系で成分を求めよ．求めた答えは (21.30a) 式と一致したか．

9. [C] **我々はブラックホールの中にすでにいるのか？**　銀河の速度の測定から，天の川銀河（我々の銀河）はアンドロメダ銀河に向かって落下し，さらにこれら 2 つの銀河も他の局所銀河群とともに，うみへび・ケンタウルス超銀河団方向の「グレートアトラクタ」に向かって落下していることがわかっている．我々がすでにブラックホールの中にいて，その中心に落下しているかどうかを決めるのに必要な観測は何か．この疑問を議論するために，グレートアトラクターは球対称であると仮定してもよい．

10. **一様重力場**　計量

$$ds^2 = -(1+gx)^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

のリーマン曲率を計算せよ．これによりこの時空が平坦であることを示せ．この計量を通常のミンコフスキーの形に変換する座標変換を求めよ．

11. 問題 8.12 で 2 次元双曲面を導入し，それが負の定曲率をもっていると述べた．本当にそうだろうか．この 2 次元幾何学で $R \equiv R^{\alpha}_{\alpha}$ を計算し，それを確かめよ．

12. [C, S] (a) ワームホール計量 (7.39) について，(t, r, θ, ϕ) 座標軸の方向を向く正規直交基底でリーマン曲率の成分を計算せよ．
(b) ワームホールの喉で静止観測者は潮汐重力を感じないことを示せ．
(c) 軌跡に沿った点で静止している観測者が測って速さ V で喉を半径方向に通過する観測者がいる．その観測者が V^2 に比例する潮汐力を経験することを示せ．
(d) これらの潮汐力は喉の半径にどのように依存するか．ワームホールを通過して生還旅行をするためには b と V の組合せをどのようにすればよいか．

13. [S] リッチ曲率は (21.32) 式でリーマン曲率の成分の特別な和として定義された．逆計量を使い，$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の添字のどの組合せで和をとっても（たとえば $g^{\alpha\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$），結果は 0 かリッチ曲率の定数倍であることを示せ．

14. [S] (21.33) 式の定義または (21.32) 式と (21.28) 式から始めて，リッチ曲率 $R_{\alpha\beta}$ が α と β で対称であることを示せ．

15. R_{AB} を球の計量

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

の場合に計算せよ．ここで A, B は 1 と 2 をとり，$x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, $a =$ 定数．この問題は，曲率の計算をするのに，本書のウェブサイトの *Mathematica* プログラムを使って簡単に行える．しかし，実際に自分の手で計算して確かめ，*Mathematica* プログラムが何を計算しているのかを理解せよ．

16. 付録 B のシュワルツシルト計量のクリストフェル記号の 0 にならないもの 3 つを実際に計算してチェックせよ．

17. [A] **シュワルツシルト幾何学はアインシュタイン方程式を満たす**　付録 B のシュワルツシルト幾何学のクリストフェル記号を (21.33) 式に代入して評価せよ．$R_{\alpha\beta}$ の 10 通りの α, β の組み合わせの各々に対して，恒等的に $R_{\alpha\beta} = 0$ となることを示し，シュワルツシルト幾何学が真空アインシュタイン方程式の解であることを示せ．速く解きたければ対角成分だけ計算せよ．

18. [C] **バーコフの定理**
(a) 例 21.4 で $t \to -t$ のもとで不変であることを使うと，応力エネルギーの**静的**球対称分布の外部を表す線素から $g_{rt}drdt$ を除外した．しかし，球対称崩壊のような力学的状況でその議論はもはや成り立たない．そういった場合，もっとも一般的な球対称線素は

$$ds^2 = -A(r,t)dt^2 + 2B(r,t)drdt + C(r,t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

の形をしている．
ある関数 $f(r,t)$ を用いた

$$t \to t + f(r,t)$$

の変換により

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)}dt^2 + e^{\lambda(r,t)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

の形の最も一般的な球対称計量を変えないで $drdt$ の項を消去できることを示せ．

(b) 付録 B のアインシュタインテンソルの式を使うと

$$G_{\hat{r}\hat{t}} = 0$$

から $\lambda(r,t)$ が時間独立であること，アインシュタイン方程式の残りの成分を使うとある関数 $h(t)$ に対して

$$\nu(r,t) = -\lambda(r) + h(t)$$

となることを示せ．

(c) これらの結果を使って，力学的かどうかに関係なく，シュワルツシルト幾何学がアインシュタイン方程式の最も一般的な漸近的平坦，球対称解であることを結論づけよ．これはバーコフの定理と呼ばれる．

19. [C] **静的弱場計量導出**　この問題では弱場計量 (21.25) が線形真空アインシュタイン方程式の一般的な解であることを示す．
   (a) 時間独立な**静止**発生源（速度 0）の場合，計量摂動 $h_{\alpha\beta}$ が $t \to -t$ のもとで変わらないような座標を選ぶことができること，そのことから $h_{it} = h_{ti}$ であることを議論せよ．
   (b)「さらにゲージを」の節で議論したのと同じように，まだ残っているゲージ自由度を使って $h_{it} = 0$ またはローレンツゲージ条件に影響を与えることなく h_{ij} を対角化できることを示せ．
   (c) (21.25) 式は線形重力の方程式で一意的に漸近的平坦であることを示せ．
20. [S] 144 ページのボックス 7.3 の（a）式の 5 次元計量のリッチテンソルを計算せよ．
21. 線形重力のリッチ曲率の摂動の式 (21.44) を導け．
22. [S](21.40) 式は線形重力の計量である．$h_{\alpha\beta}$ の 1 次まで逆行列を求めよ．
23. 線形重力波計量 (16.2a) の線形リーマン曲率のすべての成分を求めよ．
24. + 偏極の線形重力波が図 16.2 に示すようなテスト粒子の円を含んでいる面に対して垂直に入射した．重力波が通り過ぎるとき，テスト粒子に何が起きるか測地線偏差の式を使って答えよ．
25. (21.28) 式と (21.53) 式を使って，問題 23 で得られた線形リーマン曲率がゲージ変換に対して不変であることを式を用いて示せ．
26. 任意の定数 c, a に対して，計量摂動

$$h_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \sin k(x-t)$$

を考えよう．
   (a) この計量が線形アインシュタイン方程式 $\delta R_{\alpha\beta} = 0$ の解になっていることを示せ．
   (b) これを $c = 0$ の形に変換する関数 $\xi_\alpha(x)$ を求めよ．この変換によって a はどうなるか．

第 22 章

曲率の発生源

前章はアインシュタイン方程式を導入する役割を担っており，物質の質量エネルギーがどのように時空を曲げるのかを述べた：

$$(\text{局所的な時空曲率}) = (\text{物質のエネルギー密度}) \tag{22.1}$$

そこで行った考察は (22.1) 式の右辺が 0 の場合に相当し，真空アインシュタイン方程式に焦点を絞った．リッチ曲率 $R_{\alpha\beta}$ は右辺に物質がないときの曲率の量であった．この章では，(22.1) の右辺に入れるべきエネルギー密度の正しい量と左辺にふさわしい時空曲率の一般的な量を見つけることによりアインシュタイン方程式を完成させる．密度は，静止質量密度や電荷密度，粒子数密度，エネルギー密度のような単位空間体積当たりの量のことである．この章では**密度**が特殊相対論と一般相対論でどのように表されるのかを考察することから始めることにしよう．

22.1 密度

特殊相対論の平坦時空がこの節の内容である．ここでは，計量が $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ となる通常の直交座標 (t, x, y, z) を使う．ここで行う議論の目的はエネルギーの密度の正しい相対論的表現を得ることである．それはエネルギー運動量 4 元ベクトルの成分の密度である．しかし，もっと簡単な場合として，スカラー密度である粒子数密度の正しい相対論的記述から始める．

粒子数密度

図 22.1 の状況を考えよう．$\mathcal{N}$ 個の粒子を含む箱が辺の方向に沿って速さ[1] V で運動している．その静止系で箱の体積は $\mathcal{V}_*$ であり，内部の粒子の静止粒子数密度 n は

$$n = \mathcal{N}/\mathcal{V}_* \tag{22.2}$$

である[2]．

速さ V で運動している箱の慣性系で粒子数密度はどうなるだろうか．その系で箱の長さは運動方向に $(1 - V^2)^{1/2}$ 倍ローレンツ収縮する．したがって体積は同じだけ小さくなる：

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_*(1 - V^2)^{1/2} \tag{22.3}$$

---

[1] この章では速さ V と 3 次元体積 $\mathcal{V}$ を扱う．混同してはいけない．

[2] 慣性系で定義される n のような量に添字 $_*$ を付けることは一般相対論の通常の使い方と矛盾していない．

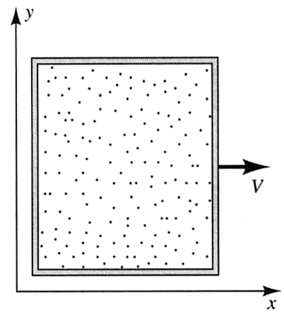


図 22.1 x 軸に沿って速さ V で運動する $\mathcal{N}$ 個の粒子の入った箱．箱はローレンツ収縮を受け，体積が減るため，粒子数密度は静止した同じ箱の中よりも大きくなる．

箱の内側の粒子の全粒子数はすべての系で同じであり，そのため箱が運動している系で粒子数密度 N は

$$N = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{V}} = \frac{n}{\sqrt{1-V^2}} \tag{22.4}$$

となる．よって粒子数密度 N は nu^t となる．n は**静止**粒子数密度であり，u^t は箱の 4 元ベクトルの時間成分である [(5.28) 式を参照]．このことは，粒子数密度 N が 4 元速度 $n\mathbf{u}$ の時間成分であることを表している．**粒子数流 4 元ベクトル**[3]は

粒子数流 4 元ベクトル

$$\mathbf{N} = n\mathbf{u} \tag{22.5}$$

である[4]．粒子数流 4 元ベクトル $\mathbf{N}$ の成分は $N^\alpha = (N, \vec{N})$ であり，空間部分は

$$\vec{N} = n\vec{u} = \frac{n\vec{V}}{\sqrt{1-V^2}} \tag{22.6}$$

である．これらが**粒子数流密度**を構成する．面積素 $d\vec{A}$ に対して，$\vec{N}\cdot d\vec{A}$ は単位時間内に断面を通って流れる粒子数である．図 22.2 を見よ．断面 $d\vec{A}$ を通過する粒子数は断面 $d\vec{A}\cdot\vec{V}/V$ と長さ Vdt の体積中の粒子数と同じである．つまり $\vec{N}\cdot d\vec{A}$ である．

体積 $\mathcal{V}_*$ を非常に小さくとることにより，粒子数密度と粒子数流密度は時空内の点で定義することができる．つまり $N(x)$, $\vec{N}(x)$ とできる．一般的に，時空中の各点でこれらは変化するが，粒子数が保存するように変化しなければならない：

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{N} = 0 \tag{22.7}$$

(22.7) 式が粒子数の保存を表していることを理解するために，それを空間体積 $\mathcal{V}$ にわたって積分し発散定理を使うと

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} N d^3x + \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{N}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{22.8}$$

[3] これは，言いにくいが正確に言えば，粒子数（粒子数流）4 元ベクトルである．

[4] 文字 "N" のいろいろな形がこの章でいろいろな量として使われる．静止系の粒子数密度 n, 2 次元曲面の法ベクトル $\vec{n}$, 粒子数流 4 元ベクトル $\mathbf{N}$, 全粒子数 $\mathcal{N}$ である．これらを混同しないことが重要である．

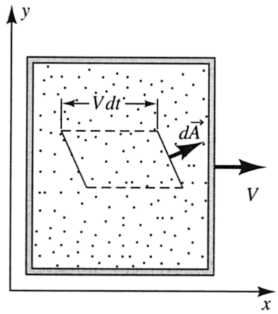


図 22.2 時間 dt 内に面 $d\vec{A}$ を通過する粒子数は，長さ Vdt, 断面積 $d\vec{A}\cdot\vec{V}/V$ の図中のチューブ内にある粒子数である．

が得られる．第一項の積分は体積 $\mathcal{V}$ 中の全粒子数であり，第二項の積分は，体積の境界となる曲面 $\partial\mathcal{V}$ に渡って行われ，粒子が表面を通過する時間的割合，つまり粒子数フラックスである．(22.8) 式は，内部の粒子数の時間的変化が面を通って流れ出て行く物質の正味の時間的割合にマイナスをつけたものに等しいことを表している．これが保存というものである．

粒子数の保存 (22.7) は粒子数流 4 元ベクトル $N^\alpha = (N, \vec{N})$ によって

$$\boxed{\frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0} \tag{22.9}$$

粒子数保存

としてエレガントに表すことができる．ここで同じ添字について和をとること，直交座標を使うことを仮定している．

この議論から学んだことは，粒子数密度のようなスカラー密度が 4 元ベクトルの時間成分であり，空間成分はその流れの密度に対応することである．幾何学的な方法によってなぜそうなのかを知ることができる．密度は 3 次元体積素を持ったスカラーと考えられる．3 次元体積は，7.9 節で考察したように，4 次元空間内の 3 **次元曲面**である（図 7.8 を参照）．時空中の表面の向きは法 4 元ベクトル $\mathbf{n}$ で決められ，3 次元曲面の体積素は $\mathbf{n}\Delta\mathcal{V}$ となる．体積に関係したスカラー量を求めるためには，法ベクトルとスカラー積をとるために 4 元ベクトル流が必要だ．たとえば，3 次元体積 $\mathbf{n}\Delta\mathcal{V}$ 中の粒子数 $\Delta\mathcal{N}$ は

$$\Delta\mathcal{N} = \mathbf{N}\cdot(\mathbf{n}\Delta\mathcal{V}) = N^\alpha n_\alpha \Delta\mathcal{V} \tag{22.10}$$

である．この関係から，4 次元中の空間密度を時間的 3 次元曲面の面積素を通る粒子数 4 元流の**フラックス**と考えてもよいことがわかる．密度は空間的 3 次元曲面を通過する時間的方向のフラックスであり，粒子数流は時間的曲面を通る空間的方向のフラックスである．

例 22.1. 電流 4 元ベクトル 粒子数密度によってスカラー密度のアイディアを説明したが，この考察を他のスカラー量にも同様に適用することができる．電荷はよい例である．電荷密度 ρ_{elec} と電

流密度 $\vec{J}_{\rm elec}$ はともに，4 元ベクトル電流密度

$$J^\alpha = (\rho_{\rm elec}, \vec{J}_{\rm elec}) \tag{22.11}$$

をなす．電荷保存は，(22.9) 式と同じように

$$\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \rho_{\rm elec}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{\rm elec} = 0 \tag{22.12}$$

で表される．体積 $\mathbf{n}\Delta\mathcal{V}$ の内側の電荷は (22.10) 式と同様に与えられる．

エネルギーと運動量の密度

エネルギーと運動量密度は，アインシュタイン方程式 (22.1) の右辺になる時空曲率源である．(22.10) 式は，密度流 4 元ベクトルが，体積 $n_\alpha\Delta\mathcal{V}$ をもつスカラー量とどのように関係するのかを表している．しかしエネルギーと運動量はスカラーではなく，エネルギー運動量 4 元ベクトル p^α の互いに異なった成分である．4 元ベクトル Δp^α を 3 次元体積 $n_\alpha\Delta\mathcal{V}$ と関係づけるため，2 つの添字をもつもの $T^{\alpha\beta}$ が必要とされ，それを

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha\beta} n_\beta \Delta\mathcal{V} \tag{22.13}$$

と書く．$T^{\alpha\beta}$ は 2 ランクのテンソルで **エネルギー運動量応力テンソル**（正確だが長い），ときに **エネルギー運動量テンソル**（エネルギー運動量 4 元ベクトルと間違えるかもしれない）または，（ここでこう呼ぶが）**応力エネルギーテンソル**（成分のほとんどを表している）と呼ばれる．

応力エネルギーテンソルの成分が何であるかを理解するために，平坦時空の特殊な慣性系とその系で静止している 3 次元体積 $\Delta\mathcal{V}$ を考えよう．その体積は，法ベクトルが $n_\alpha = (1,0,0,0)$ に選べる $t=$ 一定の 3 次元曲面の一部である [(20.30) 式を参照]．その法ベクトルの選び方で，(22.13) 式は

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha t}\Delta\mathcal{V} \tag{22.14}$$

となる．エネルギー密度は $\epsilon \equiv \Delta p^t/\Delta\mathcal{V} = T^{tt}$ であり，運動量密度は $\vec{\pi} \equiv \Delta p^i/\Delta\mathcal{V} = T^{it}$ である．よって応力エネルギーテンソルの成分のうちの 4 つの重要な意味を理解した：

$$T^{tt} = (\text{エネルギー密度}) \equiv \epsilon \tag{22.15a}$$

$$T^{it} = (i\ \text{方向の運動量密度}) \equiv \pi^i \tag{22.15b}$$

それぞれ，今議論中の慣性系の静止観測者に測られたものである．

応力エネルギーテンソルの簡単な説明を図 22.1 の運動する粒子の箱で行った．内側の粒子は全て箱に対して静止しており，静止質量は m であるとする．箱が速さ V で運動している慣性系で，箱の各粒子のエネルギーは $m\gamma$ である．$\gamma = (1-V^2)^{-1/2}$ である．**エネルギー密度**は，粒子数密度 (22.4) かけるこのエネルギーである．よって

$$\epsilon \equiv T^{tt} = mn\gamma^2 = mnu^t u^t \tag{22.16a}$$

であり，同様に運動量密度は

$$\pi^i \equiv T^{it} = mn\gamma^2 V^i = mnu^i u^t \tag{22.16b}$$

である．(22.16) 式から，箱の内側で粒子のストレスエネルギーテンソルは

$$T^{\alpha\beta} = mnu^\alpha u^\beta \equiv \mu u^\alpha u^\beta \tag{22.17}$$

となりそうであることが容易に推測できる．ここで $u^\alpha = (\gamma, \gamma\vec{V})$ はボックスの 4 元速度 [(5.28) 式を参照] であり，$\mu \equiv mn$ は静止質量密度である．(22.17) 式から一般の応力エネルギーテンソルの重要な性質がわかる．それらの添字は対称である：$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$.

エネルギー運動量テンソルの $T^{\alpha j}$ の成分の意味は何だろうか．これらの成分が (22.14) 式に入らないため，空間的 t 一定面を見るだけでは見つからない．答えは時間的 3 次元面を考えることで得られる．座標間隔 Δy, Δz, Δt で張られる 3 次元体積を考えよう．この 3 次元曲面の単位法ベクトルのうち x 方向を向くものは $n_\alpha = (0, 1, 0, 0)$ である．(22.14) 式と同様に

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha x} \Delta y \Delta z \Delta t \tag{22.18}$$

となる．この方程式の時間成分は

$$T^{tx} = \frac{\Delta p^t}{\Delta A \Delta t} \tag{22.19}$$

となる．ここで ΔA は面積 $\Delta y \Delta z$ である．成分 T^{tx} は x 方向のエネルギーフラックスである．エネルギーのフラックスは，一般的に $T^{tx} = T^{xt}$ となる運動量密度と同じものである．簡単な例は，すでに議論した粒子の箱である（図 22.2)．時間 dt 内に，y 方向と z 方向に広がる面積 dA の面を通り抜けるエネルギーは，ボックス中の各粒子に対して（エネルギー）$V = m\gamma V =$（運動量）なので，（エネルギーフラックス）$dAdt =$（エネルギー密度）$VdAdt =$（運動量密度）$dAdt$ が成り立つ．対称性 $T^{tx} = T^{xt}$ は (22.17) 式で明らかである．

(22.18) 式の空間部分は

$$T^{ix} = \frac{\Delta p^i / \Delta t}{\Delta A} \tag{22.20}$$

とわかりやすく書ける．分子にある運動量の変化率 $\Delta p^i / \Delta t$ は力である．(22.20) 式から T^{ix} は法線が x 方向にある面を通ってはたらく単位面積当たりの力の成分であることがわかる．より一般的に，法ベクトル $\vec{n}$ の面積 ΔA を通してはたらく力 $\vec{F}$ の成分を書くことができる：

$$\Delta F^i = T^{ij} n_j \Delta A \tag{22.21}$$

よって

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} j \text{ 方向の法線をもつ面を通じてはたらく} \\ \text{単位面積当たりの力の } i \text{ 成分} \end{pmatrix} \tag{22.22}$$

応力テンソル

古典力学において，単位面積当たりの力は**応力（ストレス）**と呼ばれ，T^{ij} は**応力テンソル**である．

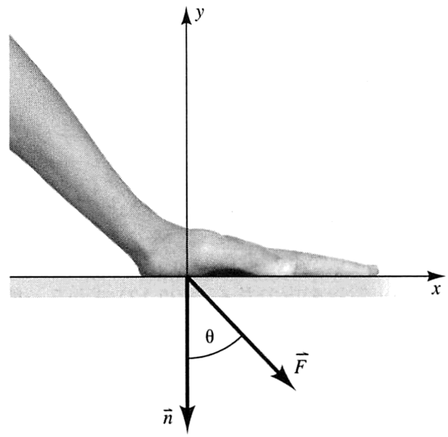


図 22.3　手で机を押し，面の垂直方向から角度 θ に力 $\vec{F}$ を作用させる．机の面に応力テンソル T^{ij} で表される **応力**をはたらかせている．例 22.2 で説明したように，法方向は $-y$ 方向に向いているので，$-T^{xy}A$ が x 方向にはたらく力になり，$-T^{yy}A$ が y 方向にはたらく力の成分になる．A は手のひらの面積である．

例 22.2. **机を押す**　鉛直方向に対して角度 θ の方向に力 $\vec{F}$ で机を押す（図 22.3）．力が面積 A の手のひらに均等にかかっていると仮定すると，応力の成分はどうなるか．(22.21) 式から

$$F\sin(\theta) = F^x = T^{xj}n_jA = -T^{xy}A \tag{22.23a}$$

$$-F\cos(\theta) = F^y = T^{yj}n_jA = -T^{yy}A \tag{22.23b}$$

であることがわかり，

$$T^{xy} = -(F/A)\sin(\theta), \qquad T^{yy} = +(F/A)\cos(\theta) \tag{22.24}$$

が今の場合の応力の成分である．

例 22.3. **圧力**　流体の圧力は応力の最も簡単な例であり，単位面積当たりの力である．静止した流体で，表面を通じてはたらく力は常に法方向にあり，すべての方向で同じである．応力テンソルは対角的で圧力 p に等しい値をもっている：

$$T^{ij} = p\delta^{ij} \tag{22.25}$$

したがって (22.21) 式は

$$\Delta F^i = pn^i\Delta A \tag{22.26}$$

になる．

(22.15) 式と (22.19) 式，(22.22) 式により，エネルギー運動量テンソルの成分の理解は達成される．まとめると，議論中の慣性系で $T^{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\boxed{T^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} \text{エネルギー} & \text{エネルギー} \\ \text{密度} & \text{フラックス} \\ \hline \text{運動量} & \text{応力} \\ \text{密度} & \text{テンソル} \end{array}\right)} \tag{22.27}
$$

応力エネルギーテンソルの成分

となる．

応力エネルギーテンソルは対称である：$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$. 初めの方で述べたように，エネルギーフラックスは運動量密度と同じものである．応力テンソルの対称性は気体の箱の場合で示され，いろいろな方法でより一般的に説明することができる（問題 4 と 5 を見よ）．応力エネルギーテンソル $T^{\alpha\beta}$ は，アインシュタイン方程式 (22.1) の右辺にもってくるのにふさわしく，エネルギー密度を相対論的に正しく表している．

例 22.4. 観測者に測られるエネルギー密度　4 元速度 $\mathbf{u}_{\text{obs}}$ で時空中を運動する観測者によって測定されるエネルギー密度はどうなるか．この質問に答えるために，観測者の静止系中の小さい体積 $\Delta\mathcal{V}$ を考えよう．この体積は空間的 3 次元面の積分素であり，その方向に (22.14) 式と同じ記法を使えば，法ベクトルは $-\mathbf{u}_{\text{obs}}$ となる．

この体積に含まれる物質のエネルギー運動量 4 元ベクトルは (22.13) 式から（添字の上げ下げをすると）

$$
\Delta p_\alpha = T_{\alpha\beta}(-u^\beta_{\text{obs}})\Delta\mathcal{V} \tag{22.28}
$$

となる．観測者によって測られる体積中のエネルギー ΔE は [(7.53) 式を参照]

$$
\Delta E = -\Delta\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\text{obs}} = -\Delta p_\alpha u^\alpha_{\text{obs}} = T_{\alpha\beta}u^\alpha_{\text{obs}}u^\beta_{\text{obs}}\Delta\mathcal{V} \tag{22.29}
$$

となる．よって観測者に測られるエネルギー密度は

$$
\begin{pmatrix} \text{4 元速度 } \mathbf{u}_{\text{obs}} \text{ の観測者によって} \\ \text{測定されるエネルギー密度} \end{pmatrix} = T_{\alpha\beta}u^\alpha_{\text{obs}}u^\beta_{\text{obs}} \tag{22.30}
$$

これは，観測値が，観測者の実験室に設置された正規直交基底の成分であるという一般的な表現の特別な場合である（5.6 節と 7.8 節）．現在の例で，測定されるエネルギー密度は $T_{\hat{0}\hat{0}}$ である．ここで $\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}_{\text{obs}}$ であり，(22.30) 式は (20.41) 式の特別な場合である．

22.2　エネルギー運動量保存

平坦時空中のエネルギー運動量の保存

平坦空間で物質のエネルギーは保存し，物質の運動量も保存する．これらの保存則は，粒子数保存 (22.7) や電荷保存 (22.12) のように応力エネルギーの成分として表すことができる．エネル

ギー運動量 4 元ベクトルの各**成分**が保存するため，エネルギーと運動量の保存則は

平坦空間のエネルギーと運動量の保存

$$\boxed{\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \qquad \text{(平坦時空)}} \tag{22.31}$$

の形になる．自由な添字 α があることにより，(22.31) 式が α に対する保存則を表していることになる．1 つはエネルギーで，3 つは運動量の成分である．これら 4 つの関係を別々に書き出してみよう．

(22.31) 式の t 成分をみよう．(22.27) 式を使うと，これは

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \tag{22.32}$$

と書ける．ここで ϵ はエネルギー密度で，$\vec{\pi}$ はエネルギーフラックスまたはエネルギー流である．すでに考察したように，これは運動量密度と同じものである．(22.18) 式のように全空間体積にわたって積分すると，(22.32) 式の最初の項は内部のエネルギーの時間変化率になり，第二項は体積から出て行くエネルギーのフラックスである．(22.32) 式からこれらは逆に，エネルギーが保存していることを表している．

(22.31) 式の 3 つの空間成分は

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t} = -\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} \equiv \phi^i \tag{22.33}$$

となる．運動量の時間変化は力である．(22.33) 式は ϕ^i で表した**力密度**の成分を定義する．したがって，(22.33) 式は流体の運動方程式であり，連続体の場合の $\vec{F} = m\vec{a}$ になっている．ϕ^i を固定した小さい空間体積について積分すると，この体積にはたらく力になり，(22.33) 式はそれにはたらく応力との関係を表している．その関係は発散定理を使って体積 $\mathcal{V}$ に作用する全合力 F^i を書くことによって明らかにできる：

$$F^i = \int_{\mathcal{V}} d^3x\, \phi^i = -\int_{\mathcal{V}} d^3x \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = -\int_{\partial\mathcal{V}} dA\, n_j^{(\text{out})} T^{ij} = \int_{\partial\mathcal{V}} dA\, n_j^{(\text{in})} T^{ij} \tag{22.34}$$

ここで $\partial\mathcal{V}$ は $\mathcal{V}$ の境界であり，$\vec{n}^{(\text{out})}$ と $\vec{n}^{(\text{in})}$ は，それぞれ $\partial\mathcal{V}$ に対して外向きと内向きの法ベクトルである．右辺の項は外から内に向けて境界面を通ってはたらく力すべての和である．これは，式で示したように体積にはたらく合力と等しい．

例 22.5. 体積にはたらく力　流体の圧力の簡単な例が (22.33) 式で説明できる．流体では，p を圧力とすると，$T^{ij} = \delta^{ij} p$ である [(22.25) 式を参照]．1 つの隅の座標が (x, y, z) で，各辺が x, y, z 方向を向き，長さが L の流体の立方体を考えよう．x の位置にある y-z 面にはたらく圧力による力は x 方向に $p(x, y, z)L^2$ となるであろう．$x + L$ にある y-z 面にはたらく力は x 方向に $p(x + L, y, z)L^2$ となるであろう．L が小さいとき，正味の力は

$$\begin{aligned} F^x &= L^2[p(x, y, z) - p(x + L, y, z)] \\ &\approx -L^3 \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \tag{22.35}$$

となる．力の密度は $\phi^x = F^x/L^3$ なので，これは $T^{ij} = \delta^{ij} p$ となり，厳密に (22.33) 式である．

完全流体

応力テンソルの簡単な例は**完全流体**のものである．(22.25) 式から，流体の応力テンソル T^{ij} は対角成分が等圧になる対角的な形になっている．流体は熱伝導や粘性，その他の輸送過程または散逸過程が無視できるとき完全と言われる．完全流体は静止している慣性系でエネルギー密度 ρ, 圧力 p によって特徴づけられ，応力エネルギーは

$$T^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(\rho, p, p, p) \tag{22.36}$$

になる（記号 ϵ はどの系のどんなものに対してもエネルギー密度として使うが [(22.15a) を参照]，記号 ρ は流体の静止系の流体のエネルギー密度に使うようにとっておく）．圧力は通常の単位 $(\mathcal{ML}/\mathcal{T}^2)/\mathcal{L}^2$ をもつ単位面積当たりの力で，エネルギー密度の単位 $(\mathcal{ML}^2/\mathcal{T}^2)/\mathcal{L}^3$ と同じである．便利なことが多い幾何学的単位系で質量は長さの単位であるが，エネルギー密度と圧力の単位は $1/\mathcal{L}^2$ である．通常，圧力と密度の関係は状態方程式で与えられる．たとえば 18.3 節で，銀河ガスは $p = 0$ の流体でモデル化されたし，宇宙背景放射は $p = \rho/3$ の完全流体でモデル化された [(18.23) 式を参照].

流体は通常静止せず 4 元速度 $\mathbf{u}(x)$ で流れており，ある点とその隣の点で速度が違っている．したがって応力テンソルは $\rho(x)$ と $p(x)$ と同様に $\mathbf{u}$ にも依るだろう．$\mathbf{u}$ と計量 $\eta^{\alpha\beta}$ から，微分を使わずに作ることができる最も一般的な形は $T^{\alpha\beta} = Au^\alpha u^\beta + B\eta^{\alpha\beta}$ である．係数 A と B は，流体に対して静止している系 $u^\alpha = (1, \vec{0})$ で応力エネルギーが (22.36) 式にならなければならないという要請で決まる．これから

完全流体の応力エネルギー

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + \eta^{\alpha\beta} p \tag{22.37}$$

がわかる．我々はこの完全流体の応力エネルギーを使って，さまざまな状況をモデル化する．たとえば，中性子星の内部や重力放射の発生源，銀河のガス，宇宙背景放射，真空エネルギーである．応力エネルギー (22.17) は圧力が 0 になる完全流体の例であり，これは一般相対論では**ダスト**と呼ばれる．

例 22.6. 真空の応力エネルギー　18.3 節で，空間的にも時間的にも一定である真空エネルギー ρ_{vac} のアイディアを考察した．熱力学第一法則との整合性から，少なくとも一様等方宇宙モデルに対して，負の圧力 $p_{\mathrm{vac}} = -\rho_{\mathrm{vac}}$ が必要とされた．(22.37) 式から，このことは真空応力エネルギーテンソルが

真空応力エネルギー

$$T^{\alpha\beta}_{\mathrm{vac}} = -\rho_{\mathrm{vac}}\eta^{\alpha\beta} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}\eta^{\alpha\beta} \tag{22.38}$$

であることを意味している．ここで Λ は **宇宙定数**である．実際，これが定数だけに依存する応力エネルギーテンソルの唯一の形である．曲がった時空では，$T^{\alpha\beta}_{\mathrm{vac}} = -(\Lambda/8\pi G)g^{\alpha\beta}$ になる．

曲がった時空におけるエネルギー運動量の局所保存

前節では応力エネルギーを特殊相対論の平坦時空の枠組で考察した．しかし，応力テンソルはアインシュタイン方程式の時空曲率の発生源となる．平坦時空の応力エネルギーテンソルを曲がった

時空へ一般化する，直接的だが一意的でない方法は，平坦計量を $g_{\alpha\beta}$ に置き換えることだ．たとえば，完全流体に対して，自明な一般化は

完全流体応力エネルギー

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta} p} \tag{22.39}$$

である．これは局所慣性系で (22.37) 式になる．

しかし，保存式 (22.31) はもはや満たされないし，満たされるべきでもない．満たされるものは (22.31) 式の曲がった時空への自然な一般化である：

エネルギー運動量の局所保存

$$\boxed{\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0} \tag{22.40}$$

ここで ∇_β は共変微分である．この関係は**エネルギー運動量の局所保存**と呼ばれる．これは局所慣性系で保存則 (22.31) になるからである．しかし，これは (22.31) 式のような保存則ではないし，そうであってもいけない．物質のエネルギーは力学的な時空曲率がある場合には保存しないが，それに反応して変化する．もっともわかりやすい例は宇宙背景放射である．宇宙が膨張すると，放射のエネルギー密度と温度は**減少する**．(22.40) 式は減少の仕方を表しており，以下の例が示す通りである．

例 22.7. 一様等方宇宙論における $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$　空間的に一様等方平坦な宇宙論モデルの幾何学は線素 [(18.1) 式を参照]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{22.41}$$

によってまとめられる．ここで $a(t)$ はスケールファクタで，その時間依存性が膨張宇宙を表す．曲率源は一様等方な物質と放射，真空エネルギーの完全流体でその応力エネルギー $T^{\alpha\beta}$ は (22.39) 式で与えられる（この種のモデルは第 18 章で詳しく議論したが，この例で考察されている点はそこでの議論を知らなくても理解できる）．

一様性との整合性から，エネルギー密度 $\rho(t)$ と圧力 $p(t)$ は時間だけの関数である．一様性と等方性から，流体の 4 元速度は時間成分だけである：$u^\alpha = (1, \vec{0})$．よって，$T^{\alpha\beta}$ の 0 でない成分は (22.39) 式から

$$T^{tt} = \rho(t), \qquad T^{ij} = g^{ij}p(t) = \delta^{ij}[p(t)/a^2(t)] \tag{22.42}$$

である．

局所保存則 (22.40) の t 成分は (20.65) 式を使って

$$\nabla_\beta T^{t\beta} = \frac{\partial T^{t\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma^t_{\beta\gamma} T^{\gamma\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\gamma} T^{t\gamma} = 0 \tag{22.43}$$

と書くことができる．クリストフェル記号は (22.43) 式から容易に計算でき，付録 B に挙げられている．0 にならない Γ の成分は

$$\Gamma^t_{ij} = a\dot{a}\,\delta_{ij}, \qquad \Gamma^i_{jt} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j \tag{22.44}$$

である．ドットは t についての微分を表す．局所的な保存式 (22.43) の 3 つの項は

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}p+3\frac{\dot{a}}{a}\rho=0 \tag{22.45}$$

または

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right)=-p\frac{da^3}{dt} \tag{22.46}$$

となる．物理的体積 $\Delta\mathcal{V}=a^3(t)\Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}$ を占める小さな座標体積 $\Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}=\Delta x\Delta y\Delta z$ 内の流体を考えよう．宇宙膨張のため $a(t)$ は増加し物理的体積も常に増加する．その体積内のエネルギーは $\Delta E(t)=\rho(t)\Delta\mathcal{V}(t)$ である．(22.46) 式に $\Delta\mathcal{V}_{\text{coord}}dt$ をかけると

$$d(\Delta E(t))=-p(t)d(\Delta\mathcal{V}(t)) \tag{22.47}$$

になる．これは熱力学第一法則で，膨張の間 圧力に抗してなされた仕事によって流体素のエネルギーがどのように減少するのかを表している（より全体的な考察に対しては 344 ページを見よ）．

22.3 アインシュタイン方程式

曲率と質量エネルギー密度を関係づけるアインシュタイン方程式は古典物理学の基本的な方程式である．導出できるものではなく，これを導出できるような，より基本的な古典理論は存在しない．しかし少し議論すれば，方程式の形の推測を動機づけることができる．それをこの節で行う．

アインシュタイン方程式を定式化するために必要な座標はすでに手の中にある．(22.1) 式の右辺は物質エネルギー密度 $T^{\alpha\beta}$ である．左辺には曲率の量がある．リッチテンソルがそのような量の 1 つである．しかし，これと計量から作られる別のランク 2 の対称テンソルは $g_{\alpha\beta}R$ であり

$$R=R^{\gamma}{}_{\gamma}=g^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta} \tag{22.48}$$

は**リッチ曲率スカラー**と呼ばれる．したがって曲率と応力テンソルの間の関係を与える候補は

$$R_{\alpha\beta}+\lambda g_{\alpha\beta}R=\kappa T_{\alpha\beta} \tag{22.49}$$

であり，λ と κ は未定の定数である．

局所保存則 (22.40) と整合性を持たせることにより，アインシュタイン方程式の左辺にくる $R_{\alpha\beta}$ と $g_{\alpha\beta}R$ の組み合わせが決まる．(22.49) 式の右辺に ∇^{β} を作用させると 0 になる．したがって (22.49) 式の左辺にこれを作用させれば 0 にならなければならない． $R_{\alpha\beta}$ と $g_{\alpha\beta}R$ の 1 つの組み合わせだけが正しい．特別な組み合わせは**ビアンキ恒等式**から得られる：

$$\nabla_{\beta}(R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)=0 \tag{22.50}$$

ビアンキ恒等式

これら 4 つの関係式はどんな $g_{\alpha\beta}$ に対しても成り立つ．この恒等式が成り立つことは，問題 13 を行って確かめるか，または微分幾何学の結果として受け入れるしかない．アインシュタイン方程式

の右辺の局所保存と，左辺に整合性をもたせるために，(22.49) 式で $\lambda = -\frac{1}{2}$ とする．したがって $R_{\alpha\beta} - (1/2)g_{\alpha\beta}R$ となる．

まだ κ の値が決まっていない．これは，重力結合定数 G に比例しなければならない．次節でみるように，ニュートン極限により正確な値が $8\pi G$ に固定される（この章を通じて $c = 1$ 単位系を使っている）．

よってアインシュタイン方程式は

アインシュタイン方程式

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi G T_{\alpha\beta}} \tag{22.51}$$

である．$c \neq 1$ の単位系では，$8\pi G$ は $(8\pi G)/c^4$ に置き換えられる．$G = 1$ とし，質量が長さの単位系で測られる幾何学単位で，これは単に 8π になる．

アインシュタイン曲率テンソルを

アインシュタイン曲率

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \tag{22.52}$$

で定義すると便利である．こうするとアインシュタイン方程式は短縮形

$$\boxed{G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}} \tag{22.53}$$

またはさらに短縮形

$$\mathbf{G} = 8\pi G \mathbf{T} \tag{22.54}$$

と書くことができる．

鋭い読者は $T_{\alpha\beta}$ の局所保存と整合性のあるアインシュタイン方程式の左辺に別の項をつけることができたのではないかと気づいたかもしれない．それはある定数 Λ に対して $\Lambda g_{\alpha\beta}$ の形の項である．これを左辺に加えても計量の共変微分が 0 となることから [(20.70) 式を参照]，局所保存に影響を与えない．実際，アインシュタインは宇宙定数 Λ と呼ばれる項を導入した．現在では，この項を（もし存在していれば）真空の応力テンソルと同定し，例 22.6 のように，$T^{\mathrm{vac}}_{\alpha\beta} = -(\Lambda/8\pi G)g_{\alpha\beta}$ の形にして応力テンソルに含ませる．宇宙論の章ではこのように扱ってきたが [(18.28) 式を参照]，ここでもそうするだろう．

$T_{\alpha\beta} = 0$ のとき，アインシュタイン方程式は $R_{\alpha\beta} = 0$ になる．これをみるために，(22.51) 式に $T_{\alpha\beta} = 0$ を代入して $g^{\alpha\beta} = 0$ をかける．(22.48) 式を使い，逆行列 (20.12) の定義を使うと $R = 0$ が得られる．アインシュタイン方程式は単に

$$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad T_{\alpha\beta} = 0 \text{ のとき} \tag{22.55}$$

となるが，これは前章で使われた真空アインシュタイン方程式 (21.34) である．

アインシュタイン方程式は時空のリッチ曲率を物質の応力エネルギーと結びつける．方程式の成分は物質源 $T_{\alpha\beta}(x)$ が与えられたとき，計量係数 $g_{\alpha\beta}(x)$ の 10 連立偏微分方程式になっている．電荷と電流密度が与えられたとき，マクスウェル方程式によって電磁ポテンシャルを決めることと似ている．しかしマクスウェル方程式とは違い，アインシュタイン理論の微分方程式は非線形である．非線形性によりマクスウェル方程式よりもかなり解きにくい．

10 連立方程式はすべてが独立ではない．4 つのビアンキ恒等式 (22.50) により，独立な方程式は 6 個になる．計量を 4 つの座標変換によって変化させることができるため，方程式と未知変数の数が正しく対応している．6 個の計量関数またはその組み合わせが重力の基本的な場の方程式によって決まる．よってアインシュタイン方程式の独立な微分方程式の正確な数は 6 個になる．

例 22.8. 一様等方宇宙論モデルのアインシュタイン方程式 第 18 章で考察したロバートソン–ウォーカー一様等方宇宙論モデルはアインシュタイン方程式の成分を書きだす最も簡単で現実的な例である．

ロバートソン–ウォーカーモデルの計量は［(18.62) 式を参照］

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{22.56}$$

であるる．ここで $k = \pm 1, 0$ は空間曲率を決める定数である．物質と放射，真空の宇宙論的完全流体の応力エネルギーは例 22.7 に示した．

計量 (22.56) からアインシュタインテンソルの成分を計算するには本書のウェブサイトから入手できる *Mathematica* ノートブック *Curvature and the Einstein Equation* を使って実行できる．ノートブックの内容は，付録 B にも挙げておいた．

流体とともに運動している観測者の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ で，結果は最もエレガントに表現できる．ここでは $\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}$ であり，他の 3 つの基底ベクトルは (r, θ, ϕ) の座標線の方向に向いている．この基底で応力エネルギーテンソルは定義にしたがい，ちょうど (22.36) 式である．つまり $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathrm{diag}\,(\rho, p, p, p)$ である．アインシュタインテンソルの座標基底成分は，例 7.9 で行ったように基底ベクトルの成分を計算し，(20.41) 式の射影を実行することにより，この正規直交基底への射影とすることができる．結果は

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{3}{a^2}\left(k + \dot{a}^2\right) = 8\pi\rho, \tag{22.57a}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2}\left(k + \dot{a}^2\right)\right] = 8\pi p \tag{22.57b}$$

となる．ここでドットは t に対する微分を表す．アインシュタイン方程式の他のすべての成分は恒等的に 0 になる．

最初の式 (22.57a) はフリードマン方程式 (18.63) であり，第 18 章の FRW 宇宙論モデルの性質はこれから求められる．残りは？ (22.57a) 式の結果と熱力学第一法則 (22.46) からの帰結である．これをみるために，(22.57a) 式に a^3 をかけて，時間で微分する．$d(\rho a^3)/dt$ を (22.46) 式で評価し，(22.57b) 式を求める．または，アインシュタイン方程式から熱力学第一法則 (22.46) が得られるとも言うことができる．(22.57a) 式と (22.46) 式は第 18 章を通じて使われた 2 つの式である．

FRW モデルの $a = 0$ のビッグバンが，圧力と密度だけでなく時空曲率も同様に特異であることは (22.57) 式の 2 つの式のどちらからでも，明らかである．

22.4　ニュートン極限

一般相対論は，物質源の運動が光速に比べ遅く，それによる時空曲率が小さいという極限でニュートン重力の逆 2 乗則を再現しなければならない．言い替えればアインシュタイン方程式はこの極限でニュートンの場の方程式 (3.18) にならなければならない．

例 21.5 の結論によれば 真空アインシュタイン方程式は，静的弱場計量 [(21.25) を参照]

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{22.58}$$

に対して真空ニュートン方程式 $\nabla^2\Phi = 0$ [(21.48) 式を参照] になる（ここで，この章を通じ $c=1$ 単位系が使われている）．同じ計量で，非相対論的物質の応力エネルギー $T_{\alpha\beta}$ をもつ物質源に対してアインシュタイン方程式 (22.53) が同じ線形近似で評価されるとき，何が起きるかを調べよう．

物体が光速よりも小さい典型的な速度 V で運動する系では，非相対論的物体の応力エネルギーで静止エネルギーが優勢になる．静止エネルギー密度 μ が小さいと仮定する．つまり Φ が小さいときの (22.58) 式と整合性のある極わずかな時空曲率だけがこの密度から作られると仮定する．しかし，μV^2 に比例する運動エネルギーと，$\mu\Phi$ に比例するポテンシャルエネルギーはまだ小さく，静止エネルギーと比較して無視できることも仮定する[5]．したがって，(22.17) 式で $u^\alpha \approx (1,\vec{0})$ とした $T^{\alpha\beta}$ は非相対論的物質の応力エネルギーのよい 1 次近似である．$T^{\alpha\beta}$ の唯一残った成分は

$$T^{tt} = \mu + (\mu\Phi \text{ と } \mu V^2 \text{ のオーダーの項}) \tag{22.59}$$

である．$T^{\alpha\beta}$ の他の成分は大きくてもせいぜい μV^2 のオーダーであり無視できる．最低次では $g_{tt}=-1$ なので，他の成分は無視でき，$T^{\alpha\beta}$ の最低次は $T_{tt}\approx\mu$ であろう．この応力エネルギーはアインシュタイン方程式 (22.53) の右辺である．

本書のウェブサイトにある *Mathematica* プログラムを使うと，アインシュタインテンソル $G_{\alpha\beta}$ はニュートン計量 (22.58) に対して，Φ の小さい値の 1 次まで評価することができる．この結果は付録 B にあるが，Φ^2 のオーダーに対して $G_{\alpha\beta}$ のすべての他の成分の中で

$$G_{tt} = 2\nabla^2\Phi + (\Phi^2 \text{ のオーダー}) \tag{22.60}$$

である．

(22.59) 式（添字を下げて）と (22.60) 式をアインシュタイン方程式 (22.53) に代入すると

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\mu \tag{22.61}$$

となり，静止質量密度 μ と重力ポテンシャルをつなぐニュートン場の方程式になる．これはニュートン重力場の方程式 (3.18) である．もしアインシュタイン方程式の左辺と右辺の間の比例定数が未知であれば [(22.49) 式の κ]，ニュートン極限でニュートン場の方程式に回復することによって決まることになる．

---

[5] このことを知る別の方法は，c の因子を戻すことであり，V は V/c, Φ は Φ/c^2 に置き換えることである．

表 22.1 ニュートン重力と一般相対論の比較

	ニュートン重力	一般相対論
質量がすること	他の質量に力の原因となる場 Φ をつくり出す	時空を曲げる
	$\vec{F}=-m\vec{\nabla}\Phi$	$ds^2=g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$
粒子の運動	ニュートンの運動法則	測地線方程式
	$\dfrac{d^2x^i}{dt^2}=-\delta^{ij}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^j}$	$\dfrac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}\dfrac{dx^\gamma}{d\tau}$
場の方程式	ニュートンの場の方程式	アインシュタイン方程式
	$\nabla^2\Phi=4\pi G\mu$	$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=8\pi GT_{\alpha\beta}$

アインシュタイン方程式からニュートン重力場の方程式 (22.61) に回復させることにより，ニュートン重力が，小さい曲率と非相対論的物質源の場合に対する一般相対論の近似であることの証明が完結する．証明の他の部分，つまり測地線方程式がニュートン運動方程式になることは 6.6 節で示した．特にこの近似で，一般相対性理論がよく知られた重力の逆 2 乗則になることがわかる．300 年以上にわたるニュートン重力の太陽系力学への応用の成功は一般相対論の近似の予言として受け入れられるが，水星の近日点移動のような場合には小さな補正が必要である．ニュートン重力は間違っていないが，重力の相対論に対する非相対論的近似となっている．

アインシュタイン方程式の定式化を行うことにより，特殊相対論と整合性のある重力理論を明らかにすることを第 6 章で約束したが，ここで果たした．2 つの理論の類似性を表 22.1 に示した．これは表 6.6 を完成させるものである．しかし一般相対論は空間と時間の見方においてニュートン理論とは質的に違う．

問題

1. **4 次元の発散定理と保存則**　平坦時空中で，慣性系の (t,x,y,z) 軸を辺にもつ立方体を考えよう．立方体はそれぞれの方向に Δt, Δx, Δy, Δz の大きさがあるとしよう．どんなベクトル $\mathbf{v}(x)$ に対しても
$$\int_{\mathcal{V}_4} d^4x\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}=\int_{\partial\mathcal{V}_4} d^3x(n_\alpha v^\alpha),$$
であることを示せ．ここで $\mathcal{V}_4$ は立方体の 4 元体積であり，$\partial\mathcal{V}_4$ は 3 次元境界面であり，$\mathbf{n}$ は法ベクトルである．この関係が正しくなるようにするために，立方体の空間的部分と時間的部分で法ベクトルをどのように選んだらよいか考察せよ．$\partial v^\alpha/\partial x^\alpha=0$ と立方体が空間全体に広がっているとき，この関係の右辺は保存則となることを示し，2 枚の空間的境界面で等しくなる保存量を求めよ．
2. 質量 M, 長さ L の辺の立方体が水平面から角度 θ をなして傾いて静止している．以下の場合，この立方体にはたらく応力 T^{ij} の成分は何か．
(a) その面に沿い，垂直に張られた直交座標の場合．

(b) 水平方向に沿い，鉛直方向に張られた直交座標の場合.

(c) (b) で計算した応力は面内で正しい力になっているか.

3. **空気の法則** 空気は質量 m の分子ガスの完全流体であり，その圧力 p と数密度 n, 温度 T が

$$p = nk_B T$$

によって関係づけられていると仮定する．ここで k_B ボルツマン定数である．圧力が重力と平衡状態にあるとき，ニュートン重力を使って，圧力 p が高さ z に対してどのように変化するかを調べよ．空気の温度 T は一定であり，海面の圧力を $p_{\rm sea}$, 高さの範囲は地球の半径に比べて小さいとし，ガス粒子にはたらく力は地球の重力だけであると仮定せよ.

4. **応力テンソルは対称である** T^{xy} と T^{yx} が応力テンソルの 0 でない唯一の成分であり，応力テンソルが対称でない ($T^{xy} \neq T^{yx}$) と仮定して，1 辺 L の小さな立方体の中心周りにはたらくトルクを計算せよ．同じ密度の物質からなるずっと小さい立方体を考えよう．小さくしていくと正味のトルクはどのように変わるか．この変化から，応力テンソルがなぜ対称でなければならないのか理解できるだろうか.

5. 気体を入れた箱が静止している．気体の分子は箱全体で一様に分布し，運動量分布 $f(\vec{p})$ で運動している．したがって $f(\vec{p})d^3p$ が $\vec{p}$ を中心とする範囲 d^3p の運動量をもつ単位体積当たりの分子数となる．$f(\vec{p})$ が等方であるとする．つまり分布は $|\vec{p}|$ だけに依存するとする.

(a) 気体の応力テンソルが

$$T^{\alpha\beta} = \int d^3p \frac{f(\vec{p})}{m} p^\alpha p^\beta$$

となることを議論せよ．ここで p^α は，$\vec{p}$ の関数と考えられる 4 元運動量であり，m は分子の静止質量である.

(b) T^{ij} を計算し，これが対角的であり，その成分がすべて等しいことを示せ.

(c) 気体の圧力とエネルギー密度を求めよ．分布のピークが超相対論的運動量にあると仮定し，気体の状態方程式を求めよ.

6. [P] **電磁場の応力エネルギー** この問題は，平坦時空における電磁場の応力エネルギーテンソルの問題である．標準的な結果は以下 $c = 1$, SI 単位系で引用され, 因子は $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$ と $\epsilon_0 \equiv 1/\mu_0$ となる．ガウス単位系とするには $\mu_0 \to 4\pi$, $\epsilon_0 \to 1/(4\pi)$ の置き換えをすればよい.

電磁気学ではエネルギー密度 ϵ は真空で

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^{\,2} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2}\right)$$

となり，エネルギーフラックスはポインティングベクトル

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$

で与えられ，応力はマクスウェル応力テンソル

$$T^{ij} = \epsilon_0 \left(-E^i E^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}\vec{E}^{\,2}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(-B^i B^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}\vec{B}^{\,2}\right)$$

によって与えられる．（これまで見てきたような他の公式と比較するときには，$c^2 = 1 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$ を忘れないように．応力テンソルの定義における符号の変化も注意しておく必要がある．）

(a) これらをあわせて電磁場の応力エネルギーテンソル $T^{\alpha\beta}$ をつくれ．

(b) マクスウェル方程式から，この $T^{\alpha\beta}$ が保存すること，つまり，4 つの方程式 (22.31) が満たされることを式で示せ．

7. [S] 例 22.5 で表された立方体を考えよう．(22.34) 式の表面積分が立方体にはたらく正味の圧力になっていることを示せ．

8. [S](22.38) 式によって定義される真空の応力エネルギーが局所保存則 (22.40) を満たすことを示せ．

9. [S] 時空をどのように運動していても，すべての観測者が同じ真空エネルギー密度を測定することを示せ．

10. **弱いエネルギー条件**　局所慣性系で $T_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(A, B, C, D)$ の形をとる応力エネルギーテンソルを考えよう．

(a) 応力エネルギーテンソルが与えられた系に対して運動している観測者がどんなに速く運動しても，エネルギー密度が正になるようにするためには A, B, C, D の条件はどのようでなければならないか．

(b) 真空応力テンソル (22.39) では A, B, C, D が負の形をしている．観測者が負のエネルギー密度を見るような系は存在するか．

11. 空間が平坦になると 1 階微分が 0 になる計量から応力エネルギーがつくれないことを示すことによって，局所重力エネルギーは存在しないという 16.5 節での議論を補強せよ．

12. [C] **対称性は保存量につながる**　以下の問題の結果は一般的であるが，代数計算がしやすいように，

$$ds^2 = -A^2dt^2 + B^2dx^2 + C^2dy^2 + D^2dz^2$$

の形の計量に制限しよう．A, B, C, D は (t, x, y, z) の関数である．

(a)

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0$$

のような関係が，計量によって決まるある関数 f に対して

$$\frac{\partial(fJ^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0$$

の形で書けることを示せ．したがってこれはカレント J^α の保存則になる．

(b) 時空が対称性をもっていると，

$$\nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha = 0$$

を満たすキリングベクトルが存在する（実際に確かめるには問題 20.18 をみよ）．

$$J^\alpha \equiv \xi_\beta T^{\alpha\beta}$$

が保存カレントであることを示せ.

13. [A,C] **ビアンキ恒等式の証明**　局所慣性系でビアンキ恒等式 (22.50) は

$$\partial_\alpha R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\partial_\beta R = 0$$

になる．ここで $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ である．(21.20) 式と (21.28) 式を使い，これらの恒等式が以下の性質をもつことを示せ.

(a) (21.20) 式を使って，局所慣性系では，計量の 3 階微分を含む項だけが残ることを実際に示せ.

(b) (21.28) 式を使って，上の式のビアンキ恒等式に現れる計量の 3 階微分の組み合わせを評価し，それらが打ち消し合うことを示せ.

14. [C,N] **ワープ航法では負のエネルギー密度が必要となる**　この問題は，7.4 節で考察した Alcubierre のワープ航法に関するものであり，その線素は (7.24) 式にある.

(a) t 一定面の法ベクトル n_α の成分を計算せよ.

(b) 本書のウェブサイトにある *Mathematica* プログラム *Curvature and the Einstein Equation* を書き換えて

$$T_{\alpha\beta}n^\beta n^\beta = -\frac{1}{8\pi}\frac{V_s^2(y^2+z^2)}{(2r_s)^2}\left(\frac{df}{dr_s}\right)^2$$

を示せ．これは t 一定面に対して静止している観測者が測定するエネルギー密度である．これが負であるという事実から，ワープ航法時空は正エネルギー密度の古典的な物質に支えられていないことになる.

15. **ワームホールは負のエネルギー密度を必要とする**　ワームホール幾何学 (7.39) を思い出し，この幾何学が，この例で使われた正規直交基底のアインシュタイン方程式の解であるために必要な応力エネルギー $T^{\alpha\beta}$ の成分を計算し（静止観測者に測られる)．エネルギー密度が負になることを示せ．古典的に記述される実在するすべての物体のエネルギーは正なので，古典的な意味で (7.39) 式のようなワームホールを作ることは不可能である.

16. [A,N] **ユークリッド空間の定負曲率面の埋め込み**

(a) (18.60) 式に代表されるような，開いた宇宙の空間幾何学の $\theta = \pi/2$ スライスである 2 次元曲面のスカラー曲率を計算し，スカラー曲率が曲面に渡って負で一定であることを示せ.

(b) 2 次元幾何学

$$d\Sigma^2 = du^2 + \cosh^2 u d\phi^2$$

の曲率も同様に一定で負であることを示せ．微分幾何学の Minding の定理により，この曲面は（a）の開いた宇宙のスライスと同じ局所幾何学を持たなければならない.

(c) 3 次元平坦空間中で（b）の曲面の埋め込みを求めよ．それはポテトチップのように見えるか.（この部分は問題 18.30 の（b）と同じである.）

第 23 章

重力波放射

第 16 章で述べたように，重力波は，電磁波スペクトルに見られるものとは異なった天文学的現象を見渡せる宇宙の窓を提供する．様々な運動をしている質量は時空曲率の中を伝わるさざ波の源である．したがって重力放射の発生源は宇宙のいろいろなところに広がっている．強い時空曲率が速く変化している領域では重力波が多く発生しているのだろう．たとえば，ビッグバンにおける状況であるとか，ブラックホールへの重力崩壊である．しかし，互いに回り合う連星系でさえも，多少なりとも重力波を放っている．実際，23.7 節で述べるように，重力波効果の実験的発見は一組の中性子星連星の軌道周期の減少からであった．

地上と宇宙空間における重力波検出器は重力波で宇宙を探査するために必要な装置である．そのうちのいくつかの動作について第 16 章で概略を述べた．観測を解釈し，何を見ているのかを予測するため，重力源が発生する重力波についてアインシュタイン方程式を解く必要がある．強く曲がり速く変動する重力源から発生する重力波を予測することは，十分非線形なアインシュタイン方程式の数値シミュレーションによってのみ一般的に扱える問題であり，これは本書の範囲を超えている．しかし，弱い非相対論的発生源から放たれる時空の小さなさざ波という，より扱いやすい問題を調べることにより，重力波の発生に関する洞察が得られるだろう．この章ではこの問題を扱う．

23.1 発生源のある線形アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式 (22.51)

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{23.1}$$

により，運動している質量応力エネルギーと時空曲率中を伝わるさざ波が関係づけられる．発生源 $T_{\alpha\beta}$ が弱く計量が平坦計量 $\eta_{\alpha\beta}$ の小さな摂動 $h_{\alpha\beta}(x)$ として書けると仮定してアインシュタイン方程式を解くことにする．このことから計量は

$$\boxed{g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x)} \tag{23.2}$$

平坦時空の小さい摂動

となる．ここで平坦時空の直交座標 (t, x, y, z) を仮定し，$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$ であることを使った．弱いということは，α と β のすべての値に対して $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ が成り立つことを意味する．我々はアインシュタイン方程式の左辺を計量摂動の 1 次まで評価することにする．これは，線形真空アインシュタイン方程式を得るために，21.5 節で行ったようなものと同じである．それを右辺

と等しいとし，弱い発生源の線形重力の方程式を得ることにする．最後に，発生源のすべての速度が光速よりも小さいことも仮定する．そのことから，応力エネルギーでは静止質量密度 μ が優勢になっているだろう：

$$T^{\alpha\beta} = \mu u^{\alpha} u^{\beta} \tag{23.3}$$

しかし，発生源は静止しているとは仮定しない．そうしてしまうと，重力波は発生しないだろう．途中結果がより一般的なものになるようにするため，具体的な形 (23.3) を導入するのはできるだけ先に延ばすことにする．

21.5 節で述べたように，座標に小さな変化（ゲージ変換）を与えることにより，計量摂動 $h_{\alpha\beta}(x)$ に 4 つのゲージ条件を課すことができる．我々はローレンツゲージ (21.56) を使うが，4 つのローレンツゲージ条件は「トレース反転」振幅

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h \tag{23.4}$$

を導入することにより簡単な形に書くことができる．ここで $h \equiv h^{\gamma}{}_{\gamma}$ である[1]．ローレンツゲージ条件 (21.56) は

ローレンツゲージ

$$\boxed{\frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0} \tag{23.5}$$

になる．

(21.44) 式から，ローレンツゲージでは計量摂動 $h_{\alpha\beta}$ の 1 次まででアインシュタイン方程式 (23.1) の左辺のリッチ曲率が簡単な形 $\delta R_{\alpha\beta} = (-\frac{1}{2})\Box h_{\alpha\beta}$ になることがわかる．ここで $\Box$ は (21.45) 式で定義された**平坦空間**重力波演算子である．つまり $\Box = -\partial^2/\partial t^2 + \vec{\nabla}^2$ である．線形曲率スカラー $\delta R_{\alpha\beta}$ [(22.48) 式を参照] はしたがって $\delta R = (-\frac{1}{2})\Box h$ である．これによってアインシュタイン方程式 (23.1) の線形化は

弱い場の線形アインシュタイン方程式

$$\boxed{\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}} \tag{23.6}$$

になる．(23.5) 式や (23.2) 式のように (23.6) 式は，平坦計量が $\eta_{\alpha\beta}$ となっている直交座標の計量摂動と応力エネルギーテンソルの成分にだけ成り立つ関係であることを強調しておく．

(23.6) 式から，$\bar{h}_{\alpha\beta}(x)$ の各成分は，発生源つきの間隔平坦空間波動方程式にしたがい

$$-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 f(x) = j(x) \tag{23.7}$$

の形をしていることがわかる．与えられた発生源 $j(x)$ に対する波動方程式の解 $f(x)$ は物理学では標準的な問題であり，たとえば電磁波の理論でよく知られている．次節でその解を復習する．

23.2　発生源のある波動方程式の解法

まず，(23.7) 式の発生源 $j(x)$ がある決まった時刻で空間のある決まった位置の事象に置かれ，δ 関数で表される場合を考えよう．波動方程式は線形なので，より一般的な発生源はこのような δ

[1] 第 21 章で議論したように [(21.47) 式を参照] 線形重力では，添字を平坦計量 $\eta^{\alpha\beta}$ で上げる．

関数源からの波を加えることにより組み立てることができる（図 23.1 を見よ）．便宜上，この時空事象を原点に置くことから始めよう．これによって

$$j(x) \equiv \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x}) \tag{23.8}$$

となる．この発生源が球対称であることから，(23.7) 式の特解（特殊解）は t と $r = |\vec{x}|$ にだけ依存することになり，これを $g(t, \vec{x})$ と呼ぼう．原点から離れると $g(t, \vec{x})$ は

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\right) = 0 \tag{23.9}$$

を満たさなければならない．この式の解が，2 つの関数 $I(\cdot)$ と $O(\cdot)$ がどんなものであっても

$$g(t, r) = \frac{1}{r}\left[O(t - r) + I(t + r)\right] \tag{23.10}$$

であることを確認することは難しくない．解 $O(t-r)/r$ が発生源から光速で外向きに運動する波を表しており，解 $I(t+r)/r$ が発生源に内向きに同じ速さで運動する波を表している．これは最も一般的で物理的な状況であり，(23.10) 式は最も一般的な数学的な解である．しかし，重力波に焦点を絞った観測機器の作り方を習うまで，物理的に関係あるのは，外側に向く波の部分だけである．これは**遅延解**または**因果的**解と呼ばれる．遅延波は発生源で事象が生じた**後**受信される．(23.10) 式の外向き遅延解だけを考えることにする．

δ 関数的発生源 (23.8) がある場合に (23.9) 式の解である関数 $O(t-r)$ をまだ求めていなかった．特異的な δ 関数を直接用いるには難しいので，(23.7) 式の両辺を，発生源 (23.8) を含む半径

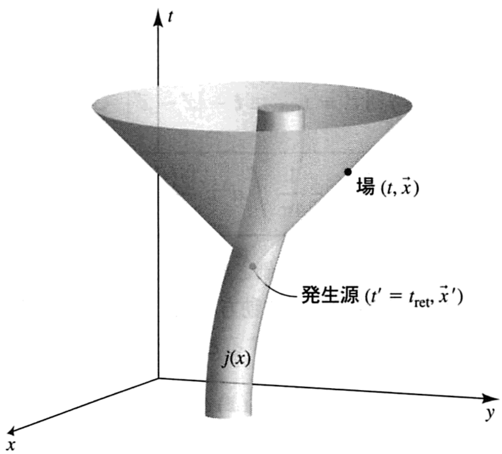


図 23.1 一般的な発生源に対する波動方程式 (23.7) の解は，強さ $j(t', \vec{x}')$ で重みをつけて，時空事象 $(t', \vec{x}')$ における δ 関数的点源を重ね合わせることでつくることができる．この時空図の円錐は $(t', \vec{x}')$ から，光速で外側に広がる波を表している． $(t, \vec{x})$ の波の値は遅延時刻 $t_{\rm ret} \equiv t - |\vec{x} - \vec{x}'|$ における発生源に依存する．

ϵ の小さい空間的領域に渡って積分すると

$$\int_\epsilon d^3x \left[-\frac{\partial^2 g(x)}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 g(x)\right] = \int_\epsilon d^3x \delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(t) \tag{23.11}$$

が得られる．(23.10) 式から小さい r に対して g は $1/r$ のように発散するのだが，(23.11) 式の体積素は $4\pi r^2$ のように減少する．$\partial^2 g/\partial t^2$ の項の積分は $\epsilon \to 0$ で 0 になる．よって，この極限における全体の寄与は $\vec{\nabla}^2 g$ の体積分からくるのだが，発散定理を使えば表面積分に変換でき，それは以下のようになる：

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon d^3x\, \vec{\nabla}^2 g = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon d\vec{A}\cdot\vec{\nabla} g = \delta(t) \tag{23.12}$$

初めの積分は半径 ϵ の球の体積について，二番目の積分は表面について行う．$g(t,r) = O(t-r)/r$ を代入すると積分と極限は容易に評価でき

$$-4\pi O(t) = \delta(t) \tag{23.13}$$

が得られる．原点に δ 関数源があり，外向き波（遅延）境界条件のある波動方程式の解 $g(t,r)$ は，したがって

$$g(t,r) = -\frac{\delta(t-r)}{4\pi r} \tag{23.14}$$

である．期待されたように，また図 23.1 で説明したように，解は $t=r$ の光円錐に閉じ込められることに注意せよ．

もし発生源 $j(x')$ が多くの時空点 $(t', \vec{x}')$ 上に分布していれば，$j(t', \vec{x}')$ で重みをつけてそれぞれの寄与をたしあわせることにより (23.7) 式の解が得られる：

$$f(t,\vec{x}) = \int dt'\, d^3x'\, g(t-t', \vec{x}-\vec{x}')j(t', \vec{x}') \tag{23.15}$$

(23.14) 式の δ 関数の効果は遅延時刻 $t' = t_{\rm ret} \equiv t - |\vec{x}-\vec{x}'|$ で (23.15) の積分を評価することである．よって

波動方程式の一般解

$$\boxed{f(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\, \frac{[j(t', \vec{x}')]_{\rm ret}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} \tag{23.16}$$

ここで $[\ \cdot\ ]_{\rm ret}$ は，括弧の内部が遅延時間で評価されることを表している．

(23.16) 式は発生源と外向き境界条件のある波動方程式の一般解である．特に興味のある場合は，発生源が時間とともに振動数 ω で調和的に変化するときであり，たとえば

$$j(t,\vec{x}) = j_\omega(\vec{x})\cos(\omega t) \tag{23.17}$$

で，波長 $\lambda = 2\pi/\omega$ が発生源の特徴的な大きさ $R_{\rm source}$ に比べて大きいときである：

$$\lambda \gg R_{\rm source} \qquad \text{（長波長近似）} \tag{23.18}$$

長波長ということは，低い振動数で特徴的な速さ $V_{\rm source} \sim \omega R_{\rm source} \ll 1$ であることを表している．単純な発生源では，長波長は低速であることを意味している．

長波長近似では，これから示すように，遠い距離 $r \gg R_{\text{source}}$ の解に対して特別に簡単な公式がある．(23.17) 式を一般解 (23.16) に代入すると

$$f(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{j_\omega(\vec{x}')\cos[\omega(t-|\vec{x}-\vec{x}'|)]}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{23.19}$$

になる．発生源から遠い距離 r では，分母の $|\vec{x}-\vec{x}'|$ を r で置き換えることができる．長波長近似では同じ置き換えがコサインの中でもできることになり，それは，波源について $\vec{x}'$ が変わっても，(23.18) 式が成り立てば $(2\pi/\lambda)|\vec{x}-\vec{x}'|$ は大きく変化しないことからいえる．したがって，波長よりもずっと小さい波源から離れていれば，解は漸近的に

$$f(t,\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{1}{4\pi r}\int d^3x' j(t-r,\vec{x}') \qquad (\text{長波長と大きな } r) \tag{23.20}$$

になる．(23.20) 式では添字 ω を j から落とした．長波長近似が十分成り立つほど低い振動数だけを考える限り，波源が厳密に調和的な振動をしているかどうかは無関係だからだ．(23.20) 式は遅延時間で空間を波源について積分することによって決まる外向きの球面波である．

23.3 線形重力の一般解

波動方程式の解についてこれまで考察してきた結果は線形重力の場合にもそのまま適用することができる．線形アインシュタイン方程式 (23.6) の成分は $\bar{h}_{\alpha\beta}$ の 10 個の平坦空間波動方程式の組であり，それぞれが発生源をもつ．同じく，すべての添字を上げることにより，アインシュタイン方程式は発生源として $-16\pi T^{\alpha\beta}$ をもつ $h^{\alpha\beta}$ についての 10 連立波動方程式である．したがって，(23.16) 式から線形アインシュタイン方程式の一般解は

$$\boxed{\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) = 4\int d^3x' \frac{\left[T^{\alpha\beta}(t',\vec{x}')\right]_{\text{ret}}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} \tag{23.21}$$

線形アインシュタイン方程式の解

である．ここでも $[\ \cdot\ ]_{\text{ret}}$ は，括弧の内部が遅延時間 $t' = t_{\text{ret}} \equiv t - |\vec{x}-\vec{x}'|$ で評価されることを表している．(23.6) 式のように，この関係は，慣性系の通常の直交座標における，計量摂動と応力エネルギーの成分にだけ成り立つ．

計量摂動 (23.21) は波源つきの波動方程式 (23.6) を満たすが，それは線形アインシュタイン方程式を解くための計量摂動に対する唯一の要請ではない．ローレンツゲージ条件 (23.5) も満たさなければならないのだ．ところが，平坦空間での応力エネルギーの保存 (22.31) の結果，(23.5) 式は波動方程式の解 (23.21) により自動的に満たされる．解 (23.21) 式をローレンツゲージ条件 (23.5) に代入すると

$$\frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x})}{\partial x^\beta} = 4\int d^3x' \left[\frac{\partial T^{\alpha t}(t_{\text{ret}},\vec{x}')}{\partial t}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(T^{\alpha i}(t_{\text{ret}},\vec{x}')\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right] \tag{23.22}$$

となる．これを評価するために，$t_{\text{ret}} \equiv t - |\vec{x}-\vec{x}'|$ はそれ自身が x^i と x'^i の関数であることを思い出せ．恒等式 $\partial|\vec{x}-\vec{x}'|/\partial x^i = -\partial|\vec{x}-\vec{x}'|/\partial x'^i$ を使って x^i についての微分を x'^i についての微

分で置き換えよ．部分積分（物体の外側で表面項が 0 になることに注意）することにより，以下の式を得る（問題 3）：

$$\frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x})}{\partial x^\beta} = 4\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}(t',\vec{x}')}{\partial x'^\beta}\right)_{t'=t_{\rm ret}} \tag{23.23}$$

線形重力において，計量摂動 $h^{\alpha\beta}(x)$ と応力エネルギー $T^{\alpha\beta}(x)$ は比較的小さい．線形的な局所保存則 (22.40) はこの近似で平坦空間の保存量 (22.31) である．(23.23) 式の右辺は 0 になり，ローレンツゲージ条件 (23.5) は自動的に (23.21) 式によって満たされる．

例 23.1. **少し回転**　線形アインシュタイン方程式 (23.21) は第 14 章で述べた回転の磁場的重力効果が一般相対論でどのように生じるのかを理解するための最も直接的な道筋を与える．簡単のため，時間独立で球対称な非相対論的物質分布を考えよう．角速度 $\vec{\Omega}$ で一様に回転しており，回転は内側全体で一定で，物体が回転で大きく曲げられないほど十分ゆっくりであるとする．我々が取り組んできた別の非相対論的状況と同じように，応力エネルギーでは物質の静止エネルギーが優勢であり， $T^{\alpha\beta} = \mu u^\alpha u^\beta$ で近似できる．$\mu(x)$ は静止エネルギー密度で，$u^\alpha(x)$ は 4 元速度である．回転速度が光速に比べて小さいとき，応力テンソルの最も重要な成分は Ω の 1 次のオーダーで [(5.28) 式を参照]

$$T^{tt}(\vec{x}) = \mu(r), \qquad T^{ti}(\vec{x}) = T^{it}(\vec{x}) = \mu(r)V^i(\vec{x}) \tag{23.24}$$

である．ここで $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\Omega}\times\vec{x}$ は 3 元ベクトルである．他の成分は Ω^2 のオーダーである．T^{tt} は (21.49) 式で平坦空間のニュートン摂動の発生源である（問題 1）．成分 T^{ti} は質量の分布と同様に物質の**速度**にも依存した磁場的重力効果の発生源である．具体的に (23.21) 式から

$$h^{it} = h^{ti} = \bar{h}^{ti} = 4\int d^3x' \frac{\mu(r')V^i(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{23.25}$$

である．この積分を評価するために，直交座標 (x,y,z) を選び，z 軸を $\vec{\Omega}$ の方向にとると，$\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ および

$$V^x = -\Omega y, \qquad V^y = \Omega x, \qquad V^z = 0 \tag{23.26}$$

である．(23.25) 式を評価するには，回転物体から大きく離れた半径距離 r において，$r \equiv |\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ で正しい展開公式

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \cdots \tag{23.27}$$

を使えば，最も容易に行える．第 1 項から積分への寄与は，$\vec{x}' \to -\vec{x}'$ の入れ換えでわかるように奇関数の積分となるので 0 になる．第 2 項（問題 4）は

$$h^{xt} = h^{tx} = -\frac{2yJ}{r^3}, \qquad h^{yt} = h^{ty} = \frac{2xJ}{r^3}, \qquad h^{zt} = h^{tz} = 0 \tag{23.28}$$

となる．ここで J はニュートン的角運動量の大きさである：

$$\vec{J} = \int d^3x \left[\vec{x}\times(\mu\vec{V})\right] = \vec{e}_z \int d^3x\, \mu\Omega(x^2+y^2) \tag{23.29}$$

これは (14.25) 式に引用された回転摂動の正確な形である．簡単な場合について導出したが，結果は一般的である．回転が一様であるとすると，どんな r でも物体の外側で成り立つ（問題 2）．

摂動 (23.28) は重力波を表していない，大きな r において，重力放射を特徴づける $1/r$ の振る舞いをしておらず，むしろ $1/r^2$ で小さくなる．一般的に軸対称回転は，高度に対称的な運動で重力放射を発生させない例の 1 つである．

23.4 弱い重力波の発生

発生源から遠く離れた重力波

外向きの波を仮定したとき，(23.21) 式は応力エネルギーの指定された発生源に対する線形重力の一般解である．(23.20) 式は長波長近似の波動方程式の漸近的な解である．この節では，これら結果を，特に速度が遅いと仮定して，弱い波源から遠い距離における重力波の計算に適用する．さらに具体的に，$r \gg R_{\text{source}}$ と $\lambda \gg R_{\text{source}}$ を仮定する．R_{source} は波源の特徴的な大きさであり，$\lambda = 2\pi/\omega$ は波源の変化の特徴的な振動数 ω に関係した波長である．(23.20) 式を (23.21) 式に適用すると，漸近的な重力波の振幅として

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{4}{r}\int d^3x' T^{\alpha\beta}(t-r, \vec{x}') \qquad \begin{pmatrix} \text{弱い波源} \\ \text{長波長} \\ \text{大きな } r \end{pmatrix} \tag{23.30}$$

が得られる．

(23.30) 式から角度の限られた範囲ではどんな方向にも波は大きな r で平面波として近似できる．これによって第 16 章の平面波における偏極とエネルギーフラックス，検出器の反応の分析がここでも使えることになる．この分析では計量摂動 $\bar{h}^{ij}(x)$ の空間成分だけが必要となる．(23.30) 式の空間成分の発生源は $\int d^3x\, T^{ij}(t-r, x)$ である．これらは 1 次のオーダーまで $T^{\alpha\beta}$ がしたがう平坦空間の保存則 (22.31) を使うことにより便利な形にすることができる．このうちの 1 つの成分は

$$\frac{\partial T^{tt}}{\partial t} + \frac{\partial T^{kt}}{\partial x^k} = 0 \tag{23.31}$$

となる．この式を時間で微分し，対称性 $T^{tk} = T^{kt}$ と保存則 (22.31) をもう一度使うと

$$\frac{\partial^2 T^{tt}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T^{tk}}{\partial x^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial T^{tk}}{\partial t}\right) = +\frac{\partial^2 T^{k\ell}}{\partial x^k \partial x^\ell} \tag{23.32}$$

が得られる．両辺に $x^i x^j$ をかけ空間積分し，右辺の積分に部分積分を行う．発生源には境界があるので表面項は 0 になる．その結果，恒等式

$$\int d^3x\, T^{ij}(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int d^3x\, x^i x^j T^{tt}(x) \tag{23.33}$$

が得られる．

長波長とは 23.2 節で述べたように低速度であることを意味する．この極限で，応力エネルギーテンソルは非相対論的速度で (23.3) 式の形をとる．エネルギー密度 $T^{tt}(x)$ では静止質量密度 $\mu(x)$

が優勢になり，(23.33) 式の積分で**質量 2 次モーメント**[2] $I^{ij}(t)$ を定義することができる：

第二質量モーメント

$$I^{ij}(t) \equiv \int d^3x\, \mu(t,\vec{x}) x^i x^j \tag{23.34}$$

長波長近似における弱い非相対論的な波源から遠く離れたところで，重力波計量摂動は

大きな距離での重力波の振幅

$$\bar{h}^{ij}(t,\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{2}{r}\ddot{I}^{ij}(t-r) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{弱い波源}\\ \text{長波長}\\ \text{大きな } r\end{array}\right) \tag{23.35}$$

になる．ここでドットは t に関する微分である．

(23.35) 式は導出が特殊であるが一般的な結果である．軌道がどんなに精度よくニュートン理論で近似されようとも，導出の仮定で，相互軌道を回る星の組にような自己重力系は除外してある．平坦空間の**すべての** 摂動が波動方程式 (23.6) の右辺で無視されているからである．しかし，平坦空間におけるニュートン摂動は自己重力系における運動の源であり，無視することはできない．だが，(23.35) 式は質量源の運動にのみ依存し，運動がどのように引き起こされているかに依存しない．この公式は，導出ではそうしていなくても，ニュートン重力のためにゆっくり運動する弱い波源に対してよい近似になっている[3]．この事実に基づいて，次節と例 23.2 で (23.35) 式を連星系に適用する．

例 23.2. 重力波の振幅の評価：連星系 $\imath$ Boo　連星系 $\imath$ Boo は地球からうしかい座方向に 11.7pc のところにある．$1M_\odot$ の星と $0.5M_\odot$ の星からなり，あまりに近いため，接触しそうで，互いに軌道周期 $P = 6.5$ 時間で回りあっている．この波源から波を受信するには重力波検出器のひずみ感度 $\delta L/L$ [(16.19) 式を参照] にはどの程度のオーダーが必要となるか．この種の質問に答えるためには，弱い非相対論的な波源から発生し，そこから離れた場所における重力波のオーダーの評価を行う必要があり，(23.35) 式を使うことができる．

評価を単純にするため，星の質量はともに同じ M であると仮定し，各々は半径 R の円軌道上にあり，周期 P で質量中心の周りを運動していると仮定する．(一方の質量がもう一方の質量の半分程度であることによって発生する誤差はオーダーの粗い評価では重要ではない）第二質量モーメントの典型的な成分の粗い評価は $I^{ij} \sim MR^2$ になる．時間 2 階微分は周期で 2 度割ることに相当し

$$\ddot{I}^{ij} \sim MR^2/P^2 \tag{23.36}$$

---

[2] I という文字にもかかわらず，慣性モーメントテンソル

$$\mathcal{I}^{ij} = \int d^3x\, \mu(\vec{x})[\delta^{ij}r^2 - x^i x^j]$$

と厳密に同じではない．これは力学において剛体の運動に対して重要である．ただし一方から他方を求めることはできる．

[3] 導出方法は，一般相対論における 1 次の非線形性を扱っている進んだ教科書にある．たとえば Misner, Thorne, and Wheeler (1970).

となる．軌道半径 R は質量および周期と

$$\frac{V^2}{R} = \frac{(2\pi R/P)^2}{R} = \frac{M}{(2R)^2}$$

の関係がある．よって連星系から距離 r 離れたところで重力波の振幅の評価は (23.35) 式から

$$\bar{h}^{ij} \sim \left(\frac{M}{r}\right)\left(\frac{M}{P}\right)^{2/3} \tag{23.37}$$

となる．単位を戻すと

$$\bar{h}^{ij} \sim 10^{-21}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/3}\left(\frac{1\mathrm{h}}{P}\right)^{2/3}\left(\frac{100\mathrm{pc}}{r}\right) \tag{23.38}$$

となる．

連星系 $\imath$ Boo では $\bar{h}^{ij} \sim 10^{-21}$ になり，これが重力波を見る検出器に求められるひずみ感度率である [(16.19) 式を参照]．次節で，連星系に対して (23.35) 式の詳しい評価を実行することにし，この非常に粗い評価がいかに優れているかをみることにする．$\imath$ Boo は地球で**最も明るい**連星重力波源の 1 つであるため，10^{-21} という数値は重力波を検出するのがいかに困難であるかを物語っている． 16.4 節で述べた LIGO 検出器の感度は，この周波数領域 $\sim 10^{-5}$Hz ではよくない．$\imath$ Boo 連星系は宇宙空間の検出器によって見えるかもしれない少数の最も明るい連星源の 1 つなのであろう．

電磁気との類似

弱い重力波の生成理論と電磁場の生成理論の間には，大きな類似性が見られる．電磁気学の講義をとっていれば，その類似性を有効に使うべきだ．まとめたものが表 23.1 にある．（この表の一番下の行は全放射率といい，23.6 節で考察する．）もし電磁気学の講義をとっていなければ，とばして次節に進むとよい．

線形重力と電磁気が類似していることは，適したゲージを選ぶことで両理論の場について基本的な方程式が波源をともなった波動方程式になるという事実を追跡することで明らかになる．主な差は，重力波はテンソル場であるが，電磁気はベクトル場で表されるという点にある．どちらの場合も長波長近似を系統的に使うことができ，波源からずっと離れた場（放射場）の $1/r$ の部分を $(R_{\mathrm{source}}/\lambda)$ のべきで展開することができる．(23.20) 式とその結果 (23.35) 式はこのような展開のちょうど第一項であり，残りの項は，(23.19) 式のコサインを大きな r に対して展開することから生じる．重力も電磁気もこれらの展開係数は多重極モーメントの時間微分に比例し，それは波源に x^i のべきをかけて積分することで得られる．どちらにも 2 つの多重極モーメントの族がある．電磁気では電気（電荷）モーメントと磁気（電流）モーメント，重力では質量モーメントと質量流モーメントである．電磁気や重力で単極子は放射場へ寄与しない．言い替えれば，球対称電磁波や球対称重力場は存在しない．電磁気では電荷が保存し，線形重力では，平坦空間保存則 (22.31) が成り立ち（質量が次の（2 次）オーダーで放射するときでさえも），物質の質量は保存するからである．したがって表 23.1 に示したように，電磁気における最低次の項は電気双極子放射になる．し

表 23.1　線形重力波と電磁波の生成

	線形重力 $(c = G = 1)$	電磁気 $(c = 1)$
場の方程式	アインシュタイン方程式 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$	マクスウェル方程式
基本ポテンシャル	線形計量摂動 $h_{\alpha\beta}(x)$	ベクトルポテンシャルと スカラーポテンシャル $(\Phi(x), \vec{A}(x))$
波源	応力エネルギー $T^{\alpha\beta}$	電荷と電流 $(\rho_{\mathrm{elect}}, \vec{J})$
ローレンツゲージ	$\dfrac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$	$\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
波源のある波動方程式	$\Box \bar{h}_{ij} = -16\pi T_{ij}$	$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
一般解	$\bar{h}^{ij} = 4 \displaystyle\int d^3x' \frac{[T^{ij}]_{\mathrm{ret}}}{\lvert\vec{x} - \vec{x}'\rvert}$	$\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int d^3x' \frac{[\vec{J}]_{\mathrm{ret}}}{\lvert\vec{x} - \vec{x}'\rvert}$
大きな r, 長波長近似	$\bar{h}^{ij} = \dfrac{2[\ddot{I}^{ij}]_{\mathrm{ret}}}{r}$ $I^{ij} = \displaystyle\int d^3x\, \mu x^i x^j$	$\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{[\dot{\vec{p}}]_{\mathrm{ret}}}{r}$ $\vec{p} = \displaystyle\int d^3x \rho_{\mathrm{elect}} \vec{x}$
時間平均放射率	$\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{1}{5} \left\langle \dddot{I}_{ij} \dddot{I}^{ij} \right\rangle$	$\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{\mu_0}{6\pi} \left\langle \ddot{\vec{p}}^{\,2} \right\rangle$

山括弧 $\langle \cdot \rangle$ は波源の特徴的な周期よりも長い時間で平均することを表す．線形重力の列の方程式は $c = G = 1$ の幾何学単位で表されている．電磁気の方程式は $c = 1$ とした SI 単位であり，$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$ である．これらを $c = 1$ としたガウス単位系にするためには μ_0 を 4π で置き換える．

かし，質量分布 $\int d^3x \mu x^i$ の双極子モーメントは単に全質量かける質量中心である．質量中心の位置は座標の選び方で 0 にすることができる．したがって質量双極子モーメント放射は存在しない（問題 6）．重力における磁気モーメントの類似物は角運動量であり，それは，x^i のべきに質量流をかけて積分したものである（例 23.1 を参照）．しかし物質の角運動量も線形近似では保存し，この多重極から重力波は発生しない．したがって，最低次の重力効果は四重極であり，23.6 節で詳しくこのことを調べることにする．この差から，電磁波の振幅に対する最低次の近似が $(\omega R_{\mathrm{source}})$ に比例するのだが，重力波では $(\omega R_{\mathrm{source}})^2$ に比例することがわかる．ここで ω と R_{source} はそれぞれ特徴的な振動数と波源の特徴的な大きさである．

23.5 連星からの重力波

宇宙には，一様に時間変化する質量 2 次モーメントをもつ質量分布の数だけ，重力波源が存在している．しかし，詳しい分析をするために典型的な波源を 1 つ選び出すとすれば，我々は相互重力のもとで互いに軌道上を回りあっている 2 つの星を選ぶだろう．すべての星の約 2/3 がこのような連星系にある．例 23.2 で考えた ι Boo の場合に示したように，ある近傍の連星からの重力放射は宇宙空間の受信器によって検出されるであろう．連星系の軌道が重力波によって減衰していくのを観測することにより重力波の効果が初めて発見された（23.7 節）．

以前考察したように，弱い波源低速近似は連星系から発生される重力波のよい近似となる．その導出が厳密には自己重力系には適用できないにもかかわらずである．これがどのようにうまくいくのかみるために，図 23.2 に説明した連星の場合を詳しく考えよう．等質量 M の 2 つの星が質量中心を中心とする半径 R の円軌道上にある．ニュートン解析が十分正しいと仮定すると，軌道の半径と周期 P はニュートンの法則（$G=1$ の単位系）により

$$\frac{V^2}{R}=\frac{1}{R}\left(\frac{2\pi R}{P}\right)^2=\frac{M}{(2R)^2} \tag{23.39}$$

の関係にある．軌道振動数 Ω を $2\pi/P$ で定義すると

$$R=\left(\frac{M}{4\Omega^2}\right)^{1/3}=\left(\frac{MP^2}{16\pi^2}\right)^{1/3} \tag{23.40}$$

が得られる．これはこの連星系に対するケプラーの法則である[4]．

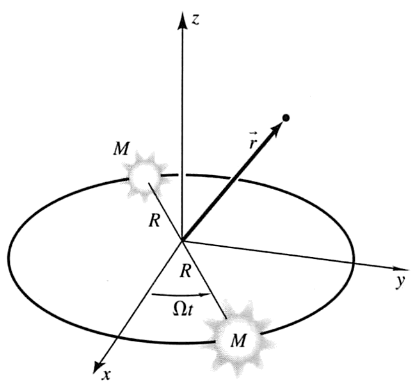


図 23.2 連星系．等しい質量 M の 2 つの星が相互重力のもと x-y 平面で互いに回りあっている．軌道は半径 R の円軌道で軌道振動数は Ω である．我々は，方向 $\vec{r}$ に遠く離れた地点の重力波に関心がある．

[4] これは (3.24) 式ではない．(3.24) 式は 1 つの質量が他よりもかなり重いときに成り立つ．より一般的な形 $\Omega^2a^3=M_{\rm tot}$ の方をよく知っているかもしれない．a は楕円軌道の長軸で，$M_{\rm tot}$ が連星系の質量の和である．

詳しい計算に入る前に簡単な次元解析を順に行ってみよう．まず，波長に対する波源の大きさの比は

$$R/\lambda \sim (M/P)^{1/3} \tag{23.41}$$

によって与えられるが，軌道半径 R が星の半径 R_* よりも大きいという明白な条件から周期に対する制限が課せられる．(23.40) 式から再びこれが

$$P > 4\pi R_*(R_*/M)^{1/2} \tag{23.42}$$

となることがわかり，(23.41) 式から

$$R/\lambda \lesssim (M/R_*)^{1/2} \tag{23.43}$$

となる．しかし，R_* はつねに $2M$（シュワルツシルト半径）よりも大きく，典型的にはずっと大きい．長波長近似は，星が衝突するときを除いて，現実的な連星系に対して確信を持って正しいといえる．

これらの評価を背景に，波の振幅 (23.35) の詳しい計算に戻ろう．仮定する幾何学が図 23.2 にある．一方の質量の軌跡について

$$x(t) = R\cos(\Omega t), \qquad y(t) = R\sin(\Omega t), \qquad z(t) = 0 \tag{23.44}$$

ととる．2 つの質量を含めた質量二次モーメントの成分は (23.34) 式から容易に評価できる：

$$\begin{aligned} I^{xx} &= 2MR^2\cos^2(\Omega t) = MR^2[1+\cos(2\Omega t)] \\ I^{xy} &= 2MR^2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) = MR^2\sin(2\Omega t) \\ I^{yy} &= 2MR^2\sin^2(\Omega t) = MR^2[1-\cos(2\Omega t)] \end{aligned} \tag{23.45}$$

他の成分 I^{zz}, I^{zx}, I^{zy} はすべて 0 である．これを (23.35) 式に代入すると

$$\bar{h}^{ij} \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{8\Omega^2 MR^2}{r}\begin{pmatrix} \cos[2\Omega(t-r)] & \sin[2\Omega(t-r)] & 0 \\ \sin[2\Omega(t-r)] & -\cos[2\Omega(t-r)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23.46}$$

となる．放射された波の振動数は軌道周期の 2 倍になる．

ケプラーの法則 (23.40) を使って (23.46) 式から R を消去すると，$\imath$ Boo 系に対して行った粗い評価 (23.37) と同じ形の振幅が得られる．(23.37) 式がこの詳しい分析とほぼ 1/5 倍違うことから，数億ドルの実験の計画をこのような粗い計算に基づいてはいけないことがわかる．

含まれている関数に角度依存性がないため，漸近的な重力波振幅 (23.46) は球対称である．実際，波の偏極とエネルギーフラックスの方向依存性にすべての情報が含まれている．大きな r に対して，どんな方向でも波 (23.46) が小さい立体角で平面波にうまく近似できるので計算は容易となる．したがって第 16 章の平面波に対する偏極とエネルギーフラックスの分析が適用できる．

第 16 章で平面重力波がトランスバーストレースレス（TT）ゲージ [(21.69) 式を参照] ではっきり現れることをみた．トランスバーストレースレスゲージを使って，1 周期に渡って時間平均した

偏極のエネルギーフラックスを求めることができる [(16.22) 式を参照]．(23.46) 式からどの方向で近似された平面波も TT ゲージである必要はないが，第 21 章で考察したアルゴリズムを使ってそのゲージに当て嵌めることができる [(21.70) 式を参照]．つまり，非トランスバース成分を 0 にして，トレースを引き去るだけである．TT ゲージへの変換は方向が違えば違ってくるもので，放射の角度成分がどうなるかである．2 つの方向だけを考えることで説明する．

例 23.3. 2 方向における連星系からの重力波　軌道面に垂直に． 図 23.3 で説明したように軌道面に対し垂直に z 方向に伝わる放射に注目しよう．(23.46) 式はすでに z 方向に伝わる波に対してトランスバーストレースレスの形になっている．波は (21.69) 式で表された形をしており，位相が 90° ずれた 2 つの線形偏極を等しく重ね合わせたものになっている[5]．

重力平面波のある線形偏極における時間平均エネルギーフラックス f_{GW} は，16.5 節で，$f_{GW} = \omega^2 a^2/(32\pi)$ で与えられた [(16.22) 式を参照]．ω は振動数であり，a は振幅である．(23.46) 式から，2 つの線形偏極のどちらでも，波の振動数 ω が 2Ω であり，その振幅 a が $-8(\Omega^2 MR^2)/r$ であることがわかる．z 軸周りで立体角[6] $d\Omega_{\rm sa}$ に放射される重力波の光度 L_{GW}（エネルギー/時間）は $r^2\Omega_{\rm sa} f_{GW}$ である．したがって 2 つの偏極の両方から z 方向における時間平均角度微分光度 $dL_{GW}/d\Omega_{\rm sa}$ は

$$\left(\frac{dL_{GW}}{d\Omega_{\rm sa}}\right)_{z\,\text{方向}} = 2(r^2)\frac{(2\Omega)^2}{32\pi}\left(\frac{8(\Omega^2 MR^2)}{r}\right)^2$$
$$= \frac{16}{\pi}(\Omega^3 MR^2)^2 = \frac{16}{\pi}4^{1/3}\left(\frac{\pi M}{P}\right)^{10/3} \tag{23.47}$$

である．ここで先頭に係数 2 があるのは (23.46) 式の 2 つの線形偏極が等しく貢献しているためである．軌道半径と軌道周期をつなぐケプラーの法則 (23.40) を使って，上式の 3 番目の式を導いた．

軌道面内で． x 軸に伝わる放射は (23.46) 式で代表されるが，トランスバーストレースレスゲージにはなっていない．縦の xx, xy 成分を 0 にし，(21.70) 式のようにトレースを取り去ると，x 方向に適したトランスバーストレースレス形

$$\bar{h}^{ij}_{TT} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{4\Omega^2 MR^2}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[2\Omega(t-r)] & 0 \\ 0 & 0 & -\cos[2\Omega(t-r)] \end{pmatrix} \tag{23.48}$$

が得られる．これは線形偏極であり，(21.69) 式で代表されるもののうちの 1 つである．

ここには 1 つの線形偏極しかなく，先に議論した z 方向の波の振幅よりも 2 倍小さくなっているので，エネルギーフラックスは z 方向の波 (23.47) よりも 8 倍小さい：

$$\left(\frac{dL_{GW}}{d\Omega_{\rm sa}}\right)_{x\,\text{方向}} = \frac{2}{\pi}(\Omega^3 MR^2)^2 = \frac{2}{\pi}4^{1/3}\left(\frac{\pi M}{P}\right)^{10/3} \tag{23.49}$$

---

[5] 実は，これは円偏極である．図 16.2 に示したように，波が通り過ぎる面の粒子の楕円が波に反応して角振動数 2Ω で回転する．楕円上の個々の粒子は中心の周りを回転していない．それどころか，全体のパターンが回転するように，中心からのずれが小さな円上を回転している．（問題 16.9 を見よ）

[6] おかしな記号 $d\Omega_{\rm sa}$ をここで使っている．立体角と軌道振動数 Ω を混同しないためである．

よって，偏極とエネルギーフラックスは角度とともに変化する．放射された仕事率の完全な角度分布は問題 9 を解くことで求められる．

23.6 重力波によるエネルギー損失の四重極公式

重力波は放射系からエネルギーを運び去る．例 23.3 の 2 つの特別な場合で行ったように，いろいろな方向のエネルギーフラックスを計算し，立体角で積分することにより，弱場長波長近似で重力波として失う全エネルギー損失率の便利な式を得ることができる．これは，全重力波放射率に対して，短くてわかりやすくするという理由で**四重極公式**と呼ばれる．導出を略すのは，難しいからではなく，長いという理由からである．この導出の補足は本書のウェブサイトにある．実際，我々がすでに知っている数個の簡単な事実からだけで，四重極公式の形が求められると予想できる．

(23.35) 式は質量 2 次モーメント I^{ij} の 2 階微分として波源からずっと離れた重力波の振幅を与える．エネルギーフラックスが波の振幅の 2 次式であることを期待し，平面波のエネルギーフラックスの式 (16.22) でそうであることが確かめられる．重力波の光度 L_{GW}（全放射エネルギー発生率）は I^{ij} とその時間微分の 2 次の形をしているはずである．時間微分の数は，次元解析で決められる．幾何学単位系で，$L_{GW} = d(\text{エネルギー})/d(\text{時間})$ は無次元量である．I^{ij} の 3 階微分は無次元量であるため，L_{GW} は $\dddot{I}^{ij}$ の 2 次式でなければならない．別の考え方では，(23.35) 式の波の振幅は $\ddot{I}^{ij}$ に比例し，エネルギーフラックス (16.22) には ω^2 がつくために，$\ddot{I}^{ij}$ の 2 つの因子にそれぞれもう一度時間微分をする必要があることを指摘することができる．L_{GW} も空間回転のもとでスカラーのように振る舞うため，$\dddot{I}^{ij}$ の 2 次のスカラー結合でなければならない．その結果，たった 2 つの可能性しかなく，それは $\dddot{I}_{ij}\dddot{I}^{ij}$ または $(\dddot{I}^{k}{}_{k})^2$ である．正確な組み合わせは，球対称系から放射が出ないこと，つまりエネルギー損失がないことから決まる．球対称系では x, y, z はすべて同等で，$I^{ij} \propto \delta^{ij}$ である．組み合わせ

質量四重極モーメント

$$\boxed{\mathcal{I}^{ij} \equiv I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} I^{k}{}_{k}} \tag{23.50}$$

は**四重極モーメントテンソル**と呼ばれ[7]，球対称の場合は 0 になる．したがって L_{GW} は $\dddot{\mathcal{I}}_{ij}\dddot{\mathcal{I}}^{ij}$ に比例しなければならない．係数は $\frac{1}{5}$ であることがわかっている．よって四重極公式は

重力波で放出される全放射率

$$\boxed{L_{GW} = \tfrac{1}{5}\left\langle \dddot{\mathcal{I}}_{ij}\dddot{\mathcal{I}}^{ij} \right\rangle} \tag{23.51}$$

となる．ここで $\langle \ \cdot \ \rangle$ は 1 周期にわたって時間平均をとることを表す．この式は幾何学単位系で書かれている．$(c \neq 1, G \neq 1)$ の $\mathcal{MLT}$ 単位系で，重力波の光度 L_{GW}（エネルギー/時間）は

$$L_{GW} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\left\langle \dddot{\mathcal{I}}_{ij}\dddot{\mathcal{I}}^{ij} \right\rangle \tag{23.52}$$

によって与えられる．もし電磁気学を習っていれば，(23.6) 式が放射発生率の式の重力波版になっ

---

[7] 四重極モーメントテンソルには他にも記法があるが，すべて (23.50) 式に比例する．

ていることに注意しておくとよいだろう．ただし，電磁気の場合，最低次を与えるのは四重極ではなく，双極子である．

四重極公式を，連星系によって重力波で放出されるエネルギー発生率を求めるのに直ちに使うことができる．I^{ij} の成分は (23.45) 式で与えられる．トレース $I^k{}_k = 2MR^2$ はこの場合時間に依存せず，I_{ij} と I_{ij} の時間微分は一致する．(23.45) 式の I^{ij} の各成分を時間について 3 階微分し，2 乗して和をとる．時間平均すると係数 1/2 がでてくる．L_{GW} の結果は

$$L_{GW} = \frac{128}{5} M^2 R^4 \Omega^6 \tag{23.53}$$

である．R をケプラーの法則 (23.40) を使って表すこともでき，その結果

$$L_{GW} = \frac{128}{5} 4^{1/3} \left(\frac{\pi M}{P}\right)^{10/3} = 1.85 \times 10^3 \left(\frac{M}{P}\right)^{10/3} \tag{23.54}$$

となる（1.85×10^3 の数値は，2 や π などの係数を無視した次元解析をすると，時として全く違った結果になってしまうことを表している）．G や c を入れて，これを $\mathcal{MLT}$ 単位系で書くことができる．付録 A から $M \to GM/c^2$, $t \to ct$, $P \to cP$ とすると

$$L_{GW} = \frac{128}{5} 4^{1/3} \frac{c^5}{G} \left(\frac{\pi G M}{c^3 P}\right)^{10/3} \tag{23.55}$$

となり，数値的に

$$L_{GW} = 1.9 \times 10^{33} \left(\frac{M}{M_\odot} \frac{1\mathrm{h}}{P}\right)^{10/3} \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}} \tag{23.56}$$

となる．電磁波における太陽光度は $3.9 \times 10^{33}\mathrm{erg/s}$ である．典型的な星の質量をもつ短い周期の連星は，重力波において極端に暗いわけではない．重力が物質と弱く結合していることが重力波の発見を困難にしている唯一の理由である．

23.7 連星パルサーで検出された重力波の効果

重力波の放射により，連星系のエネルギーと角運動量は減っていくことになるだろう．特に軌道周期 P（11.3 節では P_b と呼んでいた）が変わる．前節で考えた等質量円軌道の例で変化率を評価することができる．非相対論系で十分正しいニュートン近似で，そのエネルギーは [図 23.2 を参照] で

$$E_{\mathrm{Newt}} = 2\left(\frac{1}{2}MV^2\right) - \frac{M^2}{2R} \tag{23.57}$$

である．V は軌道上の速さである．ニュートンの法則 (23.39) を使って，V と R を関係づけ，R と P をケプラーの法則 (23.40) で関係づけると

$$E_{\mathrm{Newt}} = -\frac{M^2}{4R} = -\frac{1}{4} M \left(\frac{4\pi M}{P}\right)^{2/3} \tag{23.58}$$

が得られる．軌道回転する星が束縛されているため，ニュートン的エネルギーは負である．したがって E_{Newt} が減少することは周期 P が減ることになる．P が小さくなるとさらに負の（低い）

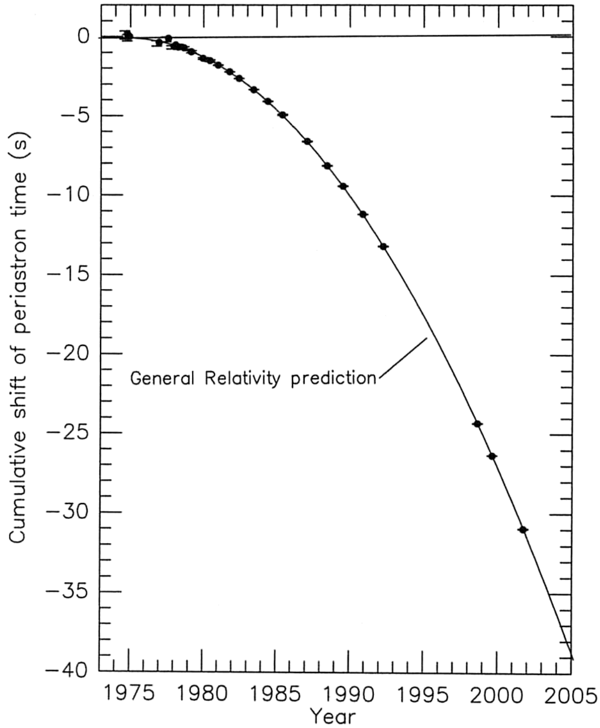


図 23.3 連星系から発生した重力波の効果の検出．連星パルサー PSR B1913+16 は互いに相互軌道上を運動する中性子星の組である．重力波の放射により軌道半径は小さくなっている [(23.59) 式を参照]．軌道周期の減少の測定をするには，近星点までの時刻が時間とともに常に減少するかどうか調べればよい．近星点とはパルサーが伴星に最も近づく位置のことである．図は，テイラー（J.Taylor）とワイズバーグ（J. Weisberg）によってプエルトリコのアレシボ電波望遠鏡（図 11.9）で測定されたずれの集積値を表している．実線は，重力波放出の結果として一般相対論によって予言されたずれである．1/3 パーセントよりもよく，一致している．したがって，地上ではまだ直接受信されていないが，重力波の効果は宇宙で検出されていることになる．

エネルギーになる．(23.58) 式を t で微分し，$dE_{\rm Newt}/dt$ と (23.54) 式の $-dL_{GW}$ を等号で結ぶと，P が減少する時間的割合を表す以下の公式が得られる：

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5}\pi 4^{1/3}\left(\frac{2\pi M}{P}\right)^{5/3} \tag{23.59}$$

数値を代入すると

$$\frac{dP}{dt} = -3.4 \times 10^{-12}\left(\frac{M}{M_\odot}\frac{1{\rm h}}{P}\right)^{5/3} \tag{23.60}$$

となる．これは無次元量である．

11.3 節で考察した連星パルサー PSR B1913+16 では，パルサーの質量と見えない伴星の質量はともに約 $1.4M_\odot$ で，軌道周期は 7.75h である．重力波が放出されることによって，軌道周期が減少することは (23.60) 式から評価することができ，年に 10μs のオーダーになる．ただし，実際の軌道は，ここで仮定した円ではない．しかし，パルサーからの信号の到達時間の測定があまりに正確なため，ゆっくりとした軌道周期の減少の効果は検出することができる．数年にわたる測定から PSR B1913+16 の dP/dt は 1984 年 7 月 7 日 約 6 時 GMT で $(-2.422 \pm 0.006) \times 10^{-12}$ であった．数十年間におよびテイラーとワイズバーグが軌道周期の変化を測定した結果を図 23.3 に示してある．軌道周期における減少の観測値とアインシュタインの一般相対論の重力波による減少の予測値は 1/3% よりよい精度で一致している．こうして重力波の効果は検出されている．

23.8 強い波源への期待

重力波の振幅を評価または計算するために (23.35) 式のような関係をどのように使うか理解することと同時に，それが使えない場合を理解することも重要である．その式は 2 つの重要な仮定のもとで導出された．(1) 時空のどこでも曲率が小さいことが仮定され，線形重力を使うことができた．(2) エネルギーの中で静止質量が優勢で，速度が光速よりかなり小さい非相対論物体を仮定した．このことから線形アインシュタイン方程式 (23.21) の一般解に長波長近似が使えた．しかし，宇宙で最も重要な重力波源はこれらの基準を満たしていない．2 つの衝突するブラックホールや超新星崩壊の時空中では曲率も速度も典型的に小さくはない．

大きく速く変化する時空曲率から放たれる重力波を正確に計算するには詳細にわたる数値シミュレーションを行う必要がある．しかし，四重極公式は，例 23.4 のように，期待できそうな放射量を粗いべき計算で次元解析するときの目安として使える．

例 23.4. 合体ブラックホールから放射される重力波の評価　すべての十分重い銀河には中心にブラックホールが存在するという証拠がある．すべての銀河はその歴史の中で少なくとも一度は他の銀河と合体しているという証拠もある．中心のブラックホールも合体したことになる．このような事象からどの程度の重力波光度のピーク値を期待できるだろうか．ほぼ同じ質量 M の 2 つのブラックホールの衝突は弱い曲率では特徴づけられないが，四重極公式に基づいた簡単な次元解析からアイディアが得られる．この問題のすべてのスケールは M とブラックホールの大きさ，崩壊の時間スケールの値で決まる [(9.40) 式を参照]．エネルギー放射率 L_{GW} は幾何学単位では無次元なので，1 のオーダーであると期待される．たぶん，慎重に，$L_{GW} \sim \varepsilon$ とした方がよいかもしれない．ε は合体の幾何学に依存する効率因子で 1 よりも小さいが小さ過ぎない値である．四重極公式 (23.6) にいろいろな要因を考慮しても同じ結果になる．$\mathcal{MLT}$ 単位系に変換すると

$$L_{GW} \sim \varepsilon(c^5/G) \sim \varepsilon 10^{59}\text{erg/s} \tag{23.61}$$

となる（付録 A を見よ）．執筆時で予備段階の数値シミュレーションから，ε は 10^{-2} であるようだ．光度 (23.61) がどんなに大きいかよく理解するために，典型的な可視光度と比較しよう．太陽の光度は $\sim 10^{33}$erg/s で，大きな銀河の全光度は $\sim 10^{44}$erg/s であり，大きな電波源の光度は 10^{48}erg/s にまで及び，最も明るいガンマ線バーストは $\sim 10^{52}$erg/s である．実際，ある単純な状

況で c^5/G は物理的光度のほぼ最大値である（問題 18）．衝突している 2 つの銀河中心で 2 つの $10^9 M_\odot$ ブラックホールが合体すると，数日の時間スケールで (23.61) 式のピーク光度ができるかもしれず，したがって宇宙で一時的に最も明るい事象になるかもしれない．数値シミュレーションはこのような大雑把な予測に確固たる理由づけをすることができ，宇宙空間の重力波検出器は観測的にチェックできるだろう．

時間依存する四重極モーメントを与える質量を使って，これらのような評価するときには細心の注意を払わなければならない．たとえば，10 億太陽質量ブラックホールへ球対称崩壊するとき，ε は正確に 0 である．評価は有効だが，詳しい計算の代わりにはなりえない．

問題

1. 例 21.5 で Φ が真空ニュートン方程式 $\nabla^2\Phi = 0$ を満たすとき，真空線形重力方程式が時間独立な静的弱場計量 (21.25) に対して成り立つことを示した．Φ が発生源付きのニュートン方程式 $\nabla^2\Phi = 4\pi\mu$（幾何学単位系）を満たすとき，非相対論的発生源があるときの線形重力の方程式に対しても同じように成り立つことを示せ．
2. [C] 球対称物体がゆっくり一様回転することよってつくられる計量摂動の (23.28) 式が，発生源の大きさに比べて大きな r の値の場合にだけ求められた．回転物体の外側のすべての r で成り立つこを示せ．
3. (23.22) 式からローレンツゲージ条件 (23.23) を途中計算を省かずに導出せよ．
4. (23.25) 式から ゆっくり回転する物体外部の計量 (23.28) をすべての段階を省かずに導出せよ．
5. [E] 地球でときどき起きる核爆発は LIGO 重力波検出器によって検出できるほど十分大きな振幅を発生させられるだろうか．この質問に答えるため，このような爆発で生じると考えられる h を評価し，将来の LIGO 検出器で期待される $h \sim 10^{-22}$ の精度と比較せよ．（大きな核爆発は TNT 爆薬の 20 メガトン分ある．1 メガトンの TNT 爆薬は 4.2×10^{22}erg に相当する）
6. [C] **双極子重力波は存在しない**
   (a) 23.4 節では計量摂動の $\bar{h}^{t\alpha}$ 部分の大きな r における振る舞いを考察しなかった．長波長近似でこれらは
   $$\bar{h}^{t\alpha} = 4P^\alpha/r$$
   となることを示せ．ここで P^α は物質の全エネルギー運動量 4 元ベクトルである．議論を簡単にするために，物体の応力エネルギーテンソルが，1 よりかなり小さい速度で，非相対論的形式 $T^{\alpha\beta} = \mu u^\alpha u^\beta$ であると仮定する．
   (b)
   $$\bar{h}^{ti} = 4\dot{p}^i/r$$

を示せ．ここで $\vec{p}$ は質量双極子

$$\vec{p} = \int d^3x\, \mu(x)\vec{x}$$

である．質量双極子はニュートン力学で他にどんな重要な量と関連があるか．

(c) 他の慣性系へローレンツ変換することによって質量双極子の項が 0 にできること，つまり重力波放射に寄与しないことを議論せよ．ローレンツ変換の速度と方向を求めよ．

7. 遠距離重力波の振幅 (23.35) を (23.30) 式から途中計算を省かずに求めよ．

8. 2 つの同じ質量の星が描く円軌道面に垂直な軸に対して 45° の角度でやってくる重力波は 2 つの偏極 + と × がどのような組み合わせになっているか．

9. [C] **連星系から放射された重力波エネルギー発生率の角度分布**　例 23.3 で，連星系から放射された重力波の時間平均エネルギー発生率を 2 つの方向について計算した．1 方向は軌道面に垂直で，もう 1 方向は軌道面内にある．この問題は，完全な角度分布（アンテナパターン）を求めることにある．時間平均した波源が軸対称なので，時間平均分布は回転軸に対して対称になるだろう．したがって，z 軸に対して角度 θ をなす方向に放射されるエネルギー発生率だけを計算する必要がある．便宜上 計算する方向は y-z 面にとる．以下にしたがって答えよ．

(a) 空間座標を x 軸周りに角度 θ 回転し，新しい z 座標がもとの座標について角度 θ なすようにする．重力波の振幅 (23.46) をこの座標系に変換せよ．

(b) 新しい z 方向に伝わる近似的な平面波を TT ゲージで表せ．

(c) 新しい z 方向のエネルギー放射率を計算し，それにより，θ の関数として求めよ．得られた答えが例 23.3 の 2 つの特別な場合と一致することをチェックせよ．アンテナパターンの概形を描け．

(d) 放射率の角度分布を積分して全放射率を求めると，(23.53) 式で引用された四重極公式のものと同じになるか．

10. 質量の無視できるばねの両端に 2 つの等しい質量がつけられている．ばねの自然長は L で，ばね定数は k である．重心が動かないようにして質量が振幅 A でばねの方向に振動し始める．ばねの重心から遠く離れたところに伝わる重力波として 0 でない A の最低次まで，振幅をばねの軸から角度 θ の関数として計算せよ．放射の偏極を分析せよ．重力波で放射されるエネルギー放射率の角度分布を計算せよ．

11. 質量 m の粒子が z 軸上を $t=-T$ から $t=+T$ の間で $z(t)=(1/2)gt^2$ にしたがい，それ以外の時刻で一定の速さで運動している．正の z 軸に沿って遠い距離 L で重力波計量摂動を (23.21) 式のローレンツゲージを使って計算せよ．z 軸に合うように TT ゲージで同じ摂動を求めよ．x 軸の正に放出された重力波の放射率を評価せよ．

12. 質量が各々 $1.4M_\odot$ で，互いに円軌道にある 2 つの中性子星からなる連星系がある．宇宙が終焉を迎える直前に合体するとしたとき（約 150 億年後と仮定する），**ちょうど今**発生している重力波の最も長い周期はどれだけか．

13. **重力波による角運動量損失**　ニュートン物理学で，角速度 Ω で主軸の周りに剛体回転して

いる軸対称物体が以下に示した運動エネルギー E と主軸回りに角運動量 J を持っている：

$$E=\frac{1}{2}I\Omega^2, \qquad J=I\Omega$$

ここで I は主軸回りの慣性モーメントである．これが線形重力に対して正しいと仮定して 23.5 節で考察した連星系が 1 周期当たりに重力波で角運動量を失う平均変化率を計算せよ．

14. [C] **重力波反作用**　質量 m の粒子が，作用する力のために運動し，重力波を放出している．粒子の速度は光速よりも小さいとし非相対論が使えるとする．粒子が重力波でエネルギーを失う割合が時間平均的な意味で同じであり，あたかも重力波反作用力

$$F_i^{\text{rad. react.}}(t)=-\frac{2}{5}m\frac{d^5 I\!\!\!-_{ik}(t)}{dt^5}x^k(t),$$

を受けていることを示せ．ここで x^i は通常の直交座標で粒子の位置を表し，$I\!\!\!-_{ij}$ は (23.50) 式で与えられる四重極モーメントである．電磁気学をよく理解できていれば，この力と電磁気学の放射反作用力と比較せよ．

15. [E] 地球に対する月の運動の月レーザー測距測定から，1 日の長さが 1 世紀当たり 2 ミリ秒長くなっていると推測されている．地球からの重力波が地球の回転率の遅延に重要な寄与をしているか，無視できるか評価せよ．

16. 幅より長い，質量 M, 長さ L の鋼鉄製の梁が長さ方向に対して垂直に角振動数 Ω で重心まわりを回転している．どんな条件のもとでなら，全エネルギー発生率の四重極公式が使えるか．その条件を仮定し，重力波で放射されるエネルギー発生率を計算せよ．もし梁が drag free 衛星内にあれば，1 年間回転すると角振動数の減少の予測値はいくらになるか．

17. [E] 質量 m の小さい物体が静止した状態から質量 M の大きなブラックホールに落ち込んだとき重力波が突発的に発生する．このバーストの持続時間と，重力波光度のピーク値を評価し，全放射率を小さい物体の静止質量の比として求めよ．$10M_\odot$ ブラックホールが我々の銀河の $\sim 10^6 M_\odot$ ブラックホールに落下するとき，発生する重力波のピーク光度を求めよ (13.2 節)．これを全銀河の可視光光度とどのように比べたらよいか．

18. [E] **最大光度**　半径 R の球対称星の中心にある放射の点源を想像しよう．波源の光度は L（エネルギー/時間）であり，時間的に一定であると仮定する．ニュートン物理学を使い，以下にしたがって最大光度を求めよ．
    (a) 星の内側における放射のエネルギー密度を計算せよ．
    (b) シュワルツシルト半径の内側に星があるとき最大値 L を評価せよ．
    (c) 最大光度を，2 つのブラックホールの合体から発生する光度の評価値 (23.61) と比べよ．

19. [E,C] **超重量ブラックホールからの重力波**　(1) すべての銀河には $10^9 M_\odot$ のブラックホールがあり，(2) すべての銀河はその寿命内に 1 度衝突し，(3) そのとき，そのコアにあるブラックホールは合体することを仮定する．このような事象から発生する重力波を検出するために検出器を建設することを考えよう．実際には適用できなくても，線形重力の結果を使って
    (a) 検出器が作動しなければならない振動数領域を評価せよ．
    (b) 見える宇宙の端 $\sim$ 1Gpc で起きる衝突を見るのに必要なひずみ感度を評価せよ．

(c) 通常の単位でこのような事象が続く時間を評価せよ.

(d) このような事象が検出できる頻度を評価せよ.

第 24 章

相対論星

ほとんどの星は重力の崩壊力に対して高温ガスの圧力で星自身を支えている．定常状態において放射によるエネルギー損失は，原子核が結合しエネルギーを解放する熱核反応によって供給されている．たとえば太陽のエネルギーは 4 つの水素原子核（4 つの陽子）が結合し 1 つのヘリウム核ができる反応で解放されるエネルギーを源としている．

第 12 章で述べたように，最終的に星のコアは熱核反応の燃料を使い果たすだろう．そのときに 2 つの終末点のどちらかに至る．(1) ブラックホールに至る重力崩壊と (2) 非熱的圧力源によって重力を支える星．第一の可能性，ブラックホールへの崩壊は第 12 章で述べた．この章では，実在する白色矮星や中性子星で実現されている第二の可能性に進もう．

一般相対論の枠組ですべて理解できるようなブラックホールとは違い，星の進化の終末点に至った星を理解するためには，ある意味，物理学のほとんどすべての分野の知識を必要とする．たとえば，地球が（そして机やイスなどのふつうの物体がそうであるように）重力に抗して支えられている非熱的圧力の最も簡単な例は物性分野の知識が必要だ．これが，この章が最後の章となっている理由である．

この点を強く強調するために，中性子星の表面から中心に穴を開けることを想像しよう．水素とヘリウムの海の下には原子間の量子電気力によって性質が決まる硬い地殻がある．これらは普通の固体の性質を決める力と同じだが，ここでは，それが地上にあるものよりもかなり大きな密度で作用している．

さらに，掘り進めると物体の性質が相対論的電子のパウリの排他原理によって決まる領域に入る．そこでは，相対論的電子は弱い相互作用によって陽子や中性子と平衡状態にある．これらの核子は，地上では自然に存在しないような中性子に富む原子核の中に束縛されている．

さらにもっと深く掘ると，ほとんどすべての電子がなくなってしまう領域に入る．核は分解して，超流核物質になり，その性質は強い相互作用によって決まるが，ここで普通の原子核または地上の研究室で扱える密度を超えている．

こうして表面から中心に掘っていくと，物性物理学から相対論的統計力学，弱い相互作用物理学，原子核物理学，強い相互作用物理学が理解の中心となる領域を通り抜けることになる．量子力学は全体的に重要で，重力はすべてをまとめている．

本書で，星の進化の平衡終末状態を完全に理解するために必要な物理学の領域を紹介することは望むべくもない．しかし，重力物理学の本質的な役割を分離すれば，これらの星の全体的な構造を考察することができる．それができるのは，重力が長距離力であるという重要な事実のためであ

る．物質を支配する力はすべて短距離力である．たとえば核力は 10^{-13}cm のオーダーの距離ではたらくが，典型的な中性子星の半径は 10km のオーダーであり，白色矮星の場合はもっと大きい．電磁気力は正味の電荷がある物質に対して長距離力である．しかし中性子星と白色矮星ができている物質は電気的に中性であり，長距離電磁気力は効率よく遮蔽される．

力の範囲の差から，中性子星と白色矮星の大雑把な構造に関して，物質の性質は理想流体の圧力 p と密度 ρ の関係を与える**状態方程式**によってまとめられる．星の進化の平衡終末点を理解する作業は 2 つの部分に分けられる：(1) 熱核進化の終点で物質の状態方程式を計算すること，(2) これらの物質から作られる星がどのように重力で集まりあっているのかを計算することである．以下では (1) の結果を単にレポートするだけだが，(2) に関しては導出する．我々は圧力の非熱源の最も簡単な例から始めることにする．

24.1　パウリ原理の威力

単純だが，非常に重要な非熱的圧力源の例はパウリの排他原理から生じるフェルミ圧である．パウリ原理は，総称的に**フェルミオン**と呼ばれる半整数スピンをもつ全く同じ粒子（電子や陽子，中性子のような粒子）に許される量子状態を制限するものである．パウリ原理は 2 つの全く同じフェルミオンが同じ量子状態をとることを禁止している．パウリ原理は原子の構造や化学的性質に決定的な役割を果たしている．そのため，原子の最低エネルギー状態で，電子は原子核近くの最低エネルギーにあるのではなく，より高いエネルギーレベルの**殻**にも配列されるという特殊な状況になる．事実上，パウリ原理が原子の外側の電子を原子核による電気的な引力に逆らって支えている．パウリ原理が重力の引力に逆らって星をどのように支えているのかをみることにしよう．

パウリ原理の作用を理解するために，箱の中にあるスピン 1/2 の全く同じフェルミオンの気体を考えよう．フェルミオンは**ゼロ温度**にあり，気体は最低エネルギー状態にあると仮定しよう．フェルミオンのこのようなガスは**縮退**しているといわれる．零度であっても，フェルミオン間に相互作用ポテンシャルがなくてもパウリ原理から圧力が生じる．本質的なアイディアは 1 次元で理解することができる[1]．

まず，$x=0$ から $x=\mathcal{L}$ に広がっている 1 次元の箱の中で運動している質量 m の 1 **個**のフェルミオンの状態を考えよう（図 24.1）．簡単のため，しばらくフェルミオンは**非相対論的**であると仮定する．この箱の中でとり得るエネルギーレベルは量子化され

$$E_k=\frac{1}{2m}\left(\frac{k\pi\hbar}{\mathcal{L}}\right)^2\equiv\frac{p_k^2}{2m},\qquad k=1,2,\dots \tag{24.1}$$

となる．ここで p_k は運動量の大きさで

$$p_k\equiv\frac{k\pi\hbar}{\mathcal{L}},\qquad k=1,2,\dots \tag{24.2}$$

に等しい．これらは，粒子が非相対論的かどうかに関係なく，運動量に許された値であることがわかる．

[1] 以下の考察は非常に初歩的な量子力学を仮定している．もしよくわからなければ，より詳しいウェブサイト上の増補で見ることができる．そうでなくても基礎的な量子力学の教科書を学習して知ることもできるし，結果だけを仮定して次節にとんでもよい．

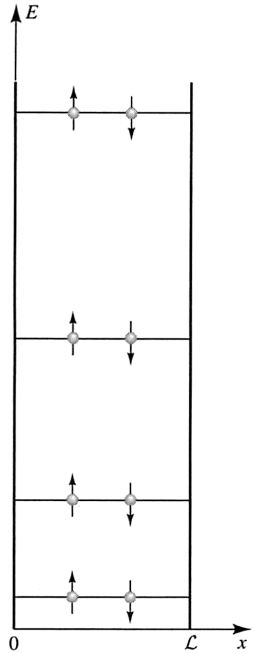


図 24.1 相互作用しないフェルミオン 8 個が入った，長さ $\mathcal{L}$ の 1 次元の箱のエネルギーレベル．1 個の粒子が入れるエネルギーレベルは不連続である．フェルミオン 8 個のエネルギー最低状態には，最低レベルにスピンが互いに逆になった 2 つのフェルミオンがあり，次に低いレベルに 2 つあり，このように続いていく．2 つのフェルミオンが同じ状態を占有しない最低エネルギー状態になっており，これはパウリ原理から要請されるものである．箱の粒子が排他原理にしたがわなければ，エネルギー最低状態は，1 粒子最低レベルの中に 8 個すべてのフェルミオンが入ることになるだろう．

1 粒子が入っている箱の最低エネルギー状態は，その粒子を最低の 1 粒子エネルギー固有状態 $k=1$ におくことで得られる．しかし，$\mathcal{N}$ 粒子の入った箱エネルギー最低状態はパウリ原理を考慮しなければならない．たとえば $\mathcal{N}$ が偶数であることを仮定し，ある時刻で箱に 1 粒子を入れ，1 粒子固有状態の最低状態にさらに 1 粒子加えることを想像しよう．スピン 1/2 粒子は 2 つのスピン状態をもつ．最初の 2 粒子は最低エネルギー（$k=1$）の 1 粒子状態に入れることができるが，次の 2 粒子は次の 1 粒子のエネルギーの高い状態（$k=2$）に入れなければならない．このように入れていく．最後の 2 つの粒子を含む運動量の最高状態は**フェルミ運動量** p_F と呼ばれる．よって，$\mathcal{N}$ 粒子の入った箱の最低エネルギー状態は

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}/2} (2E_k) \tag{24.3}$$

となる．

(24.3) 式にあるような和は，実在する気体または星を特徴づけるような，$\mathcal{N}$ が非常に大きな数の場合には積分に置き換えることができる．運動量 p の大きさを 0 から p_F までの積分として置き換えておくと便利である．(24.2) 式は，p のすべての間隔 $\pi\hbar/\mathcal{L}$ に対して 1 粒子が存在することを表している．よって，興味のある和は，$F(p)$ がどんな関数でも

$$2\sum_{k=1}^{\mathcal{N}/2} F(p_k) \approx 2\frac{\mathcal{L}}{\pi\hbar}\int_0^{p_F} dp\ F(p) \tag{24.4}$$

である．$(\mathcal{L}/\pi\hbar)$ の因子は運動量の大きさの状態密度である．

我々は 1 次元ではなく 3 次元にいる．大きさ $\mathcal{L}$ の立方体中で運動する自由粒子のエネルギー固有状態は運動量の 3 成分 (p^x, p^y, p^z) の大きさで特徴づけることができる．これらの成分は (24.2) 式のような規則にしたがって量子化される．p^x, p^y, p^z の正の値で張られる 3 次元運動量空間の状態密度は $(\mathcal{L}/\pi\hbar)^3$ である．$\mathcal{N}$ 個のフェルミオン系のエネルギー最低状態では，これらすべての状態が，ある半径 p_F の運動量空間で満たされている．

これらのアイディアを，$\mathcal{N}$ 個の全く同じフェルミオンガスのフェルミオン運動量 p_F を求めることで説明しよう．全粒子数 $\mathcal{N}$ は半径 p_F の球の内部にある p^x, p^y, p^z がすべて正である状態の和の 2 倍でなければならない：

$$\mathcal{N} = 2\left(\frac{\mathcal{L}}{\pi\hbar}\right)^3 \frac{1}{8}\int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp \tag{24.5}$$

ここで， p が正である運動量空間の 8 分球にわたって積分することから，球全体の積分に 1/8 がかけられている．これから粒子数密度 $n = \mathcal{N}/\mathcal{L}^3$ と p_F をつなぐ関係が得られる：

$$n = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{24.6}$$

フェルミ波長 $\lambda_F \equiv 2\pi\hbar/p_F$ を導入すれば，粒子数密度は $n = 8\pi/3\lambda_F^3$ と書くことができ，フェルミオン 1 個は特徴的な大きさ λ_F の体積に閉じ込められることがわかる．これは，239 ページのボックスでフェルミ圧によって支えられる星の最大質量を評価するときに使った関係である．もうすぐ我々は最大質量の定量的な導出することにする．

同じような方法で，気体のエネルギー密度 ρ を運動量の関数として表したエネルギー（$E(p) = (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$）によって (24.5) 式の積分に重みをつけて計算することができる（これまでみてきた他の公式との比較のために c をつけている）．結果は積分の上限 p_F に依存するであろうが，それは (24.6) 式を使うことで， n で表し直すことができる．積分は難しくなく，非相対論的極限では特に簡単になる．この場合 $E(p) \approx mc^2 + p^2/2m$ であり，超相対論的極限では $E(p) \approx pc$ になる．これらの極限で

$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)n^{5/3} \qquad \text{(非相対論的)} \tag{24.7a}$$

$$\rho = \frac{3}{4}(3\pi^2)^{1/3}(\hbar c)n^{4/3} \qquad \text{(相対論的)} \tag{24.7b}$$

となる．圧力を計算するために，0 度における熱力学第一法則を使う．これは，フェルミオンの数 $\mathcal{N}$ を固定したまま，箱の全エネルギーの変化 $\Delta\mathcal{E}$ と体積の変化 $\Delta\mathcal{V}$ の関係を与えるものである．具体的には

$$\Delta\mathcal{E} = -p\Delta\mathcal{V} \tag{24.8}$$

であり，ここで p は圧力である（圧力の p を運動量の p と混同しないように注意せよ．両方とも p を使うのが標準的である）．$\mathcal{E} = \rho\mathcal{V}$ と，$\mathcal{V} = \mathcal{N}/n$ であることに注意すると，$p = n(d\rho/dn) - \rho$ であり，(24.7) 式とともに

縮退フェルミ粒子の状態方程式

$$p = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)n^{5/3} \qquad (\text{非相対論的}) \tag{24.9a}$$

$$p = \frac{1}{4}(3\pi^2)^{1/3}(\hbar c)n^{4/3} \qquad (\text{相対論的}) \tag{24.9b}$$

を導く．

粒子数密度 n はエネルギー密度 ρ の (24.7) 式と圧力の (24.9) 式から消去することができ，0 度で相互作用しないフェルミオンの状態方程式 $p = p(\rho)$ になる．その結果は図 24.2 にグラフとして表してある．以下で，この単純な状態方程式を使って，この非熱的圧力源が相対論的重力の引力とどのようにバランスをとり，平衡状態の星の族ができるのかを説明する．

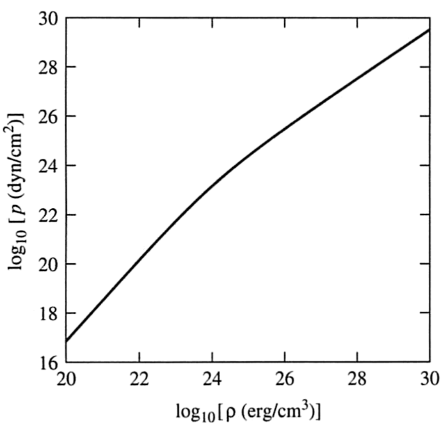


図 24.2　相互作用しない電子ガスの 0 度における状態方程式．圧力 p（dyn/cm^2）を縦軸，エネルギー密度（erg/cm^3）を横軸として，両-対数グラフにプロットした（これらは同じ単位であるが，表現が違っている）．これは圧力がパウリ排他原理からどのように生じているのかを表している．電子の圧力は，非相対論的気体の状態方程式から，相対論的状態方程式へ徐々に変化していている．

24.2　相対論的静水圧平衡

この節では，重力の圧縮力とそれに抗する圧力の間で平衡状態にある相対論星の性質を決める構造方程式を示す．前節で表されたような状態方程式 $p = p(\rho)$ が与えられていると仮定する．

簡単のため，回転していない球対称星だけを考察する．星の外側の幾何学はよく知られたシュワルツシルト計量 (9.9) で表されている：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{24.10}$$

ここで M は星の全質量である．しかし星の構造を決めるため，内側の計量も同様に知る必要がある．

例 21.4 で，どんな球対称時間独立計量も，r だけに依存するある関数 $\nu(r)$ と $\lambda(r)$ に対して

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{24.11}$$

の形になるように座標 (t, r, θ, ϕ) を選べることを示した．シュワルツシルト計量はこの形をしている．この形の計量は星の外側と同様に内側でも成り立つ．

星を構成している物質は 22.2 節で述べた完全流体の応力エネルギーテンソルにしたがうと仮定している．(22.39) 式で与えられる応力エネルギーは，エネルギー密度 ρ と流体の圧力 p, 流体 4 元速度 $\mathbf{u}$ に依存する．星の物体は静止しているので，$\mathbf{u}$ の空間部分は 0 になり，規格化された $\mathbf{u}$ は $u^\alpha = (e^{-\nu/2}, \vec{0})$ の形をしている．圧力と密度は状態方程式 $p = p(\rho)$ によって関係づけられる．この章のほとんどすべてで使われる幾何学単位系で，圧力とエネルギー密度の単位は長さの 2 乗の逆数である（441 ページの考察参照）．

計量と物質の間にはアインシュタイン方程式を解かなければわからない 3 つの未知関数 $\nu(r)$, $\lambda(r)$, $\rho(r)$ がある．ここでは，アインシュタイン方程式 $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ のすべての成分を書き下すことはしない．そのため，いろいろな方法でこれらの方程式を組み合わせることによって得られる 3 つの独立な方程式を示そう（問題 4）．便利な再定義

$$e^{-\lambda(r)} \equiv 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{24.12}$$

から始めよう．未知の関数 $\lambda(r)$ を別の未知関数 $m(r)$ で置き換えているだけである．新しい関数 $m(r)$ は星の外側で一定値，全質量 M をとる．$m(r)$ と $\rho(r)$, $\nu(r)$ の 3 つの方程式は

球対称相対論星の構造方程式

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{24.13a}$$

$$-\frac{dp(r)}{dr} = [\rho(r) + p(r)] \left(\frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r^2(1 - 2m(r)/r)}\right) \tag{24.13b}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr} = -\frac{1}{\rho(r) + p(r)}\frac{dp(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r^2(1 - 2m(r)/r)} \tag{24.13c}$$

である．ここで p はつねに状態方程式によって ρ と関係づけられていると理解される．これらの 3 つの方程式は，まとめて，球対称相対論星の**構造方程式**といわれる．次節で，これらが星の内部の圧力と密度と幾何学の分布をどのように決めているのかをみることにする．

これらの方程式をよりよく理解するために，非相対論的極限を調べることが教育的であろう．付録 A のように，G と c を戻すと

$$m \to \frac{Gm}{c^2}, \qquad \rho \to \frac{G\rho}{c^4}, \qquad p \to \frac{Gp}{c^4} \tag{24.14}$$

となる．静止質量密度 μc^2 は非相対論的極限でエネルギー密度の中で優勢である．(24.11) 式を静的弱場計量 (6.20) と比較すると，この極限で $\nu(r)$ は $2\Phi(r)/c^2$ になる．$\Phi(r)$ は星の内部におけるニュートン重力ポテンシャルである．これらの近似を構造方程式 (24.13) に代入して $1/c^2$ の最低次をとると，非相対論的極限で

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \mu(r) \tag{24.15a}$$

$$-\frac{dp(r)}{dr} = \mu(r)\frac{Gm(r)}{r^2} \tag{24.15b}$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\frac{1}{\mu(r)}\frac{dp(r)}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \tag{24.15c}$$

を与える．最初の方程式は，半径 r 以内の静止質量 $m(r)$ を決め，静止質量密度 $\mu(r)$ で表される．次の方程式は平衡状態にある星の圧力と重力の間のバランスを表す．このことを確かめるために，半径 r に置いた小さい立方体体積 $\Delta\mathcal{V}$ を考えよう（図 24.3 を見よ）．体積は半径方向に沿って一辺の大きさが Δr になり，半径方向を正面にした 2 辺の面積は ΔA になっている．体積から外に向く正味の圧力は 2 つの面の圧力差によって生じる：

$$-p(r+\Delta r)\Delta A + p(r)\Delta A \approx -\frac{dp}{dr}\Delta\mathcal{V} \tag{24.16}$$

これは，体積内の質量にはたらく内向きの重力

$$(\mu\Delta\mathcal{V})\frac{Gm(r)}{r^2} \tag{24.17}$$

とつり合っている．これらがバランスをとることは (24.15b) 式からわかる．体積内の質量をかけると (24.15c) 式は，重力ポテンシャルから得られる重力と球対称物体のニュートンの定理から得られるものを等号で結んだ式になっている（例 3.1 を思い出せ）．ニュートンの定理を受け入れれば，重力ポテンシャルの定義とみなすことができるだろう．

一般相対論的方程式 (24.13) でもほぼ同じ解釈ができる．平衡を決めるにあたって (24.13a) 式は半径 r 内にある質量のように振る舞う量 $m(r)$ を定義する．厳密にいえば質量は存在しない．なぜなら，16.5 節で考察したように，物質のエネルギー密度はあるけれど，一般相対論では重力エネルギーを含む局所的なエネルギー密度の概念はない．それにもかかわらず，表面 R における $m(r)$ の値は外部のシュワルツシルト幾何学内の質量 M であり，無限遠で測った星の全質量になっている．(24.13c) 式から $\nu(r)$ が決まり，したがって計量成分 $g_{tt}(r)$ が決まる．(24.13b) 式は，静水圧

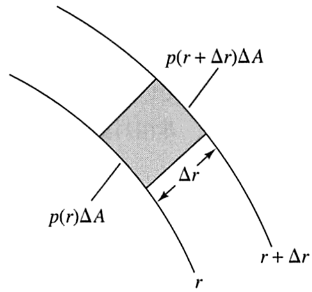


図 24.3　球対称星の内部の小さな流体要素にはたらく圧力．流体要素は半径方向に大きさ Δr, r の垂直方向に面積 ΔA をもつ．外側の面にはたらく半径方向の圧力は $-p(r+\Delta r)\Delta A$ であり，内側の面にはたらく圧力は $+p(r)\Delta A$ である．半径方向に向く正味の圧力は $-p(r+\Delta r)\Delta A + p(r)\Delta A = -(dp/dr)\Delta\mathcal{V}$ であり，ここで $\Delta\mathcal{V} = \Delta A\Delta r$ は流体素である．静水圧平衡では，この正味の圧力が中心を向く重力とつり合っている．

平衡の相対論的な式で，星の内側にある小さな体積各々にはたらく圧力と重力がバランスをとっていることを表している．

(24.13b) 式の右辺とニュートン極限 (24.15b) を比較すると，大雑把に言えば，一般相対論の重力はニュートンの $m(r)/r^2$ よりも強いことがわかる．例えば，圧力の作用が $m(r)$ と $\rho(r)$ に**加わっている**．分母は r^2 よりも $1-2m(r)/r$ 倍**小さく**なっている．これらの差は相対論星の重要な結果である．

24.3　星のモデル

相対論的静水圧平衡の式 (24.13) は 1 階常微分方程式系であり，状態方程式が与えられると標準的な数値計算のアルゴリズムにしたがって積分できる．これからこの積分の実行法を詳しく述べることにする．まず $m(r)$ と $\rho(r)$ に対して，2 つの方程式 (24.13a) 式と (24.13b) 式を考える．これらはそれ自身で閉じた系をなしている．

1. 中心密度の値を ρ_c として星の中心から始めよう．中心の圧力 p_c は状態方程式 $p_c = p(\rho_c)$ から決まる．$m(r)$ の中心値は 0 でなければならず，そうでなければ時空は中心の近傍で，空間計量が $dS^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ の形をした局所的平坦にはならない（問題 5）．
2. (24.13a) 式と (24.13b) 式の連立方程式をこれらの境界条件を満たしながら外側に積分する．(24.13b) 式から $dp/dr < 0$ になり，圧力は図 24.4 で説明したように常に下がっていく．$dp/d\rho > 0$ のとき，密度もそうなる（図 24.2 のように）．（実際，これは 24.6 節で説明したように，どの状態方程式にも見られる性質である．）質量 $m(r)$ は常に増加する．最後に圧力 0, $p(r) = 0$ となる半径 R にたどり着く．これが星の表面であり，ここでは流体の最も外側の小さい体積をその場所に留めておくために物質の重さを必要としない．表面の $m(R)$ の値は星の全質量 M である．
3. この過程を ρ_c が 0 から無限大のすべての値について繰り返して，与えられた状態方程式か

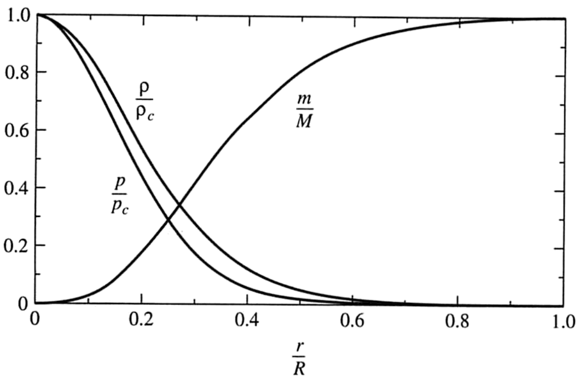


図 24.4 星のモデルの構造．図に，相対論的構造方程式 (24.13) を積分することで得られる $\rho(r), p(r), m(r)$ を示した．ここで，陽子と同じ数の縮退電子の静止エネルギーによって補われた状態方程式を使った．あるモデルでは中心密度 $\rho_c = 1 \times 10^{10}\mathrm{g/cm^3}$ とそれに対応する圧力 $p_c = 1.06 \times 10^{28}\mathrm{dyn/cm^2}$ から始まっている．積分が外側に向かうと，圧力 $p(r)$ と密度 $\rho(r)$ は減少し，質量関数 $m(r)$ は増加する．圧力は $R = 1314\mathrm{km}$ で 0 になり，これが星の半径になる．質量 $M = m(R)$ は $1.42M_\odot$ である．これは図 24.5 で説明したモデルの系列のうちで，ピークに近いモデルである．

らなる球対称星の族を探す．これらは ρ_c をパラメータとする 1 パラメータ族を形成する．これらの星の質量 $M(\rho_c)$ と半径 $R(\rho_c)$ は ρ_c の関数となる．

4. 星の内側の時空幾何学の計算を完了するために，(24.13c) 式を表面の値 $\log(1-2M/R)$ から内側[2]に積分して内部の $\nu(r)$ を求めることができる．星の内側の計量は (24.11) 式で与えられ，$\nu(r)$ はこの計算によって求められ，$\lambda(r)$ は (24.12) 式によって求められる．

同じ数の陽子と電子からなる物質の状態方程式で，このような計算を行うと図 24.5 の結果になる．圧力は，(24.9) 式にしたがった電子の縮退圧によって与えられると仮定する．ほとんどのエネルギー密度は，陽子の静止エネルギーから得られる．これは実際の白色矮星の内側の物理学のよい近似となっている．中心密度 ρ_c によって指定される 1 パラメータ族が存在する．このプロットは，このパラメータの系列の星に対して，全質量 M, シュワルツシルト座標半径 R を示した．この計算で重要な結果は，電子のフェルミ縮退圧によって支えられる質量には約 $1.4M_\odot$ の上限があることだ．これが**チャンドラセカール質量**であり，その値を大雑把にボックス 12.1 で評価した． **チャンドラセカール質量**

図 24.5 の星の系列は実在の白色矮星のよい近似となっている．これらの星はそれほど相対論的ではない．特徴的な比 GM/c^2R はせいぜい 1000 分の 1 程度である．しかし，$10^{11}\mathrm{g/cm^3}$ 以下の密度に対してのみ電子の縮退圧は星の進化の最終状態における物質の圧力源のよい近似となっている．これから向かうのはより高い密度でより相対論的な天体である．

[2] 実際に，(24.13c) 式を別の方程式を使って，例えば $\nu(0) = 0$ から出発し積分し，表面でシュワルツシルト幾何学と一致するように定数を加える．

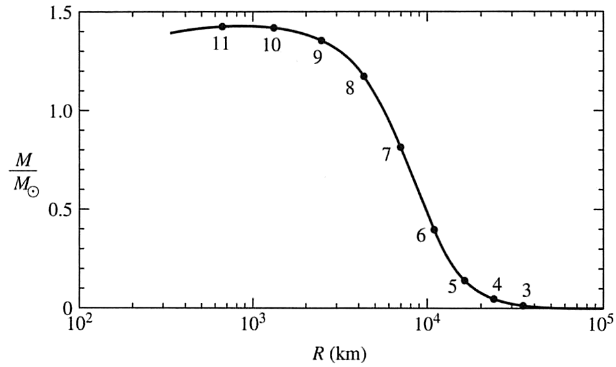


図 24.5　回転しない星の質量-半径の関係．星はパウリ原理から生じる 0 温度電子のフェルミ圧力によって支えられている．陽子と同じ数の電子に対して，24.1 節で考察した状態方程式を使った．これは白色矮星の物質の近似となる．曲線は中心密度 ρ_c をパラメータとして星の 1 パラメータ族である．$\log_{10}[\rho_c(\mathrm{g/cm^3})]$ の値が曲線に沿って付けられている．この物質の量には，重力崩壊をフェルミ圧によって支えられる約 $1.4M_\odot$ の上限が存在し，それはチャンドラセカール質量と呼ばれる．星のモデルの族は実在の白色矮星の近似になっている．

24.4　基底状態の物質

図 24.5 で説明した星の系列を構成するのに使われた自由フェルミオンの状態方程式は質問「箱に入った $\mathcal{N}$ 個の**相互作用しない**フェルミオンのエネルギー最低の状態（基底状態）は何か」に対する答えである．より一般的に，強い相互作用と弱い相互作用のような，高密度で重要になる実在の力を**含んだ**物質が基底状態にあるときにも使える状態方程式が必要だ．これは理論的に答えるのがかなり難しい問題であるが，この問題に含まれている物理学のいくつかはボックス 24.1 に定性的に述べた．この実在の定常状態物質から構成される球対称星の系列族は，$10^{14}\mathrm{g/cm^3}$ より大きな中心密度で星の進化の最終状態に対するよい近似となっている．これらの星の質量や半径などの星の全体的な性質は，この密度より大きな物質の性質にほとんど全体的に依存している．そこでは，圧力と密度を関係づける状態方程式を持っている理想流体がよい近似になっている．

状態方程式を

$$\gamma \equiv \frac{\rho + p}{p}\frac{dp}{d\rho} \tag{24.18}$$

によってまとめると，しばしば便利である（習慣でもある）．そうするのは，いくつかの有益で簡単なモデルでは γ が定数の状態方程式をもつからだ．たとえば，24.1 節で考察したフェルミ縮退の状態方程式はフェルミオンが非相対論的のとき $\gamma = \frac{5}{3}$ になり，相対論的に移行していくと滑らかに $\gamma = \frac{4}{3}$ に移っていく（問題 13）．γ が大きくなると，エネルギー密度の増加に対して圧力が大きく増加し，状態方程式がより硬直することになる．

基底状態物質の密度の関数として γ を計算したものが図 24.6 である．前節で述べたように，状

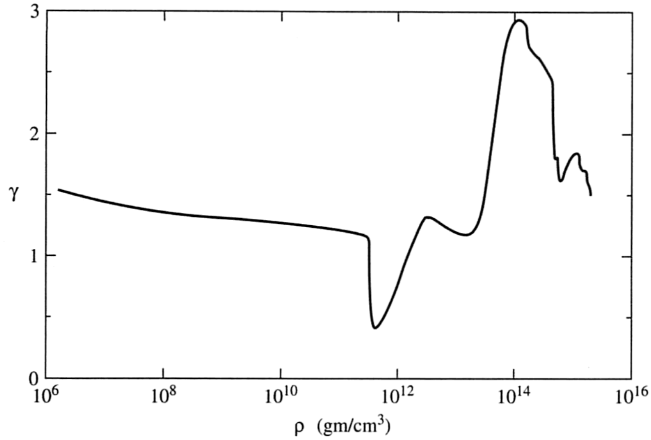


図 24.6 基底状態にある物質の状態方程式．(24.18) 式で定義された γ を以下の 2 つの計算結果をつなぎ合わせることで求めた．核密度以下では，Harrison and Wheeler (1965) の計算を使い，原子核密度以上で Glendenning (1985) の結果を使った．グラフは 10^6g/cm^3 で始まり，この点では圧力のほとんどを供給する 0 温度電子は相対論的になる途中にある．γ は，電子が陽子に吸収され中性子になっていくと，4/3 を超えてゆっくりと小さくなる．ほぼ 4×10^{11}g/cm^3 で，中性子過多原子核から中性子が溢れると，状態方程式は突然軟らかくなる．この密度を超えると，核力と中性子は圧力源としてますます重要になる．状態方程式は原子核の密度をかなり超えるまで，硬直していくことになる．

態方程式を使って相対論的構造方程式を積分した結果得られた球対称星の族が図 24.7 にある[3]．10^{14}g/cm^3 のオーダを超える密度で，ほとんど全ての電子は陽子と結合し中性子になり，この中心密度を超える星は**中性子星**と呼ばれる．強い相互作用は中性子星の性質を調べるのに重要であり，その結果，非常に高密度の計算はどこか不正確なところがある．それにもかかわらず，いくつかの重要な特徴を浮き彫りにできる．まず，これらの星は非常にコンパクトであり，太陽質量のオーダーの質量と 10km のオーダーの半径をもつ．圧力を与える中性子は，白色矮星で圧力を与える電子よりも約 1000 倍重く，中性子星の半径はほぼ 1000 倍小さい（問題 14)．第二に，$GM/Rc^2 \sim 0.1$ なので相対論的重力は中性子星の構造で重要になる．第三に，強い相互作用の力であっても，その基底状態で，任意の物質量による重力を支えるのに十分ではなく，したがってほぼ太陽質量程度の中性子星の質量の最大値が存在する．13.1 節で述べたように，この最大質量を使って中性子星とブラックホールを区別することができる．しかし，図 24.7 に示された星すべてが自然界に存在するわけではない．これらすべてが安定であるとは限らないからである．したがって，我々は安定性の問題に進むことにしよう．

[3] 10^{11}g/cm^3 を下回る密度で，図 24.7 は図 24.5 と比べて細かい部分で異なっている．両方とも縮退電子が圧力を供給しているとしても，低エネルギーから基底状態へ移るときに生じたと仮定した核反応は実際の白色矮星では生じない．図 24.4 と 図 24.7 で核の静止エネルギーに別々の仮定がなされている．

ボックス 24.1　物質の基底状態

箱の中, たとえば 1 辺が 1m の箱の中に 10^{27} 個の陽子と同じ粒子数の電子があるとき，その最低エネルギー状態はどうなるか．最低エネルギー状態はこれらの条件のもとで物質の**基底状態**と呼ばれる．基底状態は温度 0 になり，したがって熱運動にエネルギーは存在しない．電子は原子核に束縛され原子になり，原子は集まって固体となるだろう．しかし，基底状態は 10^{27} 個の水素ではない．陽子は電子と結合して中性子になり，陽子と中性子は結合して原子核になる．この状態は別々でいるよりも，束縛された状態（低エネルギー状態）にある．これらの遷移に必要な核反応がどのように起きるのかを気にすることはない．我々は原理的なことを問題としているからだ．原子核の中で核子当たりの質量が最低なのは ^{56}Fe である．^{56}Fe が最も強く結合した原子核に近いからだ（束縛エネルギー曲線と核子数の図，図 12.1 を見よ）．10^{27} 個の陽子と，それと同数ある電子の配位の初めの基底状態は零度の ^{56}Fe の固体である．低圧力での鉄の密度は $\sim 7.9\mathrm{g/cm^3}$ なので，塊は 1 辺が約 20cm であり，圧力 0 の 1 辺 1m のボックスにうまく収めることができるだろう．

さて箱をどんどん小さくして（必然的に鉄を圧縮させる）高密度の基底状態を探すことを考えよう．温度 0 を保ちながら，原子核間にどんな反応でも起きるように，冷却時間よりもゆっくり箱を縮める．エネルギー密度 ρ は大きくなり，圧力も大きくなる．このようにして，すべての密度で基底状態にある物質の状態方程式 $p = p(\rho)$ を決定することを想像しよう．その状態方程式の主な特徴は以下の考察で定性的に述べる．定量的な計算の結果は (24.18) 式で定義された stiffness **パラメータ**を使って図 24.6 にまとめた．

最低密度で基底状態は固体に束縛された原子からなるが，以下の 2 つの理由のため実際の星全体の構造には重要でない．第一に，物質が個々の原子によって成り立っている状態はこのような星の表面近くの小さな領域でしか成り立たない．第二に，基底状態の物質は白色矮星と中性子星の実際の表面が満たす条件として現実的な近似とはなっていない．したがって物理学がもっと簡単に扱える高密度状態から考察を始めてもよいだろう．

箱の物質が圧縮され体積が小さくなっていくと内部の電子のエネルギーは増加していき，大雑把に言って運動量は $p \sim \hbar/\lambda$ のように変化していく．λ は電子が閉じ込められている容器の典型的な大きさである [(24.2) 式を参照]．密度が $\rho \sim 10^4\mathrm{g/cm^3}$ であることから電子はもはや原子の中に束縛されていない．電子はほぼ自由であると扱え，優勢な圧力源は，24.1 節で述べたようにパウリ原理から生じる電子気体のフェルミ圧力である．エネルギー密度は非常によい近似として原子核の静止エネルギーと等しい．

stiffness パラメータ γ は非相対論的気体の値 5/3 から始まって，電子が $\rho \sim 10^6\mathrm{g/cm^3}$ で相対論的（エネルギー $\sim m_e c^2 \sim 0.5\mathrm{MeV}$）になると 4/3 に落ちる．$\rho \sim 10^6\mathrm{g/cm^3}$ を超えるとすぐ，典型的な電子エネルギーは中性子-陽子質量差（$m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3\mathrm{MeV}$）にたどり着く．そのエネルギー程度では，原子核に束縛されている陽子が，弱い相互作用を通じて（$e^- + p \to n + \nu$）電子を吸収し中性子になる方がエネルギー的に優位になる．電子が消え，原子核が中性子過多，陽子欠乏になると状態方程式は軟らかくなる．$4 \times 10^{11}\mathrm{g/cm^3}$ を超えると，物質は非常に中性子過多になりエネルギーの高い中性子は原子核からほとんど束縛されなくなる．この現象は中性子ドリップと呼ばれ，圧縮エネルギーが圧力を供給するよりも，むしろ中性子を解放するようになり，γ は急激に落ち込む．

圧縮がさらに進むと原子核**間**の中性子の密度が増加し，最終的には原子核**中**の中性子の密度と等しくなる．そして原子核は合体して主に中性子からなる一様な流体になる．数パーセントの陽子と電気的に中性になるのに十分な電子はある．これが**中性子物質**になり，中性子星はほとんどこの物質からできている．

このような状況下で，中性子は固まり，間隔が $10^{-13}\mathrm{cm}$ の範囲ほどになり，そして最終的には小さくなる．この距離で核力（強い相互作用）がはたらくようになる．これらが主要な圧力源になり，電子の圧力は本質的にはたらかなくなる．

これらの状況下で状態方程式を計算することはたやすいことではない．原子核の系（陽子と中性子）は強く結合し，最終的には高密度で，十分相対論的になり，たとえば π, Δ, Λ, K のような他の素粒子と結合している．図 24.6 は 1 つの計算結果を示している．本質的で定性的な特徴は，エネルギー密度とともに γ が定常的に増加していることで，原子核力の反発力の結果として，原子核密度を上回るまで状態方程式は硬さを増す．

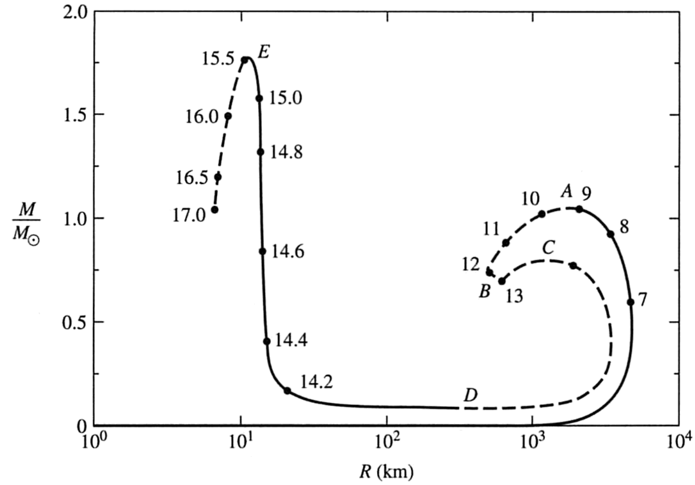


図 24.7　物質がボックス 24.1 で述べた基底状態にあるとき，状態方程式から計算される星の進化の平衡終状態における質量と半径の関係．平衡状態では回転していない．曲線は中心密度 ρ_c をパラメータとした星の進化の平衡終状態の 1 パラメータ族である． $\log_{10}[\rho_c(\mathrm{g/cm^3})]$ の値を曲線に沿ってつけた．極値の位置を A, B, C,... で記した．曲線は原点から $M \propto R^3$ で始まっているが，曲線の低密度部分は横軸と区別できない．安定平衡領域が 2 つあり，実線によって表されている．A 点は質量の最初の極大でありそこを下回る星はパウリ原理から生じる電子のフェルミ圧によって支えられる．安定平衡の他の族が質量の第二の極小 D と第三の極大 E の間にある．これらはほとんど中性子核物質から成り立っており，そのため**中性子星**と呼ばれる．核子間の反発力は圧力の主な発生源である．破線部は不安定な配位であり，自然界には存在しない．

24.5　安定性

星が自然界で存在するためには平衡であるだけでは十分とはいえない．**安定な**平衡でなければならない．

図 24.8 を見ると，古典力学で 1 次元のポテンシャル $V(x)$ 中を移動する質量 m の粒子の安定平衡と不安定平衡のアイディアが思い出される．ポテンシャルの極大と極小は，粒子にはたらく力が 0 になる平衡位置である．図 24.8 の A のようなポテンシャルの**極小**は**安定**平衡である．そこに止まっている粒子にエネルギーを与えると，エネルギーが小さければ，その平衡点の周りを振動し，決して遠くに行ってしまうことはない．平衡から離れた小さな変位 $\xi(t)$ は，運動方程式 $m\ddot{x} = -dV/dx$ を ξ で展開し，最低次だけをとりだした運動方程式にしたがうだろう．それは

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_A}\xi \tag{24.19}$$

である．この方程式の解は $\xi(t) \propto \exp(\pm i\omega_A t)$ のように調和的に変動する（当然ながら，実部だ

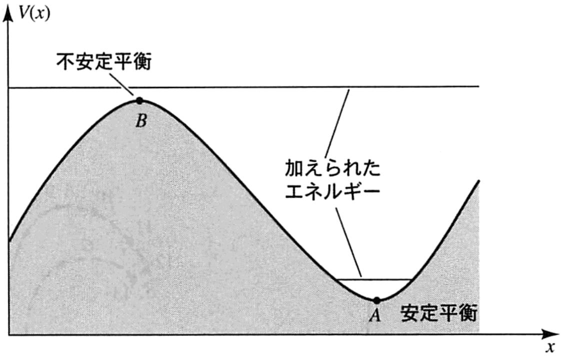


図 24.8　ニュートンの安定平衡と不安定平衡．1 次元の粒子の運動を支配するポテンシャルを表している．点 A と B の 2 つの平衡状態があり，そこでは粒子にはたらく力 $-dV/dx$ は 0 になる．これらの点のどちらに粒子を置いても，留まったままになる．しかし，粒子に少しでも運動エネルギー（水平線）を与えると，2 つの場合で振る舞いはまったく異なる．A の粒子は平衡点の周りに小さな振動を行う．B の粒子は平衡位置からどちらかの方向に指数的に即座に運動するだろう． B のような極大は**不安定**である．

けが変位を与える）．ここで

$$\omega_A^2 \equiv \frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_A} \tag{24.20}$$

である．A で最小なので，ω_A^2 は正であり，ω_A は実数であり，解は有界な振幅で振動するだろう．これが安定性を表す．

それに対して，図 24.8 の B のようなポテンシャルの**極大**は**不安定な**平衡である．そこで静止している粒子に小さなエネルギーを与えると，平衡点からどんどん離れていくだろう．もっとわかりやすく言えば，(24.20) 式と類似して定義される ω_B^2 は負になり，ω_B は虚数になるだろう．(24.19) 式の解は $\xi \propto \exp(\pm|\omega_B|t)$ のように振る舞い，1 つの解は時間とともに増加し，もう 1 つは減少する．先端で立っている鉛筆は不安定平衡の簡単な例であり，この種の運動の例である．鉛筆は垂直に力がはたらいて止まり，平衡のままになる減衰モードがある．しかし現実の鉛筆は例えば，空気の流れにより，成長運動と減衰運動が**ともに**発生し制御不能な摂動にさらされるだろう．成長摂動がどんなものでも，最初小さくても最終的には減衰摂動を圧倒し鉛筆は倒れるだろう．**成長摂動が 1 つでもあれば力学的な系の不安定さを証明するのに十分であろう．**

星の安定性の分析は，粒子の安定性の議論と定性的に似ている．現実的な唯一の違いは，振動にたくさんのモードをがあることである．これらはある振動数をもつ基準モードに分解することができる．これらの 2 乗振動数の 1 つでも負になれば星は不安定になり，自然界で生き残れないであろう[4]．

実際に星の基準モードを計算し，その振動数を明らかにするためには，アインシュタイン方程式

[4] ある場合には，不安定の時間スケールが長過ぎて，星は天文学的に興味のある時間スケールを生き残ることができる．しかし，このような**永年不安定性**は我々がいま分析しようとしている球的なモードの中には存在しない．

を平衡点の周りについて解かなければならない．その計算は難しすぎることはないのだが，それを行うためには，星が安定か不安定かという質問に単に答える以上にかなり多くの情報が必要になる．そのためにはモードについて，いくらか一般的な事実を知る必要がある．それらは実際には，弦やドラムなど，似たような多くの振動系で共通な事実だけである．これから例 24.1 の振動する弦の簡単な場合から始めて，これらの事実について述べる．

例 24.1. 振動する弦　振動する弦の最も簡単な例から，相対論星の小さな振動にある類似性をみることができる．図 24.9 に説明したように，両端が距離 L 離れて固定された弦がある．弦の張力は T であり，単位長さ当たりの質量が σ であるとする．

まっすぐに伸びた弦は平衡な形状になっていて，時間的に変化せず，相対論星の平衡状態と類似している．弦を弾くと，波動方程式[5]

$$\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{24.21}$$

にしたがった振幅 $\xi(t,x)$ で振動するだろう．相対論星が半径方向に振動する方程式と特徴が似ているが，もっと複雑である．弦が振動する基準モードは (24.21) 式の解であり，時間依存する調和振動の形 $\xi(t)\propto\exp(\pm i\omega t)$ になる．固定端の境界条件は振動数が

$$\omega_n^2=(n+1)^2\left(\frac{T}{\sigma}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2,\qquad n=0,1,2... \tag{24.22}$$

の不連続スペクトルのときだけ満たされ，このときは半波長の整数倍が両端の間でうまく合う．対応する基準モードは

$$\xi(t,x)=e^{\pm i\omega_n t}\xi_n(x) \tag{24.23}$$

となり，ここで，ある複素振幅 A_n に対して

$$\xi_n(x)=A_n\sin[(n+1)\pi x/L] \tag{24.24}$$

である．振動数はモード n のとき n 個の節ができるように，番号が付けられている（端は節に数えない）．

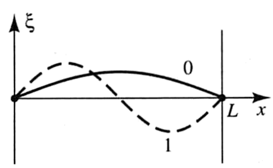


図 24.9　両端が固定された振動弦の 2 つの基準モード．(24.24) 式で表された，長さ L の振動弦の 2 つの低いモードの振幅 $\xi_n(x)$ がプロットされている．

---

[5] もし以下の標準的な考察がよくわからないのなら，力学の基礎の本を復習するか問題 15 を行え．

T が正である限り，まっすぐな平衡状態からずれが生じても復元力がはたらき，すべてのモードの 2 乗振動数は正になり，平衡は安定になる．しかし，T が負になると，どんなことが起きるか想像しよう．そのとき，両端から圧縮されるばねのように，圧縮にはたらく張力が膨張力になる．まっすぐの形状はまだ平衡であるが，この場合，ちょっとした小さな摂動でも成長し始めるだろう．(24.22) 式から 2 乗振動数は今はすべて負になり，すべてのモードは不安定になる．T が正から負になると，まっすぐな形状は安定平衡から不安定平衡になる．

流体の変位が純粋に半径方向であるときのモードは球対称星の安定性を制御できる．したがって，流体の運動が半径方向に行ったり来たりする半径運動に焦点を絞る．振動する弦と違わず，球対称振動は摂動のない星の半径 r に置かれた流体要素の半径変位 $\xi(r,t)$ を時間の関数として与えることにより表せる．可能な変位は決まった振動数 ω_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ の基準モードの不連続スペクトルに分解できる．各モードで変位は

$$\xi_n(r)e^{\pm i\omega_n t} \tag{24.25}$$

である．$\omega_n^2 > 0$ の安定モードは実数の振動数になり振動する．$\omega_n^2 < 0$ の不安定モードは虚数振動数になり，時間とともに指数的に急速に成長する．どのように振る舞おうと，エネルギーは保存する．振動が始まるにはエネルギーが少し必要であるが，その後エネルギーは保存する．最低モードの関数 $\xi_n(r)$ のいくつかを図 24.10 に略図として示した．振動の間 中心は止まっていなければならないので，モードは中心で 0 にならなければならない．表面で圧力が 0 になるという条件も満たさなければならない．最低の振動数モードは中心以外に節がない．モード n は n 個の節がある．

図 24.7 で説明した星の 1 パラメータ族の各基準モードの振動数を，基底状態にある物質の状態方程式を使って計算できたと想像しよう．その結果は，中心密度 ρ_c をパラメータとして族を表したとすると，各基準モードの 2 乗振動数は $\omega_n^2(\rho_c)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ になるだろう．図 24.11 は $\omega_n^2(\rho_c)$ と ρ_c の曲線がどのようになるか概略的に表している．

ρ_c が変わるとモードの 2 乗振動数が変わり，モードは安定状態から不安定状態に変わり，その

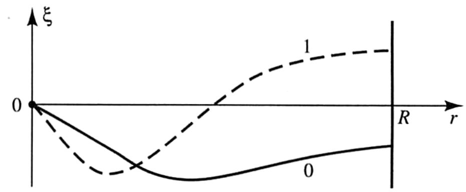


図 24.10 球対称星の 2 つの最低半径モードの概略図．横軸は星の中心から測った半径で，中心は 0 であり表面で R になる．縦軸は半径 r にある流体要素の最大変位を表している．モードはどんなに小さい振幅でももつことができるため，規格化は任意にしてある．この図ではわかりやすいように大きく示してある．中心ですべてのモードは 0 になり，振動の間 固定されたままである．実線は最低 (0) モードを表している．これは中心以外に 0（節の数）にならない．中心が圧縮されていると（$r = 0$ 付近で負の ξ），表面は内側に動く．破線は次の (1) モードを表し，節の数は 1 である．中心が圧縮されるとき，表面は外側に動く．

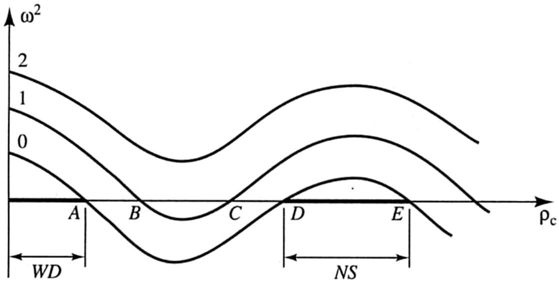


図 24.11 図 24.7 に示した回転しない星の族の最も低い 3 つの半径方向のモードの 2 乗振動数の概略図．中心密度 ρ_c の関数として表し，0,1,2 で節の数も示した．低密度ですべてのモードの 2 乗振動数は正で，安定である．密度 A で最低のモードの 2 乗振動数は負になり，モードは不安定になる．B で第二のモードも不安定になる．これら 2 つのモードは次の C と D で安定性が変わる．最低モードは E で再び不安定になる．安定性の変化を特徴づける 0 振動数モードはこれらの中心密度で変化する．これらは，図 24.7 の M-R 曲線の極値でのみ生じる平衡配位間の変位の位置であり， A や B などのように表示されている．すべてのモードが安定なときにだけ星は安定である．これは 0 から A の密度のときで白色矮星に対応し，D から E の密度のときにも安定になり，こちらは中性子星に対応する．

逆にもなる．ω_n^2 が正から負に変わる中心密度で，モード n は安定から不安定に変わり，変化が逆になると不安定から安定になる．いずれの場合も，安定性が変わるときモードは 0 振動数になる．しかし 0 振動数モードは，時間**独立な**変位という意味で少し特別である．1 つの平衡の配位から別の配位への変位であり，図 24.7 にある $M(r)$ **曲線に沿った**変位である．

0 振動数に対応する変位は一連の平衡変位に沿って起きるものではない．0 振動数モードは 0 エネルギーであり，変位は全質量エネルギーを保存しなければならない．0 振動数モードはしたがって安定性を変え，M-R 曲線の**極値**で起きている．ここで質量は R の小さな変位の 1 次の変化に対して変わらない．逆に，極値ではエネルギーが保存する平衡間の時間独立な変位がある．0 振動数モードと極値は一致している．星の進化の平衡終状態の族の安定性は，これから示すように，図 24.7 の M-R 曲線から全体的に分析することができる．

平衡配位が安定である（すべてのモードが正の 2 乗振動数）とみなせる低中心密度 ρ_c から始め，図 24.11 で説明したように，ρ_c が増加するとモードがどのように安定性を変えるかを調べよう．安定性に変化が起きる最初の**極値**は $M(r)$ のピークであり，図 24.7 に A と記してある．そこで最も低いモードは不安定になる．A より低い中心密度の星はこの範囲で縮退電子のフェルミ圧によって支えられる安定な族であり，定性的に図 24.5 の星に似ている．

A より大きいが次の極値（B の極小）よりも小さい中心密度の星は不安定で，自然界には存在しないだろう．B における 0 モードには 2 つの可能性がある：(1) 最低モードは安定に戻るかまたは (2) 図 24.11 で説明したように，第二のモードが第一のモードとともに不安定になる．2 つのモードが星の半径とどのように変化するのかを調べることによってどちらが起きるのかを予測することができる．

平衡配位の族に沿って変位すると中心密度が**増加する** 0 振動数モードを考えよう．したがって

モード関数 $\xi(r)$ は $r=0$ で負にならなければならない（圧縮）．最低モードは，$r=0$ 以外で節をもたないが，星の半径 R 以内では減少して表面では 0 にならなければならない（図 24.10 を見よ）．それに対して，1 つの節をもつ第二のモードは R で増加する．しかし，図 24.7 から，B で中心密度が増加すると半径 R は**増加する**．したがって安定性を変えるのは最低モードではなく，1 つの節をもつ 2 番目の最低モードであり，図 24.11 に示したように不安定になっていく．この種の分析にしたがうと（問題 16），他の安定な状態は D の極小から E の極大までであることがわかる．これらは中心密度が $1.2\times10^{14}\mathrm{g/cm^3}$ から $3\times10^{15}\mathrm{g/cm^3}$ を持った星である．これらの星はボックス 24.1 で述べた中性子物質でほとんどできており，**中性子星**と呼ばれる．

中性子星は $GM/c^2R\sim0.1$ の一般相対論的天体である（図 24.7 を見よ）．$3\times10^{15}\mathrm{g/cm^3}$ を超えたところまで状態方程式を理論的に外挿しても，さらなる安定な星が存在する証拠はみられない．したがって，中性子星と白色矮星は星の進化において可能な安定最終状態の 2 つである．白色矮星はその光学的な特徴から発見することができ，中性子星は他の方法でパルサー現象から見つけることができる（ボックス 24.2 を見よ）．

24.6 中性子星の最大質量の限界

図 24.7 から，回転していない場合，基底状態にある物質の圧力によって重力崩壊を支えることのできる質量には最大値が存在し，約 $2M_\odot$ であることがわかる．13.1 節で考察したように，中性子星のこの最大質量がブラックホールと中性子星を観測的に区別するために使われるため，宇宙物理学にとって重要な数値となる．しかし，すでに述べたように図 24.7 に示したような結果は通常の原子核の密度を超えた状況，したがって地上の実験によって十分なチェックができない状況で，野心的な計算により理論的に求められた状態方程式に信頼を置いている．したがって，通常の物質が原子核密度にあるときの状態方程式の詳細な知識を仮定し，またその密度を超えた状況で成り立つ原子核の一般的な性質を仮定して，一般相対論**だけ**に頼って中性子星の最大質量の範囲を求めることが重要である．この領域がこの節の主題である．我々は厳密な範囲を求めることはせず，その基本的な理由を示すだけにする．

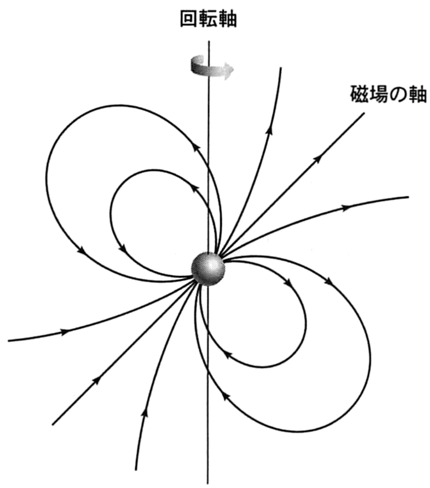
最大質量の限界は相対論的静水圧平衡の式 (24.13) と状態方程式のいくつかの一般的な仮定から得られる．ここにそれを示す．

- 物質は，条件（1）$\rho>0$,（2）$p>0$,（3）$dp/d\rho>0$ を満たす状態方程式 $p=p(\rho)$ で表されると仮定する．正のエネルギー（1）は物質の一般的な性質である．性質（2），(3) は物質が微視的に安定であるために必要である．圧力が正でない，または圧力が圧縮に対して増加しないならば，体積が小さな状態からさらに小さい状態に圧縮されることがエネルギー的に有利になり，小さなスケールに崩壊する．
- 状態方程式はある基準密度 ρ_0 までは知られていると仮定する．ヘリウムからウランまでの原子核の中心密度はほとんど同じである．この密度は**核密度**と呼ばれ，$2.9\times10^{14}\mathrm{g/cm^3}$ である．この密度まで，理論的な計算は実際の原子核と比較でき，そのためこの密度以下ではある程度自信をもって基底状態にある物質の状態方程式を知っていると言うことができる．これを密度 ρ_0 とするのはよい選択である．

ボックス 24.2　パルサー

パルサーの観測的な特徴は，典型的に 1 秒オーダーの周期で正確な短時間電波周波数パルスを連続的に放射することである．これらの電波信号は回転帯磁中性子星を起源とするものである．

中性子星は超新星崩壊の形成時に角運動量を受け継ぎ，1 秒間に約 1 回自転している．この割合であっても，遠心力が重力よりもずっと小さいという意味においては速く自転してはいない（問題 18）．コンパクトな太陽質量が慣性により自転することでより非常に正確な時計となっている．灯台が中性子星とともに回転し，狭く絞られた光が地球を照らしだすと，観測されるようなパルスになる．しかしこのような絞られた光を作る機構は何だろうか．



中性子星は形成時に角運動量だけでなく磁場も受け継いでいる．中性子星の物質は伝導性に富み，物質を貫くどんな磁場も，パルサーの年齢よりもかなり長い時間にわたり凍結することができる．崩壊の過程で磁束は導体内でほぼ保存し，数ガウス程度の通常の星の磁場は圧縮により 10^{12} ガウスにまで増幅され，回転する中性子星は強く磁場を帯びる．星から遠い距離にある観測者はそれが回転する磁気モーメントのように見える．図示したように，モーメントが回転軸に沿っていないとすると，回転により時間とともに変化するだろうし，電磁波も放出されるだろう．これらの波の中にエネルギーが費されることにより，星の回転は遅くなっていく．パルサーはこのような正確な時計となっているので，回転周期におけるごくわずかな減少でも測定可能で，このような大きな磁場の値と整合性がある．

これと同じ磁場が中性子星を囲むプラズマの起源である．伝導性の大きな内部で，回転磁場が電場を生じる．電子にはたらく力は，定常状態でほぼ 0 にならなければならなず，ローレンツ力の 2 つの項が打ち消さなければならない：$\vec{E} = -\vec{V}/c \times \vec{B}$. ここで $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, $\vec{\Omega}$ は星の角速度である．電場の接方向成分は，星の表面を横切って連続でなければならない．このことから，星の外側で電場が存在し，一般的に表面に垂直な成分をもつことがわかる．この場は原子から電子を引っ張り一緒に星と回転するプラズマを形成するのに十分な強さを持っている．プラズマの荷電粒子は開いた力線に沿って外に流れ，閉じた力線に沿って捕捉される．捕捉された粒子は回転軸から離れた距離まで中性子星とともに回転し，そこでの速さは光速と等しくなるだろう．電波パルスを発信する機構はまだ完全には理解されていないが，回転によって生じるプラズマ中の不安定性が電荷の集中を作り出しコヒーレントに放射を発生させているというアイディアがある．5.5 節で考察した相対論的ビーミング効果によって自然に絞られたビームがつくり出されるだろう．それが灯台となって観測されているのだろう．このように，他にも，中性子星は極端な条件下で物理学の自然な実験室となっている．

これらの仮定のもとで，以下のようにして最大質量の範囲を得ることができる．静水圧平衡の式 (24.13b) の右辺は常に正である．各項は正であり，$1 - 2m(r)/r$ は決して負にならないかまたは，r の内側の領域はブラックホールの内部である．圧力は半径とともに減少し，仮定により $dp/d\rho > 0$ なので，密度も半径とともに減少することがわかる．したがって，星は $\rho \geq \rho_0$ の**コア**と部分と $\rho \leq \rho_0$ の**外層**に分割できる．コアは状態方程式がよくわかっていない部分で，外層は既知である．コアの半径を r_0 で表し，その半径までの $m(r)$ の値を M_0 で表す．我々は形式的に

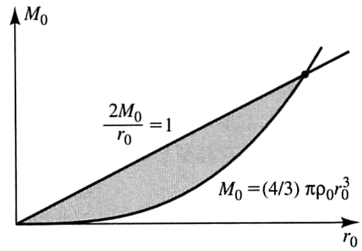


図 24.12　回転していない星の進化の平衡終状態の質量の制限．影のついた領域は，中性子星のコアの密度が基準密度 ρ_0 を上回る場合に対して，質量 M_0 と半径 r_0 に許される値を示している．ρ_0 より下では状態方程式が正確に知られている．質量は下の曲線より大きくなければならず，この曲線は，最小密度 ρ_0 を持った一様密度コアに対する質量と半径の関係である．質量は直線よりも下でなければならず，上ではブラックホールになってしまう．曲線が交わったドットの位置でコア質量は最大になる．ρ_0 が核密度近くのときは，これをよい近似で最大中性子星質量とすることができる．

M_0 を**コアの質量**という．(24.13a) 式から

$$M_0=\int_0^{r_0} dr\,4\pi r^2\rho(r)\geq\int_0^{r_0} dr\,4\pi r^2\rho_0 \tag{24.26}$$

である．不等号は，コアの内部の点における密度が表面密度よりも大きいからである．よって

$$M_0\geq\frac{4}{3}\pi r_0^3\rho_0 \tag{24.27}$$

である．他方で，コアはシュワルツシルト半径の内側にあってはならず，もしそうならば，ブラックホールになってしまう．よって

$$\frac{2M_0}{r_0}<1 \tag{24.28}$$

である．2 つの拘束条件 (24.27) 式と (24.28) 式を図 24.12 に示した．最大のコア質量が存在しそれは

$$M_0\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi\rho_0}\right)^{1/2}=8.0M_\odot\left(\frac{2.9\times10^{14}\mathrm{g/cm^3}}{\rho_0}\right)^{1/2} \tag{24.29}$$

である．

しかし (24.29) 式の範囲は最善ではない．もし問題 19 を行っていれば，一定密度のコアの場合の $2M_0/r_0$ の最大値が 1 ではなく，8/9 であることがわかるだろう．(24.29) 式のコアの質量における制限が $8M_\odot$ から $6.7M_\odot$ に減ることがその 1 つの改善となることを挙げれば十分であろう．これでもまだ最善ではない．全制限質量はコアの質量と外層の質量の和である．外層の質量は 24.3 節で述べたように構造方程式を積分することで得られるが，中心から積分するのではなく，r_0 と M_0 から行う．コアに対して最適な制限は約 $6.5M_\odot$ であるが，核密度付近の値を ρ_0 として評価すると，外層の質量は小さいが無視できるものではない．詳しい計算（Hartle 1978）から，これまでの仮定のもとで，中性子星の最適最大質量（コアと外層）は $6.7M_\odot$ である．これは

$\rho_0 = 2.9 \times 10^{14}\mathrm{g/cm^3}$ までで図 24.6 によってまとめられる状態方程式を仮定している．音速よりも光速が遅くなるというような，状態方程式にさらなる制限を仮定すると，限界は $4M_\odot$ ほどに減らすことができる．

核密度を上回る物質の性質とは独立な，球対称中性子星の質量の上限があることから 13.1 節で考察した連星 X 線源の太陽質量スケールのブラックホールを同定することに自信が持てる．半径速度と 1 つの星からのスペクトルから連星系の軌道を分析することにより，これまで述べてきた上限よりも大きな質量のコンパクトな X 線源が見つかれば，それは中性子星であるはずがなく，ブラックホールでなければならない．

問題

1. [S] 白色矮星の表面温度は 10^5K になることがあり，これは日常の温度の測定値よりも高温である．この温度は温度ゼロの縮退電子気体の近似が破れるほど十分高いか．
2. **縮退フェルミ粒子の 1 次元ガス**　我々は 3 次元でなく 1 次元に生きているとしよう．長さ $\mathcal{L}$ の「箱」にある $\mathcal{N}$ 個の縮退フェルミ粒子の気体は，単位長さ当たりのエネルギー ρ, 壁にはたらく力 p, 単位長さ当たりの粒子数 n で特徴づけられるであろう．（記号は 3 次元の類似性を強調している）
   (a) (24.3) 式の和を評価して $\mathcal{N}$ が大きなとき，箱の全エネルギーを求めよ． ρ を n の関数として求めよ．
   (b) 壁にはたらく力 p を n の関数として求めよ．
3. **ボーズ粒子に状態方程式はない**　前問の 1 次元の例に引き続いて，長さ $\mathcal{L}$ の箱の中にある $\mathcal{N}$ 個のボーズ粒子（パウリ原理から制限を受けない粒子）の基底状態エネルギーはどうなるだろうか．$\mathcal{L}$ が大きくなると， p と n に $\mathcal{N}$ と独立な関係は存在するだろうか．
4. [A] **アインシュタイン方程式から構造方程式の導出**　計量 (24.11) と完全流体の応力エネルギーを使って，アインシュタイン方程式 $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ とそれから得られる応力エネルギーの局所的保存式 $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ から 3 つの静水圧平衡の式 (24.13) を導出せよ．（**ヒント：**選んだ方程式はどれでも連立して使うことができるのだが，座標軸を向いた直交基底で表した方程式 $\nabla_\beta T^\beta_r = 0$, $G_{\hat{t}\hat{t}} = 8\pi T_{\hat{t}\hat{t}}$, $G_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$ の組合せを使えば代数計算は最も少なくて済む．アインシュタインテンソルの成分は計量 (24.11) の場合，付録 B にある．）
5. α が 1 よりも大きな定数のとき，計量

$$d\Sigma^2 = \alpha^2 dr^2 + r^2 d\phi^2$$

   が円錐の 2 次元面上の幾何学を表していることを議論せよ．円錐の開口角はどうなるか．（**コメント：**これは $r=0$ で局所的に平坦でない幾何学の例である）
6. [C] 一定値に固定された密度 ρ の非圧縮物質は光速よりも速く信号を送れてしまうので（なぜか），特殊相対論とは矛盾する．しかし相対論的静水圧平衡の簡単な例ではそうしている．(24.13a) 式と (24.13b) 式の構造方程式を積分し，ρ を定数とした物質で作られた全質量 M の星の半径の関数として圧力を求めよ．これらの星に対して質量と半径の関係をプロットせよ．最大質量は存在するか．

7. [A]（a）問題 6 で構造について解いた球対称一定密度星の族の内部の計量を求めよ．星の内部と外部の接続条件を注意深く考察せよ．

   （b）一定密度の星内部の $t =$ 一定面の幾何学が第 18 章で考察した閉じた FRW 宇宙の一様空間面のものと局所的に同じであることを示せ．

   （c）表面積が同じ場合，星内部の体積は平坦空間の場合よりも大きいか小さいか．

8. 問題 7 の結果を使って，一定密度星の時空幾何学の $t =$ 一定，$\theta =$ 一定 2 次元スライスの埋め込み図を求めプロットせよ．

9. [C] 本文では，例えば図 24.7 のように，中心密度 ρ_c を使って非回転星の族をパラメータ化した．しかし，同様に中心圧力 p_c をパラメータとすることができる．問題 6 で考察したように，仮想的な一定密度物質からなる星はすべて同じ密度をもつ．

   （a）一定密度星の場合，中心圧力 p_c の値に対して，一意的な質量 M と半径 R が存在することを示せ．

   （b）一定密度 ρ の球対称星の族の表面から観測される最も大きな赤方偏移 [(9.20) 式を参照] はどれほどか．そのときの中心圧力 p_c はどれほどか．

10. 状態方程式 $p = \rho$ の物質が面積 $4\pi R^2$ の球殻内部に球対称に分布している．球殻の質量は無視できる．（球殻は実在の物質ではできていない）

    （a）圧力と密度の分布が半径の逆のべきとなるとき，静水圧平衡の式 (24.13) の簡単な解を求めよ．

    （b）この分布の全質量はいくらか．

    （c）この球殻にはたらく圧力はいくらか．

11. [E,B] 基底状態にある物質に対して，以下の場合の密度を g/cm^3 で評価せよ．典型的な電子のエネルギーが（1）典型的な原子の束縛エネルギー $\sim$ 10keV を超えるとき，（2）電子の静止質量 $\sim$ 0.5MeV を超えるとき，（3）中性子と陽子の質量差 $\sim$ 1.3MeV を超えるとき．

12. [B] 超相対論的で**自由な**電子と陽子，中性子からなる電気的に中性な気体が反応

$$e^- + p \leftrightarrow n + \nu$$

    で平衡状態を持続していて，平均的に電子は吸収されず，中性子も崩壊しない．電子と陽子，中性子の密度は互いにどのような関係になっているのか．

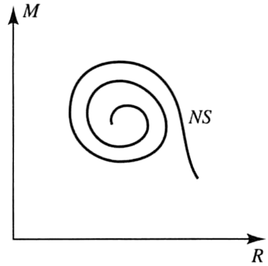
13. [S] 非相対論的と相対論的極限の両方で，(24.7) 式と (24.9) 式で与えられる縮退フェルミ粒子の状態方程式について (24.18) 式で定義される γ を評価せよ．

14. [E] **中性子星の半径の評価**　自由中性子の縮退圧が中性子星を支える圧力を供給すると仮定して，中性子星の半径を評価せよ．

15. [S] 波動方程式 (24.21) から始めて，(24.22) 式と (24.24) 式で与えられる振動弦の基準モードの振動数と形を求めよ．

16. [S] 図 24.7 の星の族に対する質量と半径の関係の極値で生じるモードの安定性の変化を一度通して復習してみよう．2 乗周波数と中心密度の曲線は決して交わらないと仮定する．安定性の変化が図 24.11 で説明したようなものであり，安定平衡な星には 2 つの範囲しかないことを示せ．

17. **中性子星を超えた安定平衡**　ある理論物理学者が核密度を超える物質の新しい状態方程式を提案し，星の進化で中性子星や白色矮星を超えた新しい超高密度最終状態の発見につながるかもしれないと思っている．状態方程式とこの章の方程式を使って，ここで示した核密度を超える中心密度を持った星の質量と半径の関係を計算する．その曲線は最低密度で安定中性子星（NS）を表すが，そこから高密度へ渦を巻いていく．示された最低密度最大半径星が安定であると仮定すると，安定平衡の新しい族は存在するだろうか．



18. [E] ニュートン物理学を使って，周期 1 秒で回転する中性子星の表面における遠心力と重力の比を評価せよ．
19. **中性子星の最大質量の上限の精度の向上**　問題 9 の結果を使って 24.6 節の記法にしたがいコアの質量と半径が $M_0/r_0 < 4/9$ を満たさなければならないことを示せ．ρ_0 が核密度であることを仮定し，この値よりも上にある中心密度をもつ星のコアの質量の上限を求めよ．

付録 A
単　　位

A.1　単位の一般論

単位についてなにがしか理解するために，遠い星に住んでいる知的宇宙人に，我々の物理理論を伝えるという問題を思い浮かべてみよう．陽子の質量が電子のほぼ 1835 倍であることをメッセージとして送ることができる．質量の比は無次元の数値なので，ビットとして送ることができる．しかし，陽子の質量が 1.67×10^{-27}kg であることをメッセージとして送ることはバカげている．宇宙人はキログラムが何であるのか知らない．それにキログラムを正確に説明しなければならない．それがパリ郊外のセーブル国際度量衡局にある金属ブロックの質量だからである．標準キログラムはほぼ陽子 5.980×10^{26} 個分であることを伝えることができる．国際キログラムの質量と陽子の質量の比が無次元量であるからだ．これはあまり興味のわかないメッセージであろう．それは物理法則というよりも人類が法則の予言をどのように構成しているかについて述べているだけだからだ．

基本的物理法則の予言は無次元数に還元できる．単位は**便宜上**導入しているだけに過ぎず，数値と単位系は「便宜上」の考え方によって大きく変わる．たとえば今日，秒はセシウム原子の低いエネルギーから数えて 2 つの状態の間の遷移に厳密に 9192631770 サイクルにかかる時間と定義されており，メートルは 1/（299792458）秒であると**定義**されている．はっきり決まった無次元数を含む定義である．我々は時間，分，秒を部分的に伝統を引きずって使っているが，セシウム遷移の 28 兆分の長さで講義を話すことは便利ではないだろうという理由もある．もし便利であるならば，長方形の面積を単位とするのとは違い，円の面積を測定の単位として導入することもできるであろう．半径 1cm の円が 1 アルキメデスの面積だと定義することにしよう．1 アルキメデスが $3.14159265...\text{cm}^2$ と等しいという変換則がある．しかし，特殊相対論の観点から空間的，時間的距離を測るために，間隔の単位を使うことは奇妙でも何でもない（4.6 節）．国際キログラムの場合と同じように，測定された量と**標準**の間で無次元となる比をとって，標準の単位を導入すると便利である．

広く認められている物理理論は単位の選び方において重要な役割を果たす．すべてのセシウム原子が同じであるという原子理論の多くの成功から確信が得られなければ秒は定義されなかったであろう．光速がすべての慣性系で同じあると理論により断言されているため，この特殊相対性理論の確信が時間の単位でメートルを定義することの背後にある．

実験の進歩もどんな単位を使うかを決めるのに重要な役割を果たす．質量と長さ，時間に対して

別々の単位を使う 1 つの理由は，これらの量にかつて別の基準があったからだ．秒はかつて平均の太陽日のある割合として定義されていたし，メートルは特殊な棒にある 2 つのマークの間の距離で定義されていた．太陽日よりもかなり正確に原子遷移の振動数を測定することができるようになったとき，時間の単位の定義を我々が今日使っているものに変えることに意味があるようになった．将来の進歩により現在の状況がかわりうる．たとえば，重力質量と慣性質量の等価性，一般相対論，正確な測定しやすさにより信頼をおけるようになれば，キログラムは，テスト質量がある決まった日数で半径 1m の円軌道を 1 周するような球の質量として定義されるようになるかもしれない（現在の精度ではケプラーの法則 (3.24) 式から 8.90 日となるだろう）．そのときにはニュートンの重力定数も，今日，光速がそうであるように，測定されたものではなく，はっきり定義された量となっているだろう．軌道の周期のようなものを逆二乗したものをかけあわせたものを質量とすることにより G は 1 にできるだろう．

A.2 本書で使われる単位

本書では異なった状況でも使いやすいように力学と特殊相対論，一般相対論に対して 3 つの単位系を使う．伝統的な質量-長さ-時間（$\mathcal{MLT}$）系には，我々はグラム，センチメートル，秒の（cgs）単位系を使う．これらは，我々の考える応用のほとんどが宇宙物理学にあり，その分野で標準となっている．特殊相対論で便利な単位系は質量-長さ（$\mathcal{ML}$）系であり，光速が 1（$c=1$）になる．この単位系ではグラムとセンチメートルが使われる．一般相対論で便利な単位系は長さ（$\mathcal{L}$）系であり，**幾何学単位**と呼ばれ $G=1$, $c=1$ であり，質量と長さ，時間がすべて長さの単位となる．

表 A.1 と A.2 に，いろんな量を $\mathcal{MLT}$ 単位系と $\mathcal{ML}$ $(c=1)$ 単位系，$\mathcal{L}$（$G=c=1$）単位系の間で換算する方法を示した．表には 2 通りの使い方がある．$\mathcal{MLT}$ 単位系から他の単位系に換算するためには，一番右の列に示した因子をかける．たとえばグラムの質量をセンチメートルの質量に換算するには，表 A.2 の初めの行を使い

$$M(\text{in cm}) = (G/c^2)M(\text{in g}) = 0.742\times 10^{-28}M(\text{in g}) \tag{A.1}$$

とする．2 つの単位系から $\mathcal{MLT}$ 単位系に戻すためには，c と G のある一番右の列の式で置き換えればよい．たとえば，質量 M の球形ブラックホールの外側のシュワルツシルト半径 R から粒子の脱出速度を与える方程式は $V_{\text{escape}}=(2M/R)^{1/2}$ である [(9.42) 式を参照]．同じ関係を $\mathcal{MLT}$ 単位系で探すためには，表 A.1 から V_{escape} を V_{escape}/c で置き換え，表 A.2 から M を GM/c^2 で置き換える．これによって

$$\frac{V_{\text{escape}}}{c} = \left(\frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2}, \quad \text{または} \quad V_{\text{escape}} = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} \tag{A.2}$$

を得る．

表 A.1　質量-長さ単位系と質量-長さ-時間単位系

物理量	典型的な記号	$\mathcal{ML}$ 単位系	$\mathcal{MLT}$ 単位系	変換 $\mathcal{MLT} \to \mathcal{ML}$
質量	m	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}$	m
長さ	L	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	L
時間	t	$\mathcal{L}$	$\mathcal{T}$	ct
時空距離	s	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	s
固有時	τ	$\mathcal{L}$	$\mathcal{T}$	$c\tau$
エネルギー	E	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}(\mathcal{L}/\mathcal{T})^2$	E/c^2
運動量	p	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}(\mathcal{L}/\mathcal{T})$	p/c
速度	V	無次元	$\mathcal{L}/\mathcal{T}$	V/c

表 A.2　幾何学単位系と質量-長さ-時間単位系

物理量	典型的な記号	幾何学単位系	$\mathcal{MLT}$ 単位系	変換 $\mathcal{MLT} \to$ 幾何学単位系
質量	M	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}$	GM/c^2
長さ	L	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	L
時間	t	$\mathcal{L}$	$\mathcal{T}$	ct
時空距離	s	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	s
固有時	τ	$\mathcal{L}$	$\mathcal{T}$	$c\tau$
エネルギー	E	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}(\mathcal{L}/\mathcal{T})^2$	GE/c^4
運動量	p	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}(\mathcal{L}/\mathcal{T})$	Gp/c^3
角運動量	J	$\mathcal{L}^2$	$\mathcal{M}(\mathcal{L}^2/\mathcal{T})$	GJ/c^3
エネルギー発生率（光度）	L	無次元	$\mathcal{ML}^2/\mathcal{T}^3$	GL/c^5
エネルギー密度	ϵ	$\mathcal{L}^{-2}$	$\mathcal{M}/(\mathcal{LT}^2)$	$G\epsilon/c^4$
運動量密度（エネルギーフラックス）	$\vec{\pi}$	$\mathcal{L}^{-2}$	$\mathcal{M}/(\mathcal{L}^2\mathcal{T})$	$G\vec{\pi}/c^3$
圧力（応力）	p	$\mathcal{L}^{-2}$	$\mathcal{M}/(\mathcal{LT}^2)$	Gp/c^4
単位質量当たりの軌道エネルギー	e	無次元	$(\mathcal{L}/\mathcal{T})^2$	e/c^2
単位質量当たりの軌道角運動量	ℓ	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}^2/\mathcal{T}$	ℓ/c
プランク定数	$\hbar$	$\mathcal{L}^2$	$\mathcal{M}(\mathcal{L}^2/\mathcal{T})$	$G\hbar/c^3$

付録 B

曲率の量

以下の表に，本文で考えられる最も簡単な幾何学において便利な量を示す．具体的には，計量，クリストフェル記号，リーマン曲率，アインシュタイン曲率を示す．測地線とアインシュタイン方程式をつくるにはこれらで十分である．

成分が 0 にならないものだけを示し，対称性により他の成分を求めるのに十分なものだけを示した． たとえば，$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ は β と δ について対称なので，Γ^{t}_{tr} と Γ^{t}_{rt} の両方は示さなかった．同様に，リーマン曲率の 0 でない成分も (21.29) 式の対称性を使えば求められるものも割愛した．

それぞれの幾何学に対して，1 つの座標系が使われ，その座標系の基底を使ってクリストフェル記号を表わした．クリストフェル記号と曲率の量の座標基底成分は本書のウェブサイトの *Mathematica* プログラム *Curvature and the Einstein Equation* を使って計算することができる．しかしながら曲率量は正規直交基底で引用されている．この基底では高度に対称な計量に対して簡単な式になり，座標特異点でも特異になっていない．考えられるすべての計量は対角的なので，ベクトルが座標の方向を向く正規直交基底を使う．これらの基底ベクトルの座標成分は，例 7.9 の処方箋にしたがって計量から簡単に計算することができる．具体的に

$$(\mathbf{e}_{\hat{0}})^{\alpha} = [(-g_{00})^{-1/2}, 0, 0, 0]$$
$$(\mathbf{e}_{\hat{1}})^{\alpha} = [0, (g_{11})^{-1/2}, 0, 0] \quad \text{など} \qquad \text{(対角計量)}$$

である．

この座標基底の成分と正規直交成分は (20.41) 式でつながり，アインシュタイン曲率の場合，これは

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (e_{\hat{\alpha}})^{\alpha}(e_{\hat{\beta}})^{\beta} G_{\alpha\beta}$$

とでき，これらの簡単な対角計量に対して，簡単な処方箋になる．たとえば

$$G_{\hat{0}\hat{1}} = (-g_{00})^{-1/2} G_{01} (g_{11})^{-1/2} \quad \text{など} \qquad \text{(対角計量)}$$

である．リーマン曲率に対しても同じような関係が (21.25) 式で与えられる．これらの関係を逆にすると，座標基底成分は正規直交基底成分から計算できる．

リッチ曲率の成分とリッチ曲率スカラーは正規直交基底のリーマン曲率成分から

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta^{\hat{\gamma}\hat{\delta}} R_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\beta}\hat{\delta}}, \qquad R = \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$$

によって求められる．

シュワルツシルト幾何学

- **計量（シュワルツシルト座標）：**

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

- **クリストフェル記号：**

$\Gamma^t_{tr} = (M/r^2)(1-2M/r)^{-1}$
$\Gamma^r_{tt} = (M/r^2)(1-2M/r)$
$\Gamma^r_{rr} = -(M/r^2)(1-2M/r)^{-1}$
$\Gamma^r_{\theta\theta} = -(r-2M)$
$\Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2M)\sin^2\theta$
$\Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r$
$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta$
$\Gamma^\phi_{r\phi} = 1/r$
$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$

- **正規直交基底：**

$(e_{\hat{t}})^\alpha = \left[(1-2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0\right]$
$(e_{\hat{r}})^\alpha = \left[0, (1-2M/r)^{1/2}, 0, 0\right]$
$(e_{\hat{\theta}})^\alpha = [0, 0, 1/r, 0]$
$(e_{\hat{\phi}})^\alpha = [0, 0, 0, 1/(r\sin\theta)]$

- **リーマン曲率：**

$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -2M/r^3$
$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = +2M/r^3$
$R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = +M/r^3$
$R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -M/r^3$

- **アインシュタイン曲率：**

$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$

球対称幾何学

- **計量：**

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)}dt^2 + e^{\lambda(r,t)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

- **クリストフェル記号：**（ダッシュは r に関する偏微分であり，ドットは t についての偏微分である）

$\Gamma^t_{tt} = \dot{\nu}/2$　$\Gamma^r_{\theta\theta} = -e^{-\lambda}r$
$\Gamma^t_{tr} = \nu'/2$　$\Gamma^r_{\phi\phi} = -e^{-\lambda}r\sin^2\theta$
$\Gamma^t_{rr} = e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}/2$　$\Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r$
$\Gamma^r_{tt} = e^{\nu-\lambda}\nu'/2$　$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta$
$\Gamma^r_{tr} = \dot{\lambda}/2$　$\Gamma^\phi_{r\phi} = 1/r$
$\Gamma^r_{rr} = \lambda'/2$　$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$

- **正規直交基底：**
  $(e_{\hat{t}})^\alpha = \left[e^{-\nu/2}, 0, 0, 0\right]$
  $(e_{\hat{r}})^\alpha = \left[0, e^{-\lambda/2}, 0, 0\right]$
  $(e_{\hat{\theta}})^\alpha = [0, 0, 1/r, 0]$
  $(e_{\hat{\phi}})^\alpha = [0, 0, 0, 1/(r\sin\theta)]$
- **リーマン曲率：**
  $R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = e^{-\lambda}\left[2\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu'\right]/4 - e^{-\nu}(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda})/4$
  $R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = e^{-\lambda}\nu'/(2r)$
  $R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = e^{-(\nu+\lambda)/2}\dot{\lambda}/(2r)$
  $R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = e^{-\lambda}\lambda'/(2r)$
  $R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = (1 - e^{-\lambda})/r^2$
- **アインシュタイン曲率：**
  $G_{\hat{t}\hat{t}} = e^{-\lambda}(-1 + e^{\lambda} + r\lambda')/r^2$
  $G_{\hat{t}\hat{r}} = e^{-(\nu+\lambda)/2}\dot{\lambda}/r$
  $G_{\hat{r}\hat{r}} = e^{-\lambda}(1 - e^{\lambda} + r\nu')/r^2$
  $G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = e^{-\lambda}\left[2\nu'' + (\nu')^2 + 2(\nu' - \lambda')/r - \nu'\lambda'\right]/4 - e^{-\nu}\left[2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}\right]/4$

フリードマン-ロバートソン-ウォーカー（FRW）幾何学

- **計量**

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

- **クリストフェル記号：**
  $\Gamma^t_{rr} = a\dot{a}/(1 - kr^2)$　$\Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r$
  $\Gamma^t_{\theta\theta} = r^2 a\dot{a}$　$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta$
  $\Gamma^t_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta a\dot{a}$　$\Gamma^\theta_{t\theta} = \dot{a}/a$
  $\Gamma^r_{rr} = kr/(1 - kr^2)$　$\Gamma^\phi_{r\phi} = 1/r$
  $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1 - kr^2)$　$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$
  $\Gamma^r_{\phi\phi} = -r(1 - kr^2)\sin^2\theta$　$\Gamma^\phi_{t\phi} = \dot{a}/a$
  $\Gamma^r_{tr} = \dot{a}/a$

- **正規直交基底：**
  $(e_{\hat{t}})^\alpha = [1,0,0,0]$
  $(e_{\hat{r}})^\alpha = \left[0,\sqrt{1-kr^2},0,0\right]/a$
  $(e_{\hat{\theta}})^\alpha = [0,0,1/r,0]/a$
  $(e_{\hat{\phi}})^\alpha = [0,0,0,1/(r\sin\theta)]/a$

- **リーマン曲率：**
  $R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -\ddot{a}/a$
  $R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = (k+\dot{a}^2)/a^2$

- **アインシュタイン曲率：**
  $G_{\hat{t}\hat{t}} = 3(k+\dot{a}^2)/a^2$
  $G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -(k+\dot{a}^2+2a\ddot{a})/a^2$

静的弱場幾何学

- **計量：** $\Phi = \Phi(\vec{x}) = \Phi(x,y,z)$

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

- **クリストフェル記号：**（Φ/c^2 の 1 次のオーダーまで）

$$\Gamma^t_{tx} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \Gamma^x_{tt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$
$$\Gamma^x_{xx} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \Gamma^x_{xy} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \Gamma^x_{yy} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

これらに加え，(x,y,z) を循環的に並び替えたもの.

- **正規直交基底：**（$1/c$ の 1 次のオーダー）

$$(e_{\hat{0}})^\alpha = (1/c,0,0,0), \quad (e_{\hat{1}})^\alpha = (0,1,0,0),$$
$$(e_{\hat{2}})^\alpha = (0,0,1,0), \quad (e_{\hat{3}})^\alpha = (0,0,0,1),$$

- **リーマン曲率：**（Φ/c^2 で 1 次のオーダー）

$$R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \qquad R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{y}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},$$
$$R_{\hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{y}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \quad R_{\hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{z}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}$$

これらに加え，(x,y,z) を循環的に並び替えたもの.

- **アインシュタインテンソル：**（Φ/c^2 で 1 次のオーダー）

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{2}{c^2}\nabla^2\Phi$$

線形重力

- **計量：**

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x)$$

- **クリストフェル記号：**

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial h_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}\right)$$

- **正規直交基底：**（0 次の座標基底と同じ）

- **リーマン曲率：**

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}}\right)$$

- **アインシュタイン曲率：**

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(-\Box\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial V_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}\right)$$

ここで $V_{\alpha} \equiv \partial\bar{h}^{\beta}_{\alpha}/\partial x^{\beta}$, $\bar{h}^{\beta}_{\alpha} \equiv h^{\beta}_{\alpha} - (1/2)\delta^{\beta}_{\alpha}h^{\gamma}_{\gamma}$ であり，また

$$\Box \equiv \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2$$

である．

付録 C

曲率とアインシュタイン方程式

これは，本書のウェブサイトで利用できる *Mathematica* ノートブック *Curvature and the Einstein Equation* である．計量 $g_{\alpha\beta}$ から，以下の成分が計算できる：計量の逆数 $g^{\lambda\sigma}$, クリストフェル記号またはアフィン接続

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

(∂_α は偏微分 $\partial/\partial x^\alpha$ を表す)，リーマンテンソル

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\sigma}$$

リッチテンソル

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$$

スカラー曲率

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

アインシュタインテンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

この *Mathematica* ノートブック内の関係する入力行を編集して，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変成分を入力しなければならない．座標の名前は好きなものに変えることができる．上で挙げた量の 0 でない成分だけを出力として示した．すべての成分は決められて計量の座標系で計算される．

■ 記号の値のクリアー

まず計算すべきいろいろな量の名前にすでに割り振られているあらゆる値をすべてクリアーする．これから使う座標の名前もクリアーされる．

```
In[1]:= Clear[coord, metric, inversemetric,
         affine, riemann, ricci, scalar, einstein, r, θ, φ, t]
```

■ 次元の設定

時空（または空間）の次元 **n** を設定しなければならない：

```
In[2]:= n = 4

Out[2]= 4
```

■ 座標のリストの定義

ここでの定義はシュワルツシルト計量である．シュワルツシルトでの座標の選択は球対称時空が相応しい．

```
In[3]:= coord = {r, θ, ϕ, t}

Out[3]= {r, θ, ϕ, t}
```

coord の定義を編集することにより座標の名前を変えることができる．座標名称がもっと相応しいものがあるとき，たとえば，**coord={x,y,z,t}** とする．このプログラムで添字は **1** から **n** まで変わる．時空に対して，1 から 4 まで入り，x^4 は本文中で使われた x^0 と同じである．

■ 計量の定義

リストのリスト，つまり行列として計量を入力する．ここではどんな計量の成分も入力することができるが，座標系の関数として具体的に決めなければならない．

```
In[4]:= metric = {{(1 - 2 m / r) ^ (-1), 0, 0, 0},
          {0, r^2, 0, 0}, {0, 0, r^2 Sin[θ] ^2, 0}, {0, 0, 0, -(1 - 2 m / r)}}
```

Out[4]= $\left\{\left\{\frac{1}{1-\frac{2\,m}{r}}, 0, 0, 0\right\}, \{0, r^2, 0, 0\}, \{0, 0, r^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2, 0\}, \left\{0, 0, 0, -1+\frac{2\,m}{r}\right\}\right\}$

これは行列形式でも表すことができる．

```
In[5]:= metric // MatrixForm
```

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{2\,m}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{2\,m}{r} \end{pmatrix}$$

■ ノート：

上で指定した計量で記号 **i, j, k, l, s** または **n** を定数または座標として使わないことが重要である．その理由は，このうち最初の 5 つは，以下で行われる計算で和または表のインデックスとして使われ，**n** は空間の次元だからだ．たとえば，もし **m** が以下で和または表のインデックスで使われるとすると，計量中の **m** が質量ではなくインデックスとして使われるため，現在の計量で間違った答えが得られてしまう．

■ 逆行列の計算：

逆行列は行列の逆演算を通じて得られる．

```
In[6]:= inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]
```

Out[6]= $\left\{\left\{1-\frac{2\,m}{r}, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{r^2}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^2}, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{r}{2\,m-r}\right\}\right\}$

これは行列の形でも表せる：

```
In[7]:= inversemetric // MatrixForm
```

Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{Csc}[\theta]^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2m-r} \end{pmatrix}$$

■ **クリストフェル記号の計算：**

クリストフェル記号の成分の計算は与えられた定義を *Mathematica* の記法に書き換えて，偏微分の操作をする *Mathematica* 関数 `D`, 繰り返す記号について和をとる `Sum`, 成分のリストをつくる **Table**, 結果を整理する `Simplify` を使うことで行える．

```
In[8]:= affine := affine = Simplify[Table[(1 / 2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *
            (D[metric[[s, j]], coord[[k]] ] +
              D[metric[[s, k]], coord[[j]] ] - D[metric[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
         {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}] ]
```

■ **クリストフェル記号の表示：**

ゼロでないクリストフェル記号を以下に示す．現在の目的では関数を構成することの詳細にたちいる必要はない．出力で記号 Γ[1,2,3] は $\Gamma^1{}_{23}$ を表す．クリストフェル記号は下の 2 つの添字の交換について対称なので，独立な成分だけを示す．

```
In[9]:= listaffine := Table[If[UnsameQ[affine[[i, j, k]], 0],
          {ToString[Γ[i, j, k]], affine[[i, j, k]]}] , {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}]
In[10]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine], Null], 2], TableSpacing → {2, 2}]
```

Out[10]//TableForm=

Γ[1, 1, 1]	$\frac{m}{2mr-r^2}$
Γ[1, 2, 2]	$2m-r$
Γ[1, 3, 3]	$(2m-r)\,\mathrm{Sin}[\theta]^2$
Γ[1, 4, 4]	$\frac{m(-2m+r)}{r^3}$
Γ[2, 2, 1]	$\frac{1}{r}$
Γ[2, 3, 3]	$-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta]$
Γ[3, 3, 1]	$\frac{1}{r}$
Γ[3, 3, 2]	$\mathrm{Cot}[\theta]$
Γ[4, 4, 1]	$\frac{m}{-2mr+r^2}$

■ **リーマンテンソルの計算と表示：**

リーマンテンソル $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma}$ の成分は，上記の定義を使って計算することができる．

```
In[11]:= riemann := riemann = Simplify[Table[
           D[affine[[i, j, l]], coord[[k]] ] - D[affine[[i, j, k]], coord[[l]] ] +
            Sum[affine[[s, j, l]] affine[[i, k, s]] - affine[[s, j, k]] affine[[i, l, s]],
             {s, 1, n}],
           {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}] ]
```

ゼロでない成分は以下の関数で表される．出力で，記号 R[1,2,1,3] は $R^{1}{}_{213}$ を表し，他の成分も同様である．リーマンテンソルは最後の 2 つの添字の入れ換えに対して反対称性を示すことを使って， R[1,2,1,3] から R[1,2,3,1] が得られる．出力では $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma}$ の成分が示されているので，$R_{\lambda\mu\nu\sigma}$ の最初の 2 つの添字の交換についての反対称性は自明ではない．

```
In[12]:= listriemann := Table[If[UnsameQ[riemann[[i, j, k, l]], 0],
            {ToString[R[i, j, k, l]], riemann[[i, j, k, l]]}] ,
           {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, k - 1}]

In[13]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listriemann], Null], 2],
          TableSpacing → {2, 2}]
```

Out[13]//TableForm=

R[1, 2, 2, 1]	$\frac{m}{r}$
R[1, 3, 3, 1]	$\frac{m\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{r}$
R[1, 4, 4, 1]	$\frac{2\,m\,(-2\,m+r)}{r^4}$
R[2, 1, 2, 1]	$\frac{m}{(2\,m-r)\,r^2}$
R[2, 3, 3, 2]	$-\frac{2\,m\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{r}$
R[2, 4, 4, 2]	$\frac{m\,(2\,m-r)}{r^4}$
R[3, 1, 3, 1]	$\frac{m}{(2\,m-r)\,r^2}$
R[3, 2, 3, 2]	$\frac{2\,m}{r}$
R[3, 4, 4, 3]	$\frac{m\,(2\,m-r)}{r^4}$
R[4, 1, 4, 1]	$\frac{2\,m}{r^2\,(-2\,m+r)}$
R[4, 2, 4, 2]	$-\frac{m}{r}$
R[4, 3, 4, 3]	$-\frac{m\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{r}$

■ **リッチテンソルの計算と表示：**

リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ はリーマンテンソル（第一添字は既に上げられている）の第一添字と第三添字の和をとることで定義された．

```
In[14]:= ricci :=
          ricci = Simplify[Table[Sum[riemann[[i, j, i, l]], {i, 1, n}], {j, 1, n}, {l, 1, n}] ]
```

次に 0 でない成分を表示する．出力で R[1,2] は R_{12} を表し，他の成分も同様である．

```
In[15]:= listricci := Table[If[UnsameQ[ricci[[j, l]], 0],
            {ToString[R[j, l]], ricci[[j, l]]}] , {j, 1, n}, {l, 1, j}]

In[16]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listricci], Null], 2], TableSpacing → {2, 2}]
```

Out[16]//TableForm=

何もない場合は（シュワルツシルト計量がよい例である），真空アインシュタイン方程式が満たされているときである．

■ **スカラー曲率の計算：**

スカラー曲率 R は逆行列とリッチテンソルを使って計算される．結果は出力に表示される．

```
In[17]:= scalar = Simplify[Sum[inversemetric[[i, j]] ricci[[i, j]], {i, 1, n}, {j, 1, n}] ]

Out[17]= 0
```

■ アインシュタインテンソルの計算：

アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ はすでに計算したテンソルから求められる.

```
In[18]:= einstein := einstein = Simplify[ricci - (1 / 2) scalar * metric]
```

結果はリッチテンソルと同じように表示される.

```
In[19]:= listeinstein := Table[If[UnsameQ[einstein[[j, l]], 0],
            {ToString[G[j, l]], einstein[[j, l]]}] , {j, 1, n}, {l, 1, j}]

In[20]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listeinstein], Null], 2],
          TableSpacing → {2, 2}]

Out[20]//TableForm=
```

表が表示されないことは，真空アインシュタイン方程式が成り立っていることを意味する.

■ 謝辞

このプログラムは本書のためにミルウォーキー州ウィスコンシン大学のレオナルド・パーカー（Leonard Parker）によって書かれた.

付録 D
教育的学習法

できるだけ単純であるべきだが，あまり単純過ぎてもいけない.
アインシュタイン

物理をまず最初に!
作者不詳

一般相対論を教える直接的方法は

1. 必要な数学概念と道具を身につけさせ
2. アインシュタイン方程式と必要な物理学概念を動機付け
3. 現実的な物理的状況のモデルについて方程式を解き
4. 理論の予測を実験や観測と比較する.

この順序の論理は概して，論争の余地はなく，多くの優れた入門書も含めて，参考書・参照論文一覧の古典的な教科書に示されている方法である．しかし，基本的な入門コースに適合して，よく行われているような，限られた時間内でこの順序にしたがって教えることは困難である．必要とされる美しく力強くわかりやすい数学はかなりの量になる．したがって，進めるには時間がかかる．同様に，現実の状況で非線形アインシュタイン方程式を解くには長々と練習を積む必要がある．入門コースで使える時間は，この論理的方法に含まれる主題を教えるのに十分でもないし，重要な応用にも不十分だ．本書はこれとは違った順序で一般相対論を導入する．この付録で，本書を構成している教育原理をいくつか述べる.

D.1 教育原理

まず始めて，後で導出

アインシュタイン方程式の最も簡単な物理的な解を，導出なしで時空としてまず**最初に**示す．その時空の観測はテスト粒子と光線の運動を探求するために調べられるべきものになる．これにより学生は物理現象にできるだけ速やかに接することができる．そうすることは古典力学に最も直接的につながる主題の一部であり，それによって新しい数学的なアイディアは必要最小限になる．後にアインシュタイン方程式が導入され，それを解くことでこれらの幾何学の起源がどこにあるのかがわかる．このテキスト全体を読めるような時間的に余裕のある読者は重要な解とその起源を理解す

べきである．しかし初期の段階で読み進むのやめる読者でさえも，少なくとも曲がった時空が重要となる基本的現象のいくらかは理解していることであろう．

最も簡単な例のみ

アインシュタイン方程式の解の最も簡単な例は最も物理的に重要な現象に関係がある．太陽は近似的に球形であり，宇宙は近似的に一様等方であり，検出可能な重力波は弱く近似的に平面波として扱える．一般相対論で最も物理的に重要な時空のみを提示する．よって質量と角運動量のあるブラックホールは考察するが，荷電ブラックホールについてはしない．球対称重力崩壊は考察するが，非球対称崩壊は定性的にしかしない．一様等方宇宙論は考察するが，非一様なものはしない．平坦時空の弱い重力波は考察するが，非線形波や曲がった時空での重力波はせず，球対称星は考察するが，回転しているものはしない．

新しい数学は必要なものだけ導入

通常の計算道具以上の高等な数学的なアイディアは必要とされるものだけ導入する．時空幾何学を理解するためと，テスト粒子と光線の運動を通じて時空幾何学を調べるために，ほんの少しだけツールが必要となる．計量や 4 元ベクトル，測地線の基本的な概念を大いに使えば十分である．これらは，第 I 部と II 部の初めの章で導入され，すべて十分に概念が発展される．たとえば，一つのテンソル —— 計量—— だけしか使わないので，第 I 部と II 部でテンソルの一般論を詳しく扱う必要はない．テンソルと共変微分は第 20 章で導入する．曲率を表す定量的な量は，アインシュタイン方程式を理解するために必要不可欠なものとして第 21 章で導入する．

物理的な現象と，実験と観測との関連を強調

GPS や太陽系における惑星軌道と光線，X 線連星，活動銀河核，中性子星，重力レンズ効果，重力波，宇宙の大規模構造，ビッグバンは，相対論的重力が重要となる宇宙の現象のうちのいくつかにすぎない．本書では一般相対論と実験，観測の関連性が強まっていることを強調している．宇宙物理学や宇宙論は多くの応用の本拠地である．しかし，**本書は宇宙物理学や宇宙論の教科書ではない**．理論と観測はモデルの最も簡単なタイプによって関連づけられ，定性的なことしかできないことが多い．

実験の概観でなく古典的実験

一般相対論の現代的な解説は実験的な検証と宇宙物理学への応用なしでは完結しない．しかし，必然的に実験と観測の議論が低下してしまうのは，それが古くなってしまうからだ．特に重力物理学の場合には顕著である．執筆時でも応用面が急速に発展しており，現在建設中の重力波検出器が稼働するときにはさらに進むだろう．こうしたことから，著者は実験的な状況の概観や最新のデータを書かず，古典的例を挙げ，むしろ基本的な方法を説明するだけにとどめた．

D.2　構成

予備知識

必要とする主な予備知識は力学の初歩であり，物理学を専攻する学部生に対して標準的なものである．特に重要なことは力学の一般的な基礎知識であり，つまり保存則と中心力問題の軌道，ラグランジュ力学である．第 3 章に簡単な議論があるが，力学の変分原理の初歩を知っているとよい．同様に，第 4–5 章に自己完結した議論があるが，特殊相対論の初歩が身についているとよいであろう．マクスウェル方程式の参考文献が少しあり，ボックスに電磁気の基礎的な応用があるが，本文の主な内容を読み進めるのに，詳しい電磁気のコースは前提としていない．

3 部構成

本書は 3 部に分かれている．第 I 部は，重力が幾何学であることのアイディアを紹介し，一般相対論と関連のあるニュートン力学と特殊相対論力学の基礎的な部分を復習する．第 II 部は一般相対論の基礎的なアイディアを導入し，テスト粒子と光線の運動を調べることを通じて，ブラックホールや宇宙論的時空，重力波時空を理解することに焦点を絞る．これらの幾何学は提示し分析するが導出しない．曲率の数学とアインシュタイン方程式を導入してから第 III 部で幾何学を導出する．第 III 部で引き続き，アインシュタイン方程式が本質的となる重力波の発生と相対論星の初歩的な議論を行う．各部においてトピックスの順序は，ほぼ，数学的な詳細または物理的な概念においても，洗練さを増すように並べられている．

ボックス

ボックスで議論することで，本文の基礎的なアイディアを拡張し説明したいと思っている意図を持っている．ボックスは関連するアイディア（ペンローズ図のようなもの）を扱うことがあり，関連した実験（現代版マイケルソン–モーレー実験）や一般相対論が重要な役割を果たす複雑な現象（回転ブラックホールから電磁気的にエネルギーを取り出すことのような）を導入することもある．こうした拡張を行おうとすれば，本文のほとんどで仮定されている基本的な力学の範囲を超えてしまい，さらなる物理学が必要となる．ボックスの目的は扱っている内容をより深く理解することではなく，主題に関連するトピックスを手短にそして定性的に説明することである．ボックスの内容によって，学生に理解しやすいものもあるし，しにくいと感じるものあるだろう．しかし，本文を理解するためにはすべてのボックスを理解する必要はない．

Mathematica ノートブック

一般相対論の最も簡単な物理的な状況を分析するときでさえ，ややこしい計算が必要なときがあるし，初歩的に閉じた形の解が存在しない微分方程式に出くわすこともある．その手助けとして，本書のウェブサイトに，以下の内容についての *Mathematica* ノートブックがあり，それを使えば，標準的な代数計算ができ，最も重要な微分方程式を解くことができる．

- クリストフェル記号と測地線方程式

- シュワルツシルト幾何学内の軌道の形
- フリードマン–ロバートソン–ウォーカー宇宙論モデル
- 曲率とアインシュタイン方程式

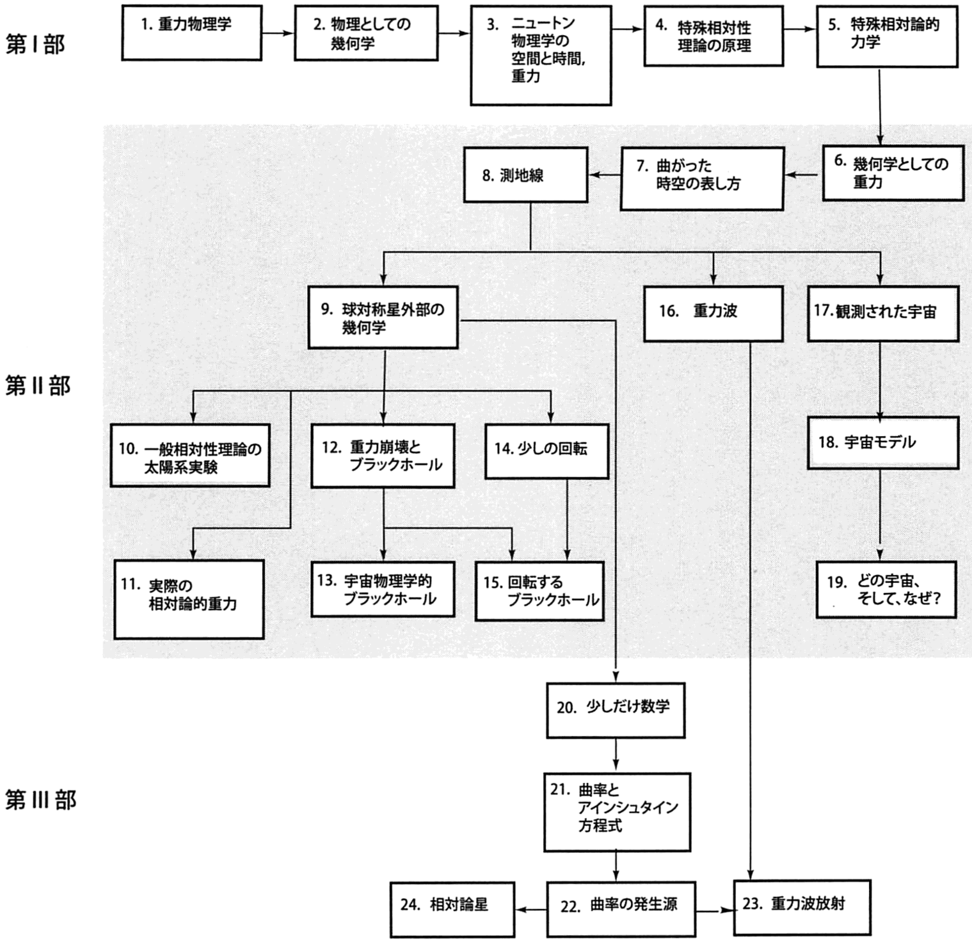
ウェブサイトの増補

概念的に簡単な結果であるにもかかわらず，主要な理解の充実を妨げがちな長い導出が必要な場合がある．通常は付録に追いやられるだろう．しかし，本書を扱いやすい長さにするために，本書のウェブサイトに入れておく．

D.3 コースの構成

本書は 1 クォーターコース（∼ 30 時間分の講義）または 1 学期コース（∼ 45 時間分の講義）で無理なく行える内容以上のものを含んでいる．したがって，章を選んだり，その一部を取り出したりすることでさまざまな授業計画をつくり出すことができる．以下のチャートは，それぞれの章が相互的にどのように関連しあっているかを表している．第 I 部（第 1 から 5 章）のどこから始めるか，またはどれだけ速く進めるかは学生の予備知識で決まるだろう．第 6–9 章は一般相対論の基本的アイディアとテクニックの導入である．後の章をどのように選んでも原理的にコースの基礎となる．たとえば，ブラックホールに焦点を絞ろうとすれば，第 12–15 章を入れることになるだろう．重力波に絞れば，第 16,20–23 章を入れるのがよいであろう．著者自身のクォーターコースは第 1–10, 12–13 章に，クラスの興味によるが，宇宙論の第 17–19 章またはアインシュタイン方程式入門の第 20–21 章を加える．

著者は大学院生用の入門コースに教科書として数回使ってみた．一般相対論を初めて習う学生や，一般相対論の枠組よりもその応用に興味がある学生，または時間に制限がある場合にはよかった．


第 I 部
1. 重力物理学
2. 物理としての幾何学
3. ニュートン物理学の空間と時間，重力
4. 特殊相対性理論の原理
5. 特殊相対論的力学
第 II 部
6. 幾何学としての重力
7. 曲がった時空の表し方
8. 測地線
9. 球対称星外部の幾何学
16. 重力波
17. 観測された宇宙
10. 一般相対性理論の太陽系実験
12. 重力崩壊とブラックホール
14. 少しの回転
18. 宇宙モデル
11. 実際の相対論的重力
13. 宇宙物理学的ブラックホール
15. 回転するブラックホール
19. どの宇宙、そして、なぜ?
第 III 部
20. 少しだけ数学
21. 曲率とアインシュタイン方程式
24. 相対論星
22. 曲率の発生源
23. 重力波放射

参考書・参照論文一覧

この 参考書・参照論文一覧は一般相対論の古典的教科書と，より特徴のある教科書，本書で引用した論文からなっている．論文は主に本書で述べた実験データと観測データの原論文である．包括的であろうとせず，議論されたアイディアの原論文を引くこともしていない．本書で述べたテーマについて興味を覚え詳しく調べたい読者にはまず以下の教科書にあたるよう勧めるのがたぶん最良の助言となろう．

古典的一般的な解説

Landau, L. and Lifshitz, E.M. (1962). *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, London. （日本語版：恒藤敏彦/広重徹訳『場の古典論』東京図書，1978）

このテキストのうち 150 ページを一般相対性理論に費し，明解でストレートなランダウとリフシッツスタイルで相対論の基礎を丁寧に導入している．ただし，応用にはそれほど踏み込んでいない．

Misner, C.W., Thorne, K.S., and Wheeler, J.A. (1970). *Gravitation*, W.H. Freeman, San Francisco.

出版から 30 年以上にわたり *Gravitation* は今なお一般相対論において最も包括的な教科書である．テーマのほとんどどんなトピックでも，権威ある完全な考察が 1300 ページの中に見つかる．オリジナルな文献も広範囲に扱っている．20 世紀の熟練者 3 人に書かれているので，本書を含め，後の多くのテキストのスタイルを定めた．

Taylor, E.F. and Wheeler, J.A. (1963). *Spacetime Physics*, W.H. Freeman, San Francisco.（日本語版：曽我見郁夫/林浩一訳『時空の物理学—相対性理論への招待 』現代数学社，1981；原著の第 2 版は 1992 年刊行.）

生き生きとして洞察に富む入門レベルの特殊相対論をうまく説明している．時空の視点を強調している．

Wald, R. (1984). *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago.

General Relativity は一般的な大学院生用のテキストである．一般相対論に必要な微分幾何学が徹底的に厳密にそして現代的な数学のスタイルで展開されている．因果構造，漸近的平坦性，スピノール，曲がった時空での量子論などの数々の進んだトピックスと同様に基本的な議論について細心で明確に述べられている優れた教科書である．

Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York.

この本は，場の理論と素粒子物理の観点から一般相対論を扱っており，宇宙論への応用に重きをおいている．視点は主に非幾何学的であり，本書とは対照的である．しかし，この別の視点から

も理解が進む．出版から 30 年来，観測は大きく変わったが，*Gravitation and Cosmology* は，宇宙論における重力理論の価値のある資源であることに変わりはない．

専門的なテキスト

Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kolb, E.W. and Turner, M.S. (1990). *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, CA.（現在の発行元は Westview Press）

Krolik, J.H. (1999). *Active Galactic Nuclei*, Princeton University Press, Princeton.

Shapiro, S.L. and Teukolsky, S.A. (1983). *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley-Interscience, New York.

Thorne, K.S., Price, R.H., and MacDonald, D.A. (1986). *Black Holes: The Membrane Paradigm*, Yale University Press, New Haven.

Will, C.A. (1993). *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (revised edition).

歴史

Miller, A. I. (1981). *Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, Addison-Wesley, Reading, MA.（新しい版の発行元は Springer）

Pais, A. (1982). *Subtle is the Lord...*, Oxford University Press, New York. （日本語版：西島和彦監訳『神は老獪にして… アインシュタインの人と学問』産業図書， 1987）

本文中で引用された論文

Alcock, C. et al. (1997). "The MACHO Project Large Magellanic Cloud Microlensing Results from the First Two Years and the Nature of the Galactic Dark Halo," *Ap. J.*, **486**, 697.

Alcubierre, M. (1994), "The Warp Drive: Hyper-fast Travel within General Relativity," *Class. Quant. Grav.*, **11**, L73.

Anderson, J.D. and Williams, J.G. (2001). "Long Range Tests of the Equivalence Principle," *Class. Quant. Grav.*, **18**, 2447.

Bailey, J. et al. (1977). "Measurements of Relativistic Time Dilation for Positive and Negative Muons in Circular Orbit," *Nature*, **268**, 301.

Bennett, C.L., Banday, A.J, Gorski, K.M., Hinshaw, G., Jackson, P., Keegstra, P., Kogut, A., Smoot, G.F., Wilkinson, D.T., and Wright, E.L. (1996). "4-Yr COBE Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results," *Ap.J.*, **464**, L1.

Biretta, J.A., Moore, R.L., and Cohen, M.H. (1986). "The Evolution of the Compact Radio Source in 3C 345. I. VLBI Observations," *Ap. J.*, **308**, 93.

Braginsky, V.B., and Panov, V.I. (1971). "Verification of the Equivalence of Inertial and Gravitational Mass," *Zh. Eksp. Theor. Fiz.*, **61**, 873 [*Sov. Phys. JETP*, **34**, 463 (1972).]

Brillet, A. and Hall, J.L. (1979). "Improved Laser Test of the Isotropy of Space," *Phys. Rev. Letters*,

42, 549.

Brown, T.M. et al. (1989). "Inferring the Sun's Internal Angular Velocity from Observed p-Mode Frequency Splittings," *Ap. J.*, **343**, 526.

Campbell, W.W. and Trumpler, R. (1923). "Observation on the Deflection of Light in Passing Through the Sun's Gravitational Field Made During the Total Solar Eclipse of Sept. 21 1922," *Lick Observatory Bulletin*, No. 346, **11**, 41.

Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford.

Colless, M., Dalton, G., Maddox, S., Sutherland, W., et al. (2001). "The 2dF Galaxy Redshift Survey: Spectra and Redshifts," *MNRAS*, **328**, 1039–1063.

Colley, W.N., Tyson, J.A., and Turner, E.L. (1996). "Unlensing Multiple Arcs in 0024+1654: Reconstruction of the Source Image," *Ap. J.*, **461**, L83.

Cram, T.R., Roberts, M.S., and Whitehurst, R.N. (1980). "A Complete, High-Sensitivity 21-cm Hydrogen Line Survey of M31," *Astron. and Astrophys. Suppl.*, **40**, 215.

de Bernardis, P. et al. (2000). "A Flat Universe from High-Resolution Maps of the Cosmic Microwave Background Radiation," *Nature*, **404**, 955.

Dickey, J.O. et al. (1994). "Lunar Laser Ranging: A Continuing Legacy of the Apollo Program," *Science*, **265**, 482.

Feynman, R. (1965). *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge, MA. （日本語版：江沢洋訳『物理法則はいかにして発見されたか』岩波書店，2001）

Fixsen, D.J., Cheng, E.S., Gales, J.M., Mather, J.C., Shafer, R., and Wright. E. (1996). "The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set," *Ap.J.* **473**, 576.

Fomalont, E.B. and Sramek, R.A. (1975). "A Confirmation of Einstein's General Theory of Relativity by Measuring the Bending of Microwave Radiation in the Gravitational Field of the Sun," *Ap. J.*, **199**, 749.

Fomalont, E.B. and Sramek, R.A. (1977). "The Deflection of Radio Waves by the Sun," *Comm. Astrophys.*, **7**, 19.

Freedman, W. L., Madore, B.F., and Kennicutt, R.C. (2001). "The Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant," *Ap. J.*, **553**, 47.

Ghez, A.M., Hornstein, S., Tanner, A., Morris, M., and Becklin, E.E. (2002). "Full 3-D Orbital Solutions for Stars Making a Close Approach to the Supermassive Black Hole at the Center of the Galaxy," in M.J. Rees Symposium "Making Light of Gravity," July 8, 2002 (unpublished).

Glendenning, P. (1985). "Neutron Stars Are Giant Hypernuclei?," *Ap. J.*, **293**, 470.

Gustavson, T.L., Bouyer, P., and Kasevich, M.A. (1997). "Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope," *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 2046.

Hafele, J.C. and Keating R.E. (1972). "Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains," *Science*, **177**, 168.

Harrison, B.K., Thorne, K.S., Wakano, M., and Wheeler, J.A. (1965). *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press, Chicago.

Hartle, J.B. (1978). "Bounds on the Mass and Moment of Inertia of Non-Rotating Neutron Stars," *Phys. Reports*, **46**, 201.

Hartle, J.B. et al. (1999). *Gravitational Physics: Exploring the Structure of Space and Time*, National Academies Press, Washington, DC.

Herrnstein, J.R., Moran, J.M., Greenhill, L.J., Diamond, P.J., Inoue, M., Nakai, N., Miyoshi, M., Henkel, C., and Riess, A. (1999). "A Geometric Distance to the Galaxy NGC 4258 from Orbital Motions in a Nuclear Gas Disk," *Nature*, **400**, 539.

Kramer, D., Stephani, H., MacCallum M., and Herlt, E. (1980). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Schmutzer, E., ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Lebach, D., Corey, B., Shapiro, I., Ratner, M., Webber, J., Rogers, A., Davis, J., and Herring, T. (1995). "Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry," *Phys. Rev. Letters*, **75**, 1439.

Maddox, S., Efstathiou, G., Sutherland, W., and Loveday, J. (1990). "The APM Galaxy Survey I," *MNRAS*, **243**, 692.

Marey, Étienne-Jules (1885). *La méthode graphique dans les sciences experimentales et principalement en physiologie et en medecine*, G. Masson, Paris.

Mather, J., Fixsen, D., Shafer, R., Mosier, C., and Wilkinson, D. (1999). "Calibrator Design for the COBE Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS)," *Ap. J.*, **512**, 511.

Miyoshi, M., Moran, J.M., Herrnstein, J.R., Greenhill, L.J., Nakai, N., Diamond, P.J., and Inoue, M. (1995). "Evidence for a Massive Black Hole from High Rotation Velocities in a Sub-Parsec Region of NGC 4258," *Nature*, **373**, 127.

Orosz, J.A., Bailyn, C.D., McClintock, J.E., and Remillard, R.A. (1996). "Improved Parameters for the Black Hole Binary System X-ray Nova Muscae 1991," *Ap. J.*, **468**, 380.

Parkinson, B.W., and Spilker, J.J. eds. (1996). *Global Positioning System: Theory and Applications*, vols I and II, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C.

Perlmutter, S. et al. (1999). "Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae," *Ap.J.* **517**, 565–586.

Persson, S.E, Madore, B.F., Freedman, W.L., Krzeminski, W., Roth M., and Murphy, D.C. (2002). (to be published in Ap. J.).

Pound, R.V. and Rebka, G.A. (1960). "Apparent Weight of Photons," *Phys. Rev. Lett.* **4**, 337.

Pound, R.V. and Snider, J.L. (1964). "Effect of Gravity on Nuclear Resonance," *Phys. Rev. Lett.* **13**, 539.

Riess, A.G. et al. (1998). "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant," *Astron.J.* **116**, 1009–1038.

Roberts, M. (1988). "How Much of the Universe Do We See?" In *Proceedings of the Bicentennial Commemoration of R.G. Boscovich*, Bossi, M. and Tucci, P., eds. Edizioni Unicopli, Milan.

Roll, P.G., Krotkov, R., and Dicke, R.H. (1964). "The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass," *Ann. Phys. (N.Y.)*, **26**, 442.

Saulson, P. (1994). *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*, World Scientific, Singapore.

Shapiro, I.I., Reasenberg, R.D., MacNeil, P.E., Goldstein, R.B., Brenkle, J.P., Cain, D.L., Komarek, T., Zygielbaum, A.I., Cuddihy, W.F., and Michael, W.H., Jr. (1977). "The Viking Relativity Experiment," *J. Geophy. Res.* **82**, 4329.

Shapiro, I. (1990). "Solar System Tests of General Relativity," in *General Relativity and Gravitation 1989*, Ashby, N., Bartlett, D.F., and Wyss, W., eds. Cambridge University Press, Cambridge.

Su, Y., Heckel, B.R., Adelberger, E.G., Gundlach, J.H., Harris, M., Smith, G.L., and Swanson,

H.E. (1994). "New Tests of the Universality of Free Fall," *Phys. Rev. D*, **50**, 3614.

Tanaka, Y., et al. (1995). "Gravitationally Redshifted Emission Implying an Accretion Disk and Massive Black-Hole in the Active Galaxy MCG:-6-30-15," *Nature*, **375**, 659.

Taylor, J.H. (1994). "Binary Pulsars and Relativistic Gravity," *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 711.

Taylor, J.H. and Weisberg, J.M. (1989). "Further Experimental Tests of Relativistic Gravity Using the Binary Pulsar PSR 1913+16," *Ap. J.* **345**, 434.

Thorne, K.S. (1994). *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, W.W. Norton, New York. (日本語版：林一・塚原周信訳『ブラックホールと時空の歪み—アインシュタインのとんでもない遺産』白揚社，1997)

Vessot, R.F.C. and Levine, M.W. (1979). "A Test of the Equivalence Principle Using a Space-Borne Clock," *Gen. Rel. and Grav.*, **10**, 181.

Wang, X., Tegmark, M., Zaldarriaga, M. (2002). "Is Cosmology Consistent?," *Phys. Rev. D*, **65**, 123001.

Williams, J.G., Newhall, X.X., and Dickey, J.O. (1996). "Relativity Parameters Determined from Lunar Laser Ranging," *Phys. Rev. D*, **53**, 6730.

索　　引

す

せ

そ

た

ち

て

と

る

れ

ろ

わ

訳者紹介
牧野伸義（まきののぶよし）
1966年 生まれ
1994年 広島大学理学研究科 博士課程修了
同年 博士 (理学) 取得
現　在　大分工業高等専門学校 機械工学科 准教授
主な訳書
『宇宙論入門』『一般相対性理論入門』(ピアソン・エデュケーション)

重力

アインシュタインの一般相対性理論入門

2008年12月15日　初版第1刷発行

著　者	ジェームズ・B・ハートル
訳　者	牧野 伸義
発行人	ブレンダン・デラハンティ
発行所	株式会社ピアソン・エデュケーション
	〒166-0003　東京都杉並区高円寺南2－4 4－5
	営業部　電話：(03) 5929-6050　Fax：(03) 3314-8169
	http://www.pej-hed.jp
印刷＋製本	三美印刷株式会社

Authorized translation from the English language edition, entitled GRAVITY: An Introduction to Einstein's General Relativity by James B. Hartle published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison Wesley.

JAPANESE language edition published by PEARSON EDUCATION JAPAN.

Printed in Japan

ISBN 978-4-89471-641-4